ND 序列乘积和的强收敛性*

Strong Convergence of Product Sums for ND Sequences

孟 兵,吴群英

MENG Bing,WU Qun-ying

(桂林理工大学理学院,广西桂林 541004)

(Department of Mathematics and Physics, Guilin University of Technology, Guilin, Guangxi, 541004,China)

摘要:讨论 ND 随机变量序列乘积和的强收敛性,将关于 NA 随机变量序列乘积和强收敛性的注记推广到 ND 的情形.

关键词:ND 序列 乘积和 强收敛性

中图法分类号:O211.4 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2010)03-0197-03

Abstract: The strong convergence of product sums for ND random variable sequences was discussed, and Wang's results were extended.

Key words: ND sequence, product sum, strong convergence

基于强收敛性在概率论与数理统计中的重要地位,对随机变量序列强收敛性的探讨也获得了越来越多的关注,如文献[1]研究不同分布 NA 列乘积和的强收敛性,文献[2]研究同分布 NA 序列的强收敛性,文献[3]研究同分布 ND 序列加权和的强大数律,文献[4]研究 $\tilde{\rho}$ 混合序列加权和的完全收敛性和强收敛性.本文讨论 ND 随机变量序列乘积和的强收敛性,将文献[5]关于 NA 随机变量序列乘积和的强收敛性推广到 ND 的情形.

1 相关引理

引理 1[6] 设 $\{X_n:n\geqslant 1\}$ 是均值为零的 ND 列,$p\geqslant 1,E|X_i|^p<\infty,i\geqslant 1$.则存在正常数 C,使当 $1\leqslant p\leqslant 2$ 时,

$$E|\sum_{i=a+1}^{a+n}X_i|^p\leqslant C\sum_{i=a+1}^{a+n}E|X_i|^p,\forall\ n\geqslant 1,a\geqslant 0.$$

当 $p>2$ 时,

$$E|\sum_{i=a+1}^{a+n}X_i|^p\leqslant C\{\sum_{i=a+1}^{a+n}E|X_i|^p+(\sum_{i=a+1}^{a+n}EX_i^2)^{p/2}\},$$

$\forall\ n\geqslant 1,a\geqslant 0$.

引理 2[7] 设 $\{X_n:n\geqslant 1\}$ 为 ND 随机变量序列,$EX_n^2<\infty,n\geqslant 1$,若

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log^2 n\mathrm{Var}X_n<\infty,$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}(X_n-EX_n)$ a.s. 收敛.

引理 3[8] 设 $\{X_n:n\geqslant 1\}$ 为随机变量序列,$\gamma\geqslant 0,\alpha>1$,且 $\forall\ m\geqslant n\geqslant 1$,有

$$E|\sum_{i=n}^{m}X_i|^\gamma\leqslant(\sum_{i=n}^{m}u_i)^\alpha,$$

其中 $\{u_n:n\geqslant 1\}$ 为非负常数列,若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n<\infty$,则 $\sum_{n=1}^{\infty}X_n$ a.s. 收敛.

引理 4[7] 设 $\{X_n:n\geqslant 1\}$ 是 ND 列,存在某 r.v. X,使对任意 $x>0$ 及 $n\geqslant 1$,有

$$P(|X_n|\geqslant x)\leqslant CP(|X|\geqslant x).$$

2 主要结果

定理 1 设 $\{X_n:n\geqslant 1\}$ 是均值为零的 ND 列,$p>2,E|X_n|^p<\infty,n\geqslant 1$.如果存在 $t>0,\delta>p/2$,使

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E|X_n|^p(\log n)^\delta}{n^{1+p/t-p/2}}<\infty, \tag{1}$$

则对任意的正整数 m,有

$$\lim_{n\to\infty}n^{-m/t}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\prod_{j=1}^{m}X_{i_j}=0,\text{a.s.}. \tag{2}$$

证明 由引理 1 知为证明(2)式,只要证明对任

收稿日期:2009-07-10

作者简介:孟 兵(1979-),男,讲师,主要从事概率极限理论研究。

* 国家自然科学基金项目(10661006),广西"新世纪十百千人才工程"专项资金项目(2005214)及广西自然科学基金项目(桂科自0728212)资助。

意的 $1 \leqslant r \leqslant m$，有

$$n^{-r/t}\sum_{i=1}^{n}X_i^r \to 0, \text{a. s. } n \to \infty. \quad (2\text{-}r)$$

由 Jensen 不等式知，当 $2 \leqslant r \leqslant m$ 时

$$n^{-r/t}\sum_{i=1}^{n}X_i^r \leqslant (n^{-2/t}\sum_{i=1}^{n}X_i^2)^{r/2}, \forall\ n \geqslant 1.$$

从而为证(2-r)，只要证 $r = 1,2$ 两种情形，即(2-1)式和(2-2)式. 且由条件(1)可得

$$E|X_n|^p \leqslant Cn^{p/t-p/2}(\log n)^{-\delta}.$$

(1) 当 $r = 1$ 时，由引理 1 的第 2 式，对 $\forall\ m \geqslant n \geqslant 1$，有

$$E|\sum_{i=n}^{m}i^{-1/t}X_i|^p \leqslant C\{\sum_{i=n}^{m}i^{-2/t}(E|X_i|^p)^{2/p}\}^{p/2} \leqslant C\{\sum_{i=n}^{m}i^{-1}(\log i)^{-2\delta/p}\}^{p/2}.$$

由于 $p > 2, \delta > p/2$，所以 $p/2 > 1, 2\delta/p > 1$，即有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}(\log n)^{-2\delta/p} < \infty.$$

由引理 3 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1/t}X_n \quad \text{a. s. 收敛}.$$

再由 Kronecker 引理可得(2-1)成立.

(2) 当 $r = 2$ 时，先证

$$n^{-2/t}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2 \to 0, n \to \infty. \quad (3)$$

因

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2/t}EX_n^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}n^{-2/t}(E|X_n|^p)^{2/p} \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}(\log n)^{-2\delta/p} < \infty.$$

由 Kronecker 引理可得(3)式成立. 故为证(2-2)，只要证明

$$n^{-2/t}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - EX_i^2) \to 0, n \to \infty. \quad (4)$$

(i) 当 $2 < p \leqslant 4$ 时，$1 < p/2 \leqslant 2$，由引理 1 的第 1 式可得

$$E|\sum_{i=n}^{m}i^{-2/t}(X_i^2 - EX_i^2)|^{p/2} \leqslant C\sum_{i=n}^{m}i^{-p/t}E|X_i|^p \leqslant C\{\sum_{i=n}^{m}i^{-2/t}(E|X_i|^p)^{2/p}\}^{p/2} \leqslant C\{\sum_{i=n}^{m}i^{-1}(\log i)^{-2\delta/p}\}^{p/2}.$$

(ii) 当 $p > 4$ 时，$p/2 > 2$，由引理 1 的第 2 式可得

$$E|\sum_{i=n}^{m}i^{-2/t}(X_i^2 - EX_i^2)|^{p/2} \leqslant C\{\sum_{i=n}^{m}n^{-p/t}E|X_i|^p + (\sum_{i=n}^{m}n^{-4/t}EX_i^4)^{p/4}\} \leqslant C\{[\sum_{i=n}^{m}i^{-2/t}(E|X_i|^p)^{2/p}]^{p/2} + [\sum_{i=n}^{m}n^{-4/t}(E|X_i|^p)^{4/p}]^{p/4}\} \leqslant C\{\sum_{i=n}^{m}i^{-2/t}(E|X_i|^p)^{2/p}\}^{p/2} \leqslant C\{\sum_{i=n}^{m}i^{-1}(\log i)^{-2\delta/p}\}^{p/2}.$$

由引理 3 及 Kronecker 引理可得(4)式成立.

定理 2 设$\{X_n: n \geqslant 1\}$为不同分布的 ND 列，数列$\{a_n: n \geqslant 1\}$满足 $a_n > 0, A_n \triangleq \sum_{i=1}^{n}a_i \uparrow \infty$，若有

$$EX_n = 0, \quad (5)$$

$$E|X| < \infty, \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n| > a_n) < \infty, \quad (7)$$

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}EX_iI(|X_i| \leqslant a_n) \to 0, \quad (8)$$

$$N(n) \ll n, n \geqslant 1, \quad (9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-2}EX_n^2I(|X_n| \leqslant a_n) < \infty, \quad (10)$$

其中 $N(n) \triangleq \#\{i; A_ia_i^{-1}\log^{-1}i \leqslant n\}$. 则对任意正整数 m，有

$$\lim_{n\to\infty}a_n^{-m}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\prod_{j=1}^{m}X_{i_j} = 0, \text{a. s.}. \quad (11)$$

证明 由引理 4 知，为证明(11)式，只要证当 $r = 1,2$ 时，有

$$a_n^{-r}\sum_{i=1}^{n}X_i^r \to 0, \text{a. s. } n \to \infty. \quad (2\_r)$$

先证(2_1). 设 $b_i \triangleq A_ia_i^{-1}\log^{-1}i$，由(9)式得 $b_i \to \infty, i \to \infty$.

(1) 记

$$Y_i = b_iI(X_i > b_i) + X_iI(|X_i| \leqslant b_i) - b_iI(X_i < -b_i),$$

则有

$$T_n = A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_i(X_i - Y_i) + A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_i(Y_i - EY_i) + A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_iEY_i \triangleq I_1 + I_2 + I_3.$$

由(5)式，(9)式及引理 4 得

$$\sum_{i=1}^{\infty}P(X_i \neq Y_i) = \sum_{i=1}^{\infty}P(|X_i| \geqslant b_i) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{j-1<b_i\leqslant j}P(|X_i| \geqslant b_i > j-1) \ll \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{j-1<b_i\leqslant j}P(|X| \geqslant b_i > j-1) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}(N(j) - N(j-1))P(|X| \geqslant j-1) = \sum_{j=1}^{\infty}N(j)P(j \leqslant |X| < j+1) \ll \sum_{j=1}^{\infty}jP(j \leqslant |X| < j+1) \ll E|X| < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理知

$$P(X_n \neq Y_n, \text{i. o.}) = 0.$$

故

$$I_1 = A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_i(X_i - Y_i) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, n \to \infty.$$

又因为 $E|X_n| \leqslant CE|X| < \infty$，且 $b_i \to \infty$，所以有

$$\lim_{i\to\infty} b_i P(|X_n| > b_i) = 0,$$

以及

$$\lim_{i\to\infty} EX_i I(|X_i| \leqslant b_i) = \lim_{i\to\infty} EX_n I(|X_n| \leqslant b_i) = EX_n = 0,$$

由此可得

$$|EY_i| \leqslant b_i P(|X_n| > b_i) + |EX_i I(|X_i| \leqslant b_i)| \to 0, i \to \infty.$$

又 $A_n^{-1}a_i > 0$，$\sum_{i=1}^{n} A_n^{-1}a_i = 1$，故由 Toeplitz 引理得

$$I_3 = A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i EY_i \to 0, n \to \infty.$$

下面证明

$$I_2 = A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_i(Y_i - EY_i) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, n \to \infty. \quad (12)$$

因为 $0 < A_n \uparrow \infty$，由 Kronercker 引理，只需证明

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^{-1}a_i(Y_i - EY_i) \text{ a.s. 收敛.}$$

由于 $A_i^{-1}a_i(Y_i - EY_i)$ 仍是单调不降函数，所以 $\{A_i^{-1}a_i(Y_i - EY_i)\}$ 仍是ND的，故由引理2，只需证明

$$\sum_{i=1}^{\infty} \log^2 i \operatorname{Var}(A_i^{-1}a_i Y_i) \leqslant \infty. \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \log^2 i \operatorname{Var}(A_i^{-1}a_i Y_i) = \sum_{i=1}^{\infty}(\log^2 i) A_i^{-2}a_i^2 E(Y_i - EY_i)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{j-1<b_i\leqslant j} A_i^{-2}a_i^2(\log^2 i)EY_i^2 \ll \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{j-1<b_i\leqslant j} b_i^{-2}(b_i^2 P(|X_i| > b_i) + EX_i^2 I(|X_i| \leqslant b_i \leqslant j) \ll \sum_{j=2}^{\infty}(N(j) - N(j-1))P(|X_j| > j-1) + (j-1)^{-2}EX_j^2 I(|X_i| \leqslant j) \triangleq H_1 + H_2.$$

由(6)式及引理 4 有

$$H_1 = \sum_{j=2}^{\infty} N(j)P(|X_j| > j-1) - \sum_{j=2}^{\infty} N(j)P(|X_j| > j) \ll \sum_{j=2}^{\infty} N(j)P(|X| > j - 1) - P(|X| > j)) \ll \sum_{j=2}^{\infty} jP(j \leqslant |X| < j+1) \ll E|X| < \infty.$$

由 Lagrange 中值定理知，$(j-1)^{-2} - j^{-2} \ll j^{-3}$，结合(6)式得

$$H_2 = \sum_{j=2}^{\infty}(N(j) - N(j-1))(j-1)^{-2}\sum_{k=1}^{j} EX_k^2 I(k-1 < |X_k| \leqslant k) = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}(N(j) - N(j-1))(j-1)^{-2}EX_k^2 I(k-1 < |X_k| \leqslant k) = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} N(j)((j-1)^{-2} - j^{-2})EX_k^2 I(k-1 < |X_k| \leqslant k) \ll \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} j((j-1)^{-2} - j^{-2})EX_k^2 I(k - 1 < |X_k| \leqslant k) \ll \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} j^{-2}EX_k^2 I(k-1 < |X_k| \leqslant k) \ll \sum_{k=2}^{\infty} k^{-1}E|X_k| k I(k-1 < |X_k| \leqslant k) \ll EX_k < \infty.$$

因此(13)成立. 故由引理 2 可得

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^{-1}a_i(Y_i - EY_i) \text{ a.s. 收敛.}$$

又由 Kronecker 引理知(12)式成立.

(2) 下面证明(2_2). 记 $Z_i = X_i I(|X_i| \leqslant a_i)$，由(7)式和 Borel-Cantelli 引理知

$$P(X_n \neq Z_n, \text{i.o.}) = 0.$$

又由(9)式可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-2}Z_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-2}EX_n^2 I(|X_n| \leqslant a_n) < \infty, \text{a.s.}.$$

由 Kronecker 引理可知

$$a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \to 0, \text{a.s. } n \to \infty.$$

(2_2)成立. 定理 2 证明完毕.

参考文献：

[1] 成凤旸，王岳宝，严继高. 不同分布 NA 列乘积和的强收敛性[J]. 高校应用数学学报，2002，17(2)：189-194.

[2] 苏淳，王岳宝. 同分布 NA 序列的强收敛性[J]. 应用概率统计，1998，14(2)：131-140.

[3] 季洁鸥，林正炎. 同分布 ND 序列加权和的强大数律[J]. 浙江大学学报，2007，34(5)：499-503.

[4] 吴群英. $\tilde{\rho}$ 混合序列加权和的完全收敛性和强收敛性[J]. 应用数学，2002，15(1)：1-4.

[5] 王月芬. 关于 NA 列乘积和强收敛性的注记[J]. 高校应用数学学报 A 辑，2006，21(2)：191-196.

[6] Shao Q M，Su C. The law of the iterated logarithm for negatively associated random variables [J]. Stochastic Process Appl，1999，83：139-148.

[7] 吴群英. 混合序列的概率极限理论[M]. 北京：科学出版社，2005.

[8] Billingsley P. Convergence of probability measures[M]. New York：John Wiley Sons，1968.

（责任编辑：韦廷宗）