广西科学 Guangxi Sciences 2010,17(3):202～205

产品平均寿命的 Bayes 估计*

Bayes Estimates of the Products' Average Life Expectancy

赵丽棉[1],韦　师[2],黄基廷[1]

ZHAO Li-mian[1],WEI Shi[2],HUANG Ji-ting[1]

(1. 河池学院数学系,广西宜州　546300;2. 贺州学院数学系,广西贺州　542800)

(1. Department of Mathematics, Hechi University, Yizhou, Guangxi, 546300, China; 2. Department of Mathematics, Hezhou University, Hezhou, Guangxi, 542800, China)

摘要:研究在复合 LINEX 对称损失下,产品寿命分布服从指数分布时,其定数截尾情形下平均寿命的 Bayes 估计,最后通过数值分析来验证该 Bayes 估计的可行性.

关键词:寿命分布　平均寿命　定数截尾　复合 LINEX 对称损失函数　Bayes 估计

中图法分类号:O212　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2010)03-0202-04

Abstract: The Bayes estimation was used to study the average life expectancy of products that subject to exponential distribution under Type-Ⅱ Censoring Test. Numerical examples were examined to verify the applicability and feasibility of our Bayes estimates method.

Key words: life distribution, average life expectancy, type-Ⅱ censoring test, composite LINEX loss of symmetry, Bayes estimation

许多产品的寿命分布服从指数分布,因此通过对产品平均寿命的研究,不仅可以提高产品质量和经济效益,而且可以推动可靠性在应用概率与应用数理统计中的发展.因此当产品寿命分布服从指数分布时,对其平均寿命的研究具有比较重要的理论意义和实际价值.

文献[1,2]在平方损失函数下研究了几何分布可靠度的多层 Bayes 估计和截尾 Bayes 估计;熊常伟等[3]研究了熵损失函数下几何分布的密度函数为幂分布情形时的多层 Bayes 估计,并进一步证明在熵损失函数下计算出的几何分布可靠度的多层 Bayes 估计值比其在平方损失函数下算出的结果更精确;韩明[4]对指数分布无实效数据进行了 Bayes 估计.在统计决策问题中,参数估计的优劣性在很大程度上依赖于损失函数形式的选择,因此有必要对不同的损失函数下参数估计的性质进行研究,张睿[5]研究了在复合 LINEX 损失下正态分布及指数分布的参数估计.本文主要研究在复合 LINEX 对称损失下,产品寿命分布服从指数分布时,其定数截尾情形下平均寿命的 Bayes 估计,并举出具体的数值例子说明其应用性,通过数值分析来验证该 Bayes 估计的可行性.

1　预备知识

当非负随机变量 T 密度函数

$$f(t|\theta)=\theta e^{-\theta t},0\leqslant t,\theta>0. \tag{1}$$

则称 T 遵从参数 θ 的指数分布.当产品寿命分布服从参数为 θ 指数分布时,我们称 θ 为该批产品的失效率,而 $\frac{1}{\theta}$ 为产品的平均寿命[6].

文献[5]提出的复合 LINEX 对称损失函数的表达形式为

$$L(\theta,\delta)=L_a(\theta,\delta)+L_{-a}(\theta,\delta)=e^{-a(\theta-\delta)}+e^{a(\theta-\delta)}-2,a>0. \tag{2}$$

很显然该损失函数是非负的,且由复合 LINEX 对称损失函数的分布曲线(图 1)知,该损失函数是严格凸函数.事实上由于 $L(\theta,\delta)=e^{-a(\theta-\delta)}+e^{a(\theta-\delta)}-2\geqslant 2\sqrt{(e^{-a(\theta-\delta)})(e^{a(\theta-\delta)})}-2=0$,所以损失函数是非负的.又在(2)式中对 δ 求偏导得

$$L'(\theta,\delta)=ae^{-a(\theta-\delta)}-ae^{a(\theta-\delta)},$$

收稿日期:2009-10-19

修回日期:2010-01-18

作者简介:赵丽棉(1964-),女,副教授,主要从事数学与应用数学教学与研究。

* 广西自然科学基金项目(200991265),河池学院重点学科项目(200725)资助。

任取 $0 < \delta_1 < \delta_2$，则有

$$L'(\theta,\delta_1) - L'(\theta,\delta_2) = a(e^{-a(\theta-\delta_1)} - e^{-a(\theta-\delta_2)} + e^{a(\theta-\delta_2)} - e^{a(\theta-\delta_1)}) < 0. \quad (3)$$

即 $L'(\theta,\delta_1) - L'(\theta,\delta_2) < 0$，所以对称损失函数 $L(\theta,\delta)$ 关于 δ 是严格凸函数.

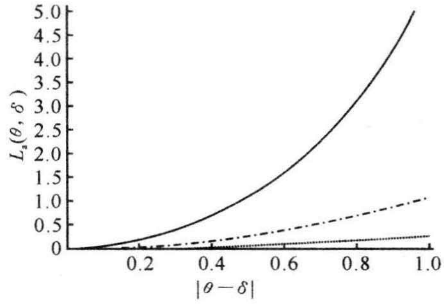

图 1 复合 LINEX 对称损失函数

Fig. 1 Compound LINEX symmetric loss function

……：$a=0.5$；-·-·-：$a=1$；——：$a=2$.

2 平均寿命 $\frac{1}{\theta}$ 的 Bayes 估计

定理 1 在复合 LINEX 对称损失函数(2)下，对任何先验分布 $\pi(\theta)$，θ 的 Bayes 估计为

$$\delta(t) = \frac{1}{2a}\ln(E(e^{a\theta}|t)/E(e^{-a\theta}|t)). \quad (4)$$

证明 设 $\delta(t)$ 为 θ 的任一估计，在损失函数(2)下，由定义得 $\delta(t)$ 的 Bayes 风险为

$$E[L(\theta,\delta)] = E\{E[L(\theta,\delta)]|t\} = E\{E[e^{-a(\theta-\delta)} + e^{a(\theta-\delta)} - 2]|t\}. \quad (5)$$

(5) 式左端 $E[L(\theta,\delta)]$ 表示的是关于 θ 与样本 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 的联合分布取期望，所以要求 θ 的 Bayes 解，只要求极小化 $E\{[e^{-a(\theta-\delta)} + e^{a(\theta-\delta)} - 2]|t\}$ 即可. 令

$$g(\delta) = E\{[e^{-a(\theta-\delta)} + e^{a(\theta-\delta)} - 2]|t\} = e^{a\delta}E(e^{-a\theta}|t) + e^{-a\delta}E(e^{a\theta}|t) - 2. \quad (6)$$

再对(6)式关于 δ 求导并令其等于 0，即

$$g'(\delta) = ae^{a\delta}E(e^{-a\theta}|t) - ae^{-a\delta}E(e^{a\theta}|t) = 0, \quad (7)$$

解得 $\delta(t) = \frac{1}{2a}\ln(E(e^{a\theta}|t)/E(e^{-a\theta}|t))$. 事实上由函数 $g(\delta)$ 自身的性质知，函数 $g(\delta)$ 是严格凸函数，因为对任取的 $0 < \delta_1 < \delta_2$ 有

$$g'(\delta_1) - g'(\delta_2) = aE(e^{-a\theta}|t)(e^{a\delta_1} - e^{a\delta_2}) - aE(e^{a\theta}|t)(e^{-a\delta_1} - e^{-a\delta_2}) < 0. \quad (8)$$

所以函数 $g(\delta)$ 是关于 δ 的严格凸函数. 从而知 $\delta(x)$ 是函数 $g(\delta)$ 唯一的极小值点，所以 θ 的 Bayes 解为

$$\delta(t) = \frac{1}{2a}\ln(E(e^{a\theta}|t)/E(e^{-a\theta}|t)).$$

现假定 t 的分布函数为 $F(t)$，$t_1,t_2,\cdots,t_n$ 为来自于分布 $F(t)$ 的一组随机样本. 考虑定数截尾试验，进行到有 r 个产品(r 事先指定，$r<n$)失效时试验终止，获得 r 个观察值，$t_{(1)} \leqslant t_{(2)} \cdots \leqslant t_{(n)}$(为方便起见将 $t_{(1)}$ 的下标数字省略括号). 记 $t = (t_1,t_2\cdots,t_r)$，则由(1)式得 $(t_1,t_1,\cdots,t_r)$ 的联合密度函数为

$$L(\theta|t) = \frac{n!}{(n-r)!}\theta^r e^{-\theta T_r}, \quad (9)$$

其中 $T_r = \sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r)t_r$ 称为总试验时间. 定理 1 证明完毕.

定理 2 在复合对称损失函数(2)下，对于先验分布为 $\Gamma(\alpha,\lambda)$，寿命分布(指数分布)参数 θ 的 Bayes 估计为

$$\delta_B(x) = \frac{n+\alpha}{2a}\ln(\frac{T_r+\lambda+a}{T_r+\lambda-a}).$$

证明 参数 θ 的后验密度为

$$H(\theta|x) = \frac{L(X|\theta)\pi(\theta;\alpha,\lambda)}{\int_0^\infty L(X|\theta)\pi(\theta;\alpha,\lambda)\mathrm{d}\theta} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}\theta^r e^{-\theta T_r}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\lambda\theta}}{\int_0^\infty \frac{n!}{(n-r)!}\theta^r e^{-\theta T_r}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\lambda\theta}\mathrm{d}\theta} =$$

$$\frac{\theta^{r+\alpha-1}e^{-(T_r+\lambda)\theta}}{\int_0^\infty \frac{[\theta(T_r+\lambda)]^{r+\alpha-1}e^{-(T_r+\lambda)\theta}}{(T_r+\lambda)^{r+\alpha}}\mathrm{d}(T_r+\lambda)\theta} =$$

$$\frac{(T_r+\lambda)^{r+\alpha}}{\Gamma(r+\alpha)}\theta^{r+\alpha-1}e^{-(T_r+\lambda)\theta}. \quad (10)$$

则

$$E(e^{-a\theta}|X) = \int_0^\infty e^{-a\theta}\frac{(T_r+\lambda)^{r+\alpha}}{\Gamma(r+\alpha)}\theta^{r+\alpha-1}e^{-(T_r+\lambda)\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{(T_r+\lambda)^{r+\alpha}}{\Gamma(r+\alpha)}\int_0^\infty \theta^{r+\alpha-1}e^{-(T_r+\lambda+a)\theta}\mathrm{d}\theta =$$

$$\frac{(T_r+\lambda)^{r+\alpha}}{(T_r+\lambda+a)^{r+\alpha}\Gamma(r+\alpha)}\int_0^\infty [(T_r+\lambda+a)\theta]^{r+\alpha-1}e^{-(T_r+\lambda+a)\theta}\mathrm{d}(T_r+\lambda+a)\theta = (\frac{T_r+\lambda}{T_r+\lambda+a})^{r+\alpha}. \quad (11)$$

同理可得

$$E(e^{a\theta}|X) = (\frac{T_r+\lambda}{T_r+\lambda-a})^{r+\alpha}. \quad (12)$$

故由定理 1 得，失效率 θ 的 Bayes 估计

$$\delta(t) = \frac{1}{2a}\ln[(\frac{T_r+\lambda}{T_r+\lambda-a})^{r+\alpha}/(\frac{T_r+\lambda}{T_r+\lambda+a})^{r+\alpha}] = \frac{r+\alpha}{2a}\ln(\frac{T_r+\lambda+a}{T_r+\lambda-a}).$$

则可靠度 $\frac{1}{\theta}$ 的 Bayes 估计

$$\delta(\frac{1}{\theta}) = \frac{1}{\delta(t)} = \frac{2a}{(r+\alpha)\ln(\frac{T_r+\lambda+a}{T_r+\lambda-a})}.$$

定理 2 证明完毕.

3 数值举例

例 设某元件的寿命分布服从参数为 θ 的指数

分布，对 74 个元件在 300℃条件下进行高温贮存试验，直到所有的元件失效，失效时间如表 1 所示.

表 1 元件失效时间

Table 1 Component failure time

失效时间 Failure time(h)	失效数 Invalid number	失效时间 Failure time(h)	失效数 Invalid number
1	5	22	11
3	4	41	13
6	14	73	4
13	23		

根据表 1 的数据用本文所给出的指数分布可靠度 $\frac{1}{\theta}$ 的 Bayes 估计，试求出此种元件在 300℃ 下的可靠度 $\frac{1}{\theta}$ 的 Bayes 估计.

解 由频率学的观点知此种元件在 300℃下的平均寿命 $\overline{T}=\frac{1467}{74}=19.8243$h. 在这里我们通过数据模拟来求出此种元件在 300℃下的平均寿命 $\frac{1}{\theta}$ 的 Bayes 估计.

(1)完全寿命试验 ($r=n$)：在完全寿命试验下，表 2 的估计值都比较接近于频率学所得到的估计值，从统计决策精确度的角度分析，其估计值精确度较高；从表 2 中的极差值可以看出，平均寿命的 Bayes 估计值之间都比较接近，符合统计决策中的稳健性. 超参数的取值直接影响到估计值的精确度及稳健性，所以结合表 2 从统计决策的精确度及稳健性的角度去考虑，超参数 α 的取值不宜过大，在[0.1,0.2]之间取值比较合适，超参数 λ 的取值也不宜过大，在[0.5,4.5]之间取值比较合适.

(2)截尾寿命试验 ($r<n$)：在截尾寿命试验中，当 r 越小所需要的试验时间越少，但是 r 越小也意味着对产品样本量的检验也越少，从而导致试验结果的精确度不高. 因此，从试验的时间和试验结果的精确度两方面去考虑，就必须选择合适的结尾时机，即 r 的确定. 通过大量的数据模拟分析，在这里选取 $r=58$，因为如果 $r<58$，则导致试验结果偏差过大，反之 $r>58$，则导致试验时间过长. 在取 $r=58$ 的前提下，通过数据模拟分析得出表 3 的结果.

表 2 完全寿命试验下平均寿命的 Bayes 估计($a=2,r=n$)

Table 2 Average life expectancy of Bayes estimates($a=2,r=n$)by full life test

λ	估计值 Estimate							极差 Poor
	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.3$	$\alpha=0.45$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.8$	$\alpha=0.95$	
0.5	19.8043	19.7776	19.7510	19.7112	19.6716	19.6190	19.5797	0.2246
1	19.8111	19.7844	19.7577	19.7179	19.6783	19.6257	19.5864	0.2247
2	19.8245	19.7978	19.7712	19.7314	19.6917	19.6390	19.5997	0.2248
3.5	19.8448	19.8180	19.7914	19.7515	19.7118	19.6591	19.6197	0.2251
4.5	19.8583	19.8315	19.8048	19.7649	19.7252	19.6724	19.6331	0.2252
6	19.8785	19.8517	19.8250	19.7851	19.7453	19.6925	19.6531	0.2254
极差 Poor	0.0742	0.0741	0.0740	0.0739	0.0737	0.0735	0.0734	0.0008

表 3 截尾寿命试验下平均寿命的 Bayes 估计($a=2,r=58$)

Table 3 Average life expectancy of Bayes estimates($a=2,r=58$)by censored test

λ	估计值 Estimate							极差 Poor
	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.3$	$\alpha=0.45$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.8$	$\alpha=0.95$	
1	22.6966	22.6983	22.7000	22.7025	22.7051	22.7085	22.7110	0.0019
4.5	21.4256	21.4272	21.4286	21.4312	21.4336	21.4369	21.4392	0.0136
7	20.6015	20.6031	20.6046	20.6069	20.6092	20.6123	20.6146	0.0131
极差 Poor	2.0951	2.0952	2.0954	2.0956	2.0959	2.0962	2.0964	0.0112
9	19.9866	19.9880	19.9895	19.9918	19.9940	19.9970	19.9992	0.0126
9.3	19.8975	19.8989	19.9004	19.9027	19.9049	19.9079	19.9101	0.0126
9.5	19.8385	19.8400	19.8415	19.8437	19.8459	19.8489	19.8511	0.0126
9.7	19.7799	19.7814	19.7829	19.7851	19.7873	19.7902	19.7925	0.0126
9.9	19.7216	19.7231	19.7246	19.7268	19.7290	19.7319	19.7342	0.0126
10	19.6927	19.6941	19.6956	19.6978	19.7000	19.7029	19.7051	0.0124
极差 Poor	0.2939	0.2939	0.2939	0.2940	0.2940	0.2941	0.2941	0.0002

从表 3 中的极差值可以看出，当超参数 $\lambda \in [9, 10]$，截尾寿命试验下产品平均寿命的 Bayes 估计值之间都比较接近，符合统计决策中的稳健性，结合表 3 从统计决策的精确度及稳健性的角度去考虑，超参数 α 的取值不宜过大，在$[0.1, 0.9]$之间取值比较合适，估计值随超参数 λ 的增大而减小，所以对 λ 取值不宜过大也不宜过小，应根据实际情况适当选取(如：本例题中 λ 在$[9,10]$上取值比较合适).

4 结束语

从统计决策精确性与稳健性的角度分析，在完全寿命试验与截尾寿命试验下，产品的平均寿命的 Bayes 估计值在适当的选取超参数 λ,α 值的情况下都比较稳健且精确度也很高，所以运用 Bayes 估计与截尾寿命试验的思想方法来解决产品的平均寿命问题是可行的. 另一方面，通过截尾寿命试验可以大大的缩短产品试验的时间，从而提高生产效率，提高经济效益.

参考文献：

[1] 韩明，催玉萍. 几何分布可靠度估计[J]. 运筹与管理，2001，10(4)：35-38.

[2] 赵喜林. 几何分布可靠度的截尾 Bayes 估计[J]. 武汉科技大学学报，2004，3(1)：93-95.

[3] 熊常伟，张德然，张怡. 熵损失函数下几何分布可靠度的 Bayes 估计[J]. 数理统计与管理，2008，27(1)：82-86.

[4] 韩明. 指数分布无失效数据的 Bayes 分析[J]. 宁波大学学报，1996，9(4)：59-61.

[5] 张睿. 复合 LINEX 损失下的参数估计[D]. 大连：大连理工大学，2007.

[6] 峁诗松，汤银才，王玲玲. 可靠性统计[M]. 北京：高等教育出版社，2008.

(责任编辑：韦廷宗)

(上接第 201 页 Continue from page 201)

由假设条件 $\rho(n) \ll (\log\log n)^{-1-\sigma}(\sigma > 0)$，可得

$$\sum\nolimits_{21} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\log^{\alpha} l}{l} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\rho(k)\log^{\alpha} k}{k} \ll \sum_{l=1}^{n} \frac{\log^{\alpha} l}{l} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\log^{\alpha} k}{k(\log\log k)^{1+\sigma}} \ll \sum_{l=1}^{n} \frac{\log^{2\alpha+1} l}{l(\log\log l)^{1+\sigma}} \ll \frac{\log^{2\alpha+2} n}{(\log\log n)^{1+\sigma}}. \tag{18}$$

又因为

$$\sum\nolimits_{22} \ll \frac{1}{(\log\log n)^2} \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n \\ k(\log\log n)^{\frac{2}{r}} < l}} \frac{\log^{\alpha} k \log^{\alpha} l}{kl} \ll \frac{1}{(\log\log n)^2} \sum_{l=1}^{n} \frac{\log^{\alpha} l}{l} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\log^{\alpha} k}{k} \ll \frac{\log^{2\alpha+2} n}{(\log\log n)^2}. \tag{19}$$

综合(17) ~ (19) 式可得

$$\sum\nolimits_{2} \ll \frac{\log^{2\alpha+2} n}{(\log\log n)^{\beta}}, \tag{20}$$

其中 $\beta = 2 \wedge (1+\sigma) > 1$.

由(13) 式，(16) 式和(20) 式，可得

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{\log^{\alpha+1} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\log^{\alpha} k}{k} \xi_k\right) = \left(\frac{1}{\log^{2\alpha+2} n} \cdot \mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\log^{\alpha} k}{k} \xi_k\right) \ll \frac{1}{\log^{2\alpha+2} n}\left((\log\log\log n)\log^{2\alpha+1} n + \frac{\log^{2\alpha+2} n}{(\log\log n)^{\beta}}\right) = \frac{\log\log\log n}{\log n} + \frac{1}{(\log\log n)^{\beta}} \ll \frac{1}{(\log\log n)^{\beta}}.$$

即(8) 式成立.

当 $\alpha = -1$ 时，同理可证结论成立.

参考文献：

[1] Brosamler G A. An almost everywhere central limit theorem[J]. Math Proc Camb Phil Soc，1988，104：561-574.

[2] Schatte P. On strong version of the central limit theorem [J]. Math Nachr，1988，137：249-256.

[3] Lacey M T，Philipp W. A note on the almost limit theorem[J]. Statist Probab Lett，1990，9：201-205.

[4] Peligard M，Shao Q M. A note on the almost sure central limit theorem[J]. Statist Prolab Lett，1995，22：131-136.

[5] Shao Q M. Maximal inequalities for sums of ρ-mixing sequences[J]. Ann Prob，1995，23：948-965.

[6] Hu T C，Rosalsky A，Volodin A I. On the golden ratio，strong law，and first passage problem[J]. Mathematical Scientist，2005，16：1-10.

[7] 陆传荣，林正炎. 混合相依变量的极限理论[M]. 北京：高等教育出版社，1999.

[8] Billingsley P. Convergence of probability measures[M]. Wiley，New York：Stochastic Processes & Their Appl，1999：139-148.

[9] Peligrad M，Shao Q M. A note on the almost sure central limit theorem for weakly dependent random variables [J]. Statist Probab Lett，1995，22：131-136.

(责任编辑：尹　闯)