

# 二元样条空间 $S_3^1(\Delta_{CT})$ 的局部 Lagrange 插值\* Local Lagrange Interpolation for Bivariate Spline Space $S_3^1(\Delta_{CT})$

范乐乐, 钟 华

FAN Le-le, ZHONG Hua

(河池学院数学系, 广西宜州, 546300)

(Department of Mathematics, Hechi Institute, Yizhou, Guangxi, 546300, China)

**摘要:**采用 B 网方法, 构造样条函数空间  $S_3^1(\Delta_{CT})$  的一个 Lagrange 插值点集  $P$ , 并相应地给出一组具有局部支集的 Lagrange 基样条, 其中  $\Delta_{CT}$  为 Clough-Tocher 加密.

**关键词:**Lagrange 插值点集 Lagrange 基样条 局部支集 Clough-Tocher 加密

**中图法分类号:**O241 **文献标识码:**A **文章编号:**1005-9164(2010)03-0218-05

**Abstract:** Using B net method, a local Lagrange interpolation point set  $P$  of spline function space  $S_3^1(\Delta_{CT})$  is constructed, where  $\Delta_{CT}$  is the Clough-Tocher refining triangulation, and a set of locally supported Lagrange basis is also given.

**Key words:** Lagrange interpolation point set, Lagrange basis, local support, Clough-Tocher refinement

设  $\Delta$  为平面多边形区域  $\Omega$  的正规三角剖分, 定义  $\Delta$  上的二元  $d$  次  $r$  阶光滑样条函数空间:

$$S_d^r(\Delta) := \{s \in C^r(\Omega) : s|_T \in P_d, \forall T \in \Delta\}. \quad (1)$$

考虑空间  $S_d^r(\Delta)$  的 Lagrange 插值问题: 对任意数组  $\{z_i\}_{i=1}^M, M = \dim S_d^r(\Delta)$ , 寻求函数  $s \in S_d^r(\Delta)$  和  $\Omega$  上的点组  $\{\zeta_i\}_{i=1}^M$ , 使满足:

$$s(\zeta_i) = z_i, i = 1, 2, \dots, M. \quad (2)$$

如果此插值问题存在唯一解, 则称  $P := \{\zeta_i\}_{i=1}^M$  为空间  $S_d^r(\Delta)$  的 Lagrange 插值点集, 称  $S_d^r(\Delta)$  和  $P$  为 Lagrange 插值对.

在一般情况下, 我们往往要求样条空间  $S_d^r(\Delta)$  的 Lagrange 插值点集是局部的, 也就是说,  $S_d^r(\Delta)$  的 Lagrange 插值基函数具有局部支集. 当光滑度  $r = 1$  时, 文献[1] 给出空间  $S_2^1(\Delta_{PS1})$  的一个 Lagrange 插值点集, 其中  $\Delta_{PS1}$  为 Powell-Sabin(I) 型加密三角剖分. 文献[2] 采用着色法, 给出空间  $S_3^1(\Delta_Q)$  的局部 Lagrange 插值点集, 其中  $\Delta_Q$  为三角化凸四边形剖

分; 文献[3] 同样采用着色法将  $\Delta$  中的三角形分成黑白两类, 对其中黑色三角形进行 Clough-Tocher 加密后得到  $\bar{\Delta}$ , 然后给出空间  $S_3^1(\bar{\Delta})$  的局部 Lagrange 插值点集.

本文考虑 Clough-Tocher 加密三角剖分  $\Delta_{CT}$  上样条空间  $S_3^1(\Delta_{CT})$  的局部 Lagrange 插值. 给出算法 1 和算法 2, 算法 1 用于对三角形进行着色, 算法 2 用于构造  $\Delta_{CT}$  上的一个点集  $P$ , 并且证明集合  $P$  为  $S_3^1(\Delta_{CT})$  的 Lagrange 插值点集,  $S_3^1(\Delta)$  的 Lagrange 基函数具有局部支集.

## 1 预备知识

任意给定一个三角剖分  $\Delta$ , 对于任意  $s \in S_d^r(\Delta)$ , 它在三角形  $T := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$  上可表示为 Bernstein-Bézier 多项式的形式:

$$s|_T = \sum_{i+j+k=d} c_{ijk}^T B_{ijk}^d, \quad (3)$$

其中  $B_{ijk}^d$  为 Bersrein 多项式,  $c_{ijk}^T$  称为  $s$  相应于区域点  $\zeta_{ijk}^T := (iv_1 + jv_2 + kv_3)/d$  的 B 网系数.

给定整数  $0 \leq m < d$ , 定义如下集合:

$$D^T := \{\zeta_{ijk}^T : i + j + k = d\}, \quad (4)$$

$$R_m^T(v_1) := \{\zeta_{ijk}^T : i = d - m\}, \quad (5)$$

$$D_m^T(v_1) := \{\zeta_{ijk}^T : i \geq d - m\}, \quad (6)$$

收稿日期: 2010-04-23

作者简介: 范乐乐(1983-), 女, 助教, 主要从事多元样条函数及其逼近的研究.

\* 广西教育厅科研项目(200911LX397)资助.

$R_m(v_1) = \cup \{R_m^T(v_1) : T \text{ 为 } \triangle \text{ 中以 } v_1 \text{ 为顶点的三角形}\}$ , (7)

$D_m(v_1) = \cup \{D_m^T(v_1) : T \text{ 为 } \triangle \text{ 中以 } v_1 \text{ 为顶点的三角形}\}$ . (8)

**定义 1**<sup>[2]</sup> 记  $C := \langle T_1, T_2, \dots, T_m \rangle$  为  $\triangle$  中一些三角形的集合, 若它满足如下两个条件:

- (1)  $T_i$  与  $T_{i+1}$  相邻,  $i = 1, 2, \dots, m-1$ ,
- (2) 除去  $T_1$  和  $T_m$  相邻的情况外, 当  $|j-i| > 1$  时,  $T_j$  与  $T_i$  不相邻,  $i, j = 1, 2, \dots, m$ ,

则称  $C$  为链. 若  $T_1$  和  $T_m$  相邻, 称  $C$  是闭合的. 当  $m$  为奇数时, 称  $C$  为奇链, 反之, 称它为偶链. 对于  $T_i$ , 若  $i$  为奇数, 称  $T_i$  为奇三角形, 反之, 称它为偶三角形.

## 2 算法

**算法 1** 先用黑白两种颜色对  $\triangle$  中的任意三角形进行着色, 然后重复以下两步, 直到对于每个三角形, 在与它相邻的三角形中至多有两个与它具有相同的颜色.

- (1) 选择一个三角形, 存在 3 个三角形与它相邻, 且与它具有相同的颜色;
- (2) 改变它的颜色.

容易看出, 算法 1 中每执行一步, 由同种颜色三角形所共有的边就会减少 3 条. 因为  $\triangle$  的边数是有限的, 所以算法必会终止. 这样, 剖分  $\triangle$  中的每个三角形都包含在一条白色或黑色的链中, 如图 1 所示.

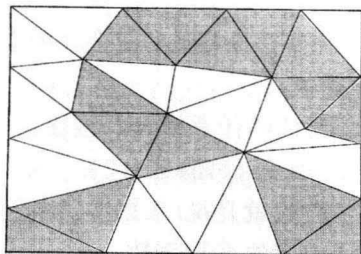


图 1 用算法 1 对  $\triangle$  进行着色的一种方式

Fig. 1 A coloring method of  $\triangle$  using algorithm 1

任意给定一个三角剖分  $\triangle$ , 用算法 1 对它着色后, 然后对所有三角形进行 Clough-Tocher 加密可得到新的剖分, 记为  $\triangle_{CT}$ . 再通过算法 2, 构造  $\triangle_{CT}$  上的一个点集  $P$ .

**算法 2** 令集合  $P = \emptyset$ .

(1) 定义三角剖分  $\triangle$  的所有顶点为未被标记的.

(2) 对于  $l = 3, 2, 1$ , 尽可能地重复下列过程: 如果  $\triangle$  中某个三角形  $T$  有  $l$  个未被标记的顶点  $v_i (i = 1, 2, \dots, l)$ , 则选择  $D_1^T(v_i)$  内的 3 个区域点, 并增加到  $P$  中, 标记  $v_i$ .

(3) 对于  $\triangle$  中任意一条黑色链  $C := \langle T_1, T_2,$

$\dots, T_m \rangle$ , 按如下步骤在其中每个三角形  $T_i, i = 1, 2, \dots, m$ , 的内部选点, 并增加到  $P$  中.

1) 除去闭合奇链中的三角形  $T_m$ , 在  $C$  的每个奇三角形  $T_i$  中选择一个三角形  $\bar{T}$ , 选取  $D_1^T(u)$  内的 3 个区域点, 其中  $u$  为  $T_i$  的内心.

2) 对于闭合奇链中的三角形  $T_m$ , 称  $e := T_1 \cap T_m$  为  $T_m$  的决定边, 记  $T_m$  中  $e$  所在的小三角形为  $\bar{T}$ , 选取  $T_m$  的内心  $u$  和  $R_1^T(u)$  内的 1 个区域点.

3) 对所有偶三角形  $T_i$ , 令  $k$  为  $\triangle$  中与它相邻的黑色奇三角形的个数, 称它与相邻黑色奇三角形的公共边为它的决定边. 当  $k = 1$  时, 记  $T_i$  中决定边所在的小三角形为  $\bar{T}$ , 选取  $T_i$  的内心  $u$  和  $R_1^T(u)$  内的 1 个区域点; 当  $k = 2$  时, 选取内心  $u$ .

(4) 对于  $\triangle$  中任意一条白色的链  $C := \langle T_1, T_2, \dots, T_m \rangle$ , 按如下步骤在其中每个三角形  $T_i, i = 1, 2, \dots, m$ , 的内部选点, 并增加到  $P$  中.

1) 除去闭合奇链中的奇三角形  $T_m$ , 对于每个奇三角形  $T_i$ , 令  $k$  为  $\triangle$  中与它相邻的黑色三角形的个数, 称邻边为它的决定边. 当  $k = 0$  时, 在  $T_i$  中选择一个三角形  $\bar{T}$ , 并在  $T_i$  的内心  $u$  处选取  $D_1^T(u)$  内的 3 个区域点; 当  $k = 1$  时, 在  $T_i$  中选择决定边所在的小三角形  $\bar{T}$ , 并选取  $T_i$  的内心  $u$  和  $R_1^T(u)$  内的 1 个区域点; 当  $k = 2$  时, 选取内心  $u$ ; 当  $k = 3$  时, 不选点.

2) 对于闭合奇链中的奇三角形  $T_m$ , 令  $k$  为  $\triangle$  中与它相邻的黑色三角形和白色奇三角形 ( $T_1$ ) 的个数, 称邻边为它的决定边. 当  $k = 1, 2$  时, 按 (4) 中 1) 所示方式选点.

3) 对每个偶三角形  $T_i$ , 令  $k$  为  $\triangle$  中与它相邻的黑色三角形和白色奇三角形的个数, 称邻边为它的决定边. 当  $k = 1, 2, 3$  时, 按 (4) 中 1) 所示方式选点.

由算法 2 可知, 若  $\triangle$  中某个三角形  $T$  的决定边条数为  $k$ , 则在它的内部适当选取  $3-k$  个点, 选取方式如图 2 所示.

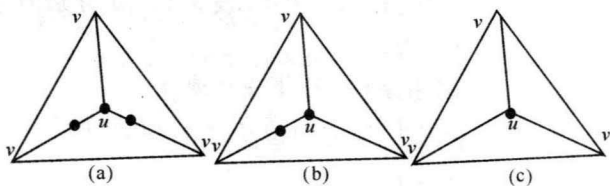


图 2  $T$  的决定边条数  $k$  分别为 0, 1, 2 时,  $3-k$  个插值点的选取方式

Fig. 2 Choice of  $3-k$  interpolation points, when the number of determining edges for  $T$  is separately  $k = 0, 1, 2$ .

●: 插值点. ●: Interpolation points.

(a)  $k = 0$ ; (b)  $k = 1$ ; (c)  $k = 2$ .

对于黑色链中的每个奇三角形 (不包括闭合奇链中的三角形  $T_m$ ), 可以认为它的决定边条数为 0. 很显然,

$$|P| = M = 3V + E = \dim S_3^1(\Delta_{CT}), \quad (9)$$

其中,  $V$  为原三角剖分  $\Delta$  的顶点的个数,  $E$  为  $\Delta$  的边的条数.

### 3 $S_3^1(\Delta_{CT})$ 的 Lagrange 插值点集

**注释 1**<sup>[2]</sup> 设  $p$  为区间  $[a, b]$  上的一个三次多项式, 若  $p(a) = z_0, p(b) = z_3$ , 则  $p$  可以写为:

$$p(x) = z_0(b-x)^3 + 3c_1(x-a)(b-x)^2 + 3c_2(x-a)^2(b-x) + z_3(x-a)^3/h^3, \quad (10)$$

其中  $h = b - a$ . 若  $p$  还满足  $p(t_1) = z_1, p(t_2) = z_2$ , 则系数  $c_1, c_2$  可被唯一确定, 其中  $t_1 = a + \frac{1}{3}h, t_2 = a + \frac{2}{3}h$ . 若已知  $c_1$ , 由  $p(t_2) = z_2$  可得到  $c_2 = 27z_2 - z_0 - 6c_1 - 8z_3/12$ .

**定理 1** 给定三角形  $T := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ , 将它的内心  $u$  与各个顶点连接起来后, 得到剖分  $T_{CT}$ . 规定  $v_4 = v_1$ . 记  $T_i := \langle v_{i+1}, u, v_i \rangle (i = 1, 2, 3), T_i$  的中点  $\zeta_{T_i}$  为  $T_i$  中  $B$  网系数为  $c_{111}$  的区域点,  $A_E$  为位于  $T$  的边上 9 个区域点的集合. 定义如下 4 个集合:

$$M_1 := \{\zeta_{T_1}, \zeta_{T_2}, \zeta_{T_3}\}, M_2 := \{\zeta_{T_1}, \zeta_{T_2}, u\},$$

$$M_3 := \{\zeta_{T_1}, u, (2u + v_1)/3\}, M_4 := \{u, (2u + v_1)/3, (2u + v_2)/3\},$$

则当  $l = 1, 2, \dots, 4$  时, 集合  $A_l := A_E \cup M_l$  为样条空间  $S_3^1(T_{CT})$  的最小决定集.

**证明** 假设  $v_3$  关于  $T_1$  的重心坐标为  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), v_2$  关于  $T_3$  的重心坐标为  $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), v_1$  关于  $T_2$  的重心坐标为  $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ , 则  $v_3 = \alpha_1 v_2 + \beta_1 u + \gamma_1 v_1, v_2 = \alpha_2 v_1 + \beta_2 u + \gamma_2 v_3, v_1 = \alpha_3 v_3 + \beta_3 u + \gamma_3 v_2$ , 其中  $\alpha_i < 0, \gamma_i < 0, \beta_i > 0, i = 1, 2, 3$ .

考虑集合  $A_3$ . 对于某样条函数  $s \in S_3^1(T_{CT})$ , 若  $s$  相应于  $A_3$  中的区域点对应的  $B$  网系数为零, 则  $T$  中只有 4 个区域点对应的  $B$  网系数可能不为零, 分别记为  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , 如图 3(c) 所示. 设  $a, b, c, d$  分别为它们对应的  $B$  网系数.

根据  $C^1$  光滑条件, 以下 4 式成立:

$$\gamma_1 a = 0, \beta_2 b + \gamma_2 c = a, \beta_3 d = c, \alpha_2 b + \gamma_2 d = 0.$$

所以  $a = 0, \beta_2 b + \gamma_2 c = \beta_2 b + \gamma_2 \beta_3 d = (\gamma_2 \beta_3 - \frac{\beta_2 \gamma_2}{\alpha_2}) d = 0$ . 又因为  $\alpha_2 \gamma_2 \beta_3 - \beta_2 \gamma_2 = \gamma_2 (\alpha_2 \beta_3 - \beta_2) \neq 0$ , 所以  $d = 0, b = c = 0$ . 因为  $\dim S_3^1(T_{CT}) = |T_3| = 12$ , 故  $A_3$  为  $S_3^1(T_{CT})$  的最小决定集.

对于集合  $A_4$  来说, 若样条函数  $s$  相应于  $A_4$  中的点对应的  $B$  网系数都为零, 则区域中只有 4 个区域点对应的  $B$  网系数可能不为零, 同样记为  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , 如图 3(d) 所示. 设  $a, b, c, d$  为分别为它们对应的  $B$  网

系数.

根据  $C^1$  光滑条件, 以下 4 式成立:

$$c = 0, \gamma_1 b = a, \beta_2 c + \gamma_2 d = b, \gamma_3 a = d.$$

所以  $b = \gamma_2 d = \gamma_2 \gamma_3 a = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 b$ , 即  $(1 - \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3) b = 0$ . 因为  $1 - \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \neq 0$ , 所以  $b = 0, a = d = 0$ . 因此,  $A_4$  为  $S_3^1(T_{CT})$  的最小决定集.

根据  $C^1$  光滑条件, 可将集合  $A_1, A_2$  转化为  $A_3$  或  $A_4$  的情形来考虑, 同样可以证明它们为空间  $S_3^1(T_{CT})$  的最小决定集.

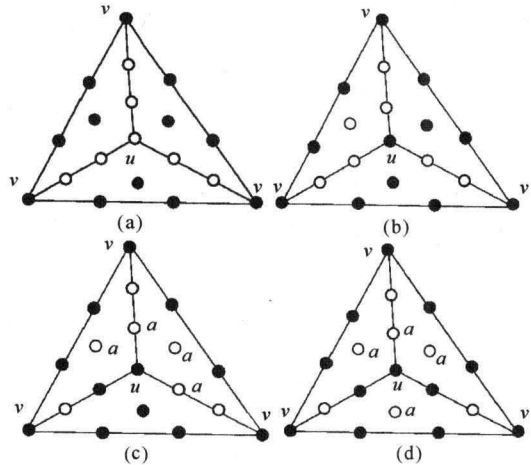


图 3 空间  $S_3^1(T_{CT})$  的 4 种最小决定集 (a), (b), (c), (d).

Fig. 3 Four minimal determining sets (a), (b), (c), (d) of  $S_3^1(T_{CT})$

●: 最小决定集中的点. ●: Points in minimal determining sets.

**定理 2** 由算法 2 构造的集合  $P$  为空间  $S_3^1(\Delta_{CT})$  的 Lagrange 插值点集.

**证明** 要证明任意给定一组数  $\{z_i\}_{i=1}^M$ , 存在唯一的函数  $s \in S_3^1(\Delta_{CT})$ , 满足  $s(\zeta_i) = z_i, i = 1, 2, \dots, M$ , 其中  $\zeta_i \in P$ . 也就是说, 根据插值条件, 可唯一求出所有区域点对应的  $B$  网系数.

先计算位于剖分  $\Delta$  的边上的区域点对应的  $B$  网系数. 根据算法 2,  $\Delta$  中的三角形可以分为 4 类, 记为  $\Delta_l (l = 0, 1, 2, 3)$ . 若  $T \in \Delta_l$ , 则在执行算法 2 中 (1) ~ (2) 的过程中, 它有  $l$  个未被标记的顶点. 设  $T := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ , 边  $e_i := \langle v_i, v_{i+1} \rangle (i = 1, 2, 3)$ , 它的内心为  $u$ . 规定  $v_4 = v_1$ .

当  $T \in \Delta_3$  时, 根据注释 1, 可以求出每条边上的区域点对应的  $B$  网系数. 因此,  $D_1(v)$  内所有区域点对应的  $B$  网系数都可以被唯一确定, 其中  $v$  为  $\Delta_3$  中任意一个三角形的顶点.

当  $T \in \Delta_2$  时, 它与  $\Delta_3$  中某个三角形具有一个公共顶点, 设为  $v_3$ . 根据注释 1, 可以求出边  $e_1$  上的区域点对应的  $B$  网系数. 对于边  $e_2$  上的区域点, 由于已

知  $D(v_3)$  内的区域点对应的  $B$  网系数, 只有 1 个区域点对应的  $B$  网系数未被确定, 根据注释 1, 它可由插值条件唯一确定. 同样可求出边  $e_3$  上的区域点对应的  $B$  网系数. 因此,  $D_1(v)$  内所有区域点对应的  $B$  网系数都可以被唯一确定, 其中  $v$  为  $\Delta_2$  中任意一个三角形的顶点.

当  $T \in \Delta_1$  时, 它与  $\Delta_2 \cup \Delta_3$  中某些三角形具有两个公共顶点, 设为  $v_2, v_3$ . 由于已知  $D(v_i) (i = 2, 3)$  内所有区域点对应的  $B$  网系数, 所以边  $e_2$  上的区域点对应的  $B$  网系数已被确定. 对于边  $e_i (i = 1, 3)$  来说, 只有 1 个区域点对应的  $B$  网系数未被确定, 它可由此点处的插值条件唯一确定. 因此,  $D_1(v)$  内所有区域点对应的  $B$  网系数都可以被唯一确定, 其中  $v$  为  $\Delta_1$  中任意一个三角形的顶点.

当  $T \in \Delta_0$  时, 它与  $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$  中某些三角形具有 3 个公共顶点, 则位于  $T$  的边上所有区域点对应的  $B$  网系数都已经被确定.

再计算剖分  $\Delta$  中每个三角形  $T$  内部的区域点对应的  $B$  网系数. 设  $k$  为  $T$  的决定边的条数.

当  $k = 0$  时, 对于  $T$  中的某个小三角形  $\bar{T}$ , 可由注释 1 唯一求出  $D_1^{\bar{T}}(u)$  内 3 个区域点对应的  $B$  网系数, 然后根据定理 1 求出  $T$  内剩余区域点对应的  $B$  网系数; 当  $k = 1$  时, 对于  $T$  中决定边所在的小三角形  $\bar{T}$ , 先根据决定边上的  $C^1$  光滑条件求出  $\bar{T}$  的中点  $\zeta_{\bar{T}}$  对应的  $B$  网系数, 再由注释 1 求出  $R_1^{\bar{T}}(u)$  内的 1 个区域点对应的  $B$  网系数, 最后根据定理 1 唯一求出剩余区域点对应的  $B$  网系数; 当  $k = 2$  时, 对于  $T$  中决定边所在的两个小三角形, 根据决定边上的  $C^1$  光滑条件分别求出它们的中点对应的  $B$  网系数. 因为  $u$  的函数值即为它的  $B$  网系数值, 所以根据定理 1 可以求出剩余区域点对应的  $B$  网系数; 当  $k = 3$  时, 对于  $T$  中决定边所在的 3 个小三角形, 根据决定边上的  $C^1$  光滑条件可求出它们的中点对应的  $B$  网系数, 然后根据定理 1 求出剩余区域点对应的  $B$  网系数.

由以上讨论可知, 剖分  $\Delta$  中所有区域点对应的  $B$  网系数都可以被唯一确定. 因此,  $P$  为空间  $S_3^1(\Delta_{CT})$  的 Lagrange 插值点集.

对于图 1 所示三角剖分  $\Delta$ , 空间  $S_3^1(\Delta_{CT})$  的 Lagrange 插值点集  $P$  由“●”和“○”标记的区域点组成 (如图 4).

#### 4 $S_3^1(\Delta_{CT})$ 的 Lagrange 对偶基

**定义 2** 给定点  $\zeta \in P$ , 相应地构造一个函数  $B_\zeta \in S_3^1(\Delta_{CT})$ , 使得  $B_\zeta(\eta) = \delta_{\zeta, \eta}, \zeta, \eta \in P$ , 则称  $B_\zeta$  为空间  $S_3^1(\Delta_{CT})$  的 Lagrange 基函数, 称  $\{B_\zeta\}_{\zeta \in P}$  为空间

$S_3^1(\Delta_{CT})$  的 Lagrange 对偶基. 若  $\text{supp}(B_\zeta) := \{\eta \in \Omega, B_\zeta(\eta) \neq 0\} \subseteq \text{star}^l(T_\zeta)$ , 则称  $B_\zeta$  具有局部支集. 这里,  $T_\zeta \in \Delta$  为  $\zeta$  所在的三角形,  $\text{star}(T)$  是指与  $T$  具有公共顶点的所有三角形的集合, 并且  $\text{star}^l(T_\zeta) = \text{star}^{l-1}(\text{star}(T))$ .

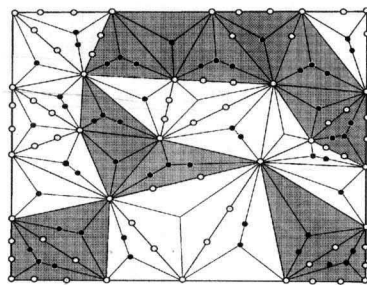


图 4 空间  $S_3^1(\Delta_{CT})$  的 Lagrange 插值点集

Fig. 4 Lagrange interpolation point set for  $S_3^1(\Delta_{CT})$

●: 内部插值点; ○: 边界插值点. ●: Interior interpolation points; ○: Boundary interpolation points.

**定理 3** 给定点  $\zeta \in P$ , 有  $\text{supp}(B_\zeta) \subseteq \text{star}^6(T_\zeta)$ .

**证明** 根据  $\zeta$  所在位置, 分两种情况讨论  $B_\zeta$  的支集为最大的情形.

当  $\zeta$  严格位于  $T_\zeta$  的内部时, 由定理 2 的证明过程可知,  $\Delta$  的边上所有区域点对应的  $B$  网系数都为零. 换句话说,  $D_1(v)$  内的区域点对应的  $B$  网系数都为零, 其中  $v$  为  $\Delta$  中任意一个三角形的顶点.

假设  $C_1 := \langle T_1, T_2, \dots, T_m \rangle (m \geq 5)$  为  $\Delta$  中一条黑色、闭合的奇链,  $T_\zeta = T_1$ . 由  $B_\zeta(\zeta) = 1$  可知,  $\zeta$  对应的  $B$  网系数  $c_\zeta \neq 0$ . 由  $C^1$  光滑条件,  $T_\zeta$  中 3 个小三角形的中点对应的  $B$  网系数可能不为零. 根据  $C^1$  光滑条件, 非零值可以由  $T_\zeta$  传播到  $T_2$  以及  $T_m, T_{m-1}$  的内部, 即这些三角形内部某些区域点对应的  $B$  网系数可能不为零. 对于  $T_3, T_{m-2}$  来说, 它们都是奇三角形, 所以这两个三角形中所有区域点对应的  $B$  网系数都为零.

假设  $C_2 := \langle T'_1, T'_2, \dots, T'_n \rangle (n \geq 5)$  为  $\Delta$  中一条白色、闭合的奇链,  $T'_1 \cap T'_{n-1} = e$ . 由边  $e$  上的  $C^1$  光滑条件, 非零值可继续传播到  $T'_1$  的内部, 然后传播到  $T'_2$  以及  $T'_n, T'_{n-1}$  内, 即这些三角形内部某些区域点对应的  $B$  网系数可能不为零. 对于  $T'_3, T'_{n-2}$  来说, 它们都是奇三角形, 所以这两个三角形中所有区域点对应的  $B$  网系数都为零. 因此,  $\text{supp}(B_\zeta) \subseteq \text{star}^3(T_\zeta)$ , 如图 5 所示.

当  $\zeta$  位于  $T_\zeta$  的边上时, 同样考虑  $B_\zeta$  的支集为最大的情形. 假设  $T_0 := \langle v_0, v_1, v'_1 \rangle$  为集合  $\Delta_3$  中的三角形,  $\zeta$  位于边  $e_1 := \langle v_1, v'_1 \rangle$  上. 由  $B_\zeta(\zeta) = 1$  可知,  $\zeta$  对应的  $B$  网系数  $c_\zeta \neq 0$ , 由  $C^1$  光滑条件,  $D_1(v_1)$  与  $D_1(v'_1)$  内某些区域点对应的  $B$  网系数可能不为零.

设  $T_1 := \langle v_1, v_2, v'_2 \rangle$  为集合  $\Delta_2$  中的三角形, 它与  $T_0$  具有公共顶点  $v_1$ , 则它的边  $e_2 := \langle v_1, v_2 \rangle$  与  $e_3 := \langle v_1, v'_2 \rangle$  上的区域点对应的  $B$  网系数可能不为零, 所以,  $D_1(v_2)$  与  $D_1(v'_2)$  内某些区域点对应的  $B$  网系数可能不为零. 设  $T_2 := \langle v_2, v_3, v'_3 \rangle$  为集合  $\Delta_1$  中的三角形, 它与  $T_1$  具有公共顶点  $v_2$ , 则非零值会从  $v_2$  沿边  $e_4 := \langle v_2, v_3 \rangle$  传播到顶点  $v_3$ , 其中  $v_3$  为在执行算法 2 中 (1) ~ (2) 的过程中  $T_2$  所包含的未被标记的顶点, 即  $D_1(v_3)$  内某些区域点对应的  $B$  网系数可能不为零. 设  $T_3 := \langle v_3, v_4, v'_4 \rangle$  为集合  $\Delta_0$  中的三角形, 它与  $T_2$  具有公共顶点  $v_3$ , 由于  $v_4, v'_4$  为在执行算法 2 中 (1) ~ (2) 的过程中  $T_3$  所包含的已被标记的顶点, 所以  $D_1(v_4)$  与  $D_1(v'_4)$  内所有区域点对应的  $B$  网系数都为零. 这样, 非零值不再沿边传播. 如果  $T_3$  为一条黑色、闭合奇链  $C_1$  中的第一个三角形, 由于  $D_1(v_3)$  内某些区域点对应的  $B$  网系数可能不为零, 根据  $C^1$  光滑条件,  $T_3$  中 3 个小三角形的中点对应的  $B$  网系数可能不为零. 这样, 非零值可以在三角形内部继续传播, 依次经过  $C_1$  中的两个黑色三角形和另一条白色、闭合奇链  $C_2$  中的三个白色三角形后, 传播终止. 因此,  $\text{supp}(B_\zeta) \subseteq \text{star}^6(T_\zeta)$ , 如图 6 所示.

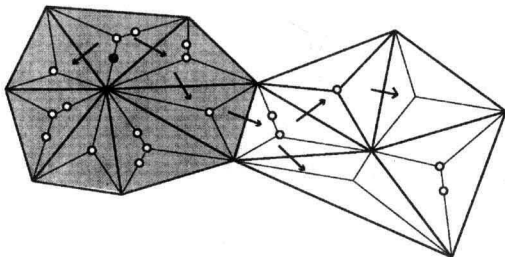


图 5 当  $\zeta$  严格位于  $T_\zeta$  的内部时,  $B_\zeta$  的最大支集  
Fig. 5 The maximal support for  $B_\zeta$ , when  $\zeta$  is in  $T_\zeta$

●:  $\zeta$ ; ○: 插值点; →: 传播方向. ●:  $\zeta$ ; ○: Interpolation points; →: Propagation direction.

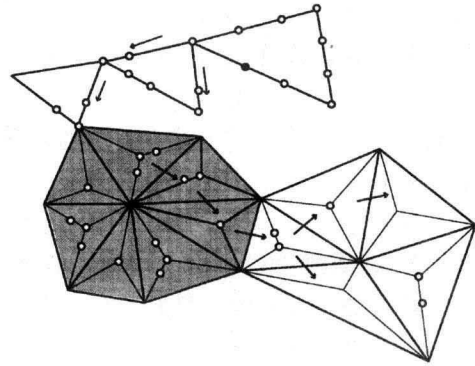


图 6 当  $\zeta$  位于  $T_\zeta$  的边上时,  $B_\zeta$  的最大支集

Fig. 6 The maximal support for  $B_\zeta$ , when  $\zeta$  is on the edge of  $T_\zeta$

●:  $\zeta$ ; ○: 插值点; →: 传播方向. ●:  $\zeta$ ; ○: Interpolation points; →: Propagation direction.

由以上讨论可知,  $\text{supp}(B_\zeta) \subseteq \text{star}^6(T_\zeta)$ .

#### 参考文献:

- [1] Nürnberger G, Zeilfelder F. Local lagrange interpolation on powell-sabin triangulations and terrain modelling [M]// Haussmann W. Multivariate Approximation. Basel: Birkh user ISNM, 2001: 227-244.
- [2] Nürnberger G, Schumaker L L, Zeilfelder F. Lagrange interpolation by  $C^1$  cubic splines on triangulated quadrangulations[J]. Adv in Comp Math, 2004, 21(3-4): 357-380.
- [3] Nürnberger G, Zeilfelder F. Lagrange interpolation by bivariate  $C^1$ -splines with optimal approximation order [J]. Advances in computational mathematics, 2004, 21(3-4): 381-419.
- [4] Nürnberger G, Zeilfelder F. Local lagrange interpolation by cubic splines on a class of triangulations [M]// Kopotun K. Trends in Approximation Theory, Nashville: Vanderbilt University Press, 2001: 341-350.

(责任编辑: 尹 闯)

## 以色列科学家发现与慢性疼痛有关的基因

由神经损伤引发的慢性疼痛, 如持续性头疼、背疼、关节疼等, 是一种常见症状, 全球大约有 20% 的成年人受其困扰. 我们知道, 有些人比其他人更容易患慢性疼痛, 而且对不同的人来说, 即使经历同样的损伤, 疼痛感也会不一样, 但是究竟是什么因素导致这种现象却无人知晓. 最近, 以色列科学家发现了一个与慢性疼痛有关的基因, 他们在实验鼠的研究中, 采取精细定位方法将变异基因的位置缩小到含有大约 155 个基因的区域, 然后用生物信息学和全基因组芯片来分析, 发现一个被称为 *Cacgn2* 的基因在引发慢性疼痛中发挥着作用. 为弄清人体内类似基因是否与慢性疼痛有关, 研究人员又对一组乳腺癌患者进行了分析, 也发现了同样的结果. 这一发现将有助于了解引起慢性疼痛的原因和开发新的治疗慢性疼痛的手段.

(据科学网)