广西科学 Guangxi Sciences 2010,17(4):277～281

有限 p-群两个重要的类*

Two Important Classes of p-groups

班桂宁,佘　科,刘　惠,李芳芳

BAN Gui-ning, SHE Ke, LIU Hui, LI Fang-fang

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁　530004)

(School of Mathematics and Information Sciences, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要:利用群的扩张理论得到有限 p - 群两个重要的无限类,给出它们的一些性质,并证明它们都是 LA-群,从而得到若干新的 LA-群.

关键词:有限群　p - 群　LA-群　阶

中图法分类号:O152.1　**文献标识码**:A　**文章编号**:1005-9164(2010)04-0277-05

Abstract: We get two important infinite classes of p - groups by using the extension theory of group, give their some properties, in particular, show that they are all LA-groups and so a lot of new LA-groups are obtained.

Key words: finite group, p - group, LA-group, order

设 p 是一个素数,关于有限 p - 群有一个著名的 LA - 猜想,即阶大于 p^2 的有限非循环 p - 群的阶一定是其自同构群阶的因子,满足 LA - 猜想的群就称为 LA - 群[1]. LA - 猜想的研究由来已久,目前已证明了相当的几类 p - 群是 LA - 群. 文献[2 ～ 5] 利用群的扩张理论来研究有限 p - 群及 LA - 群,得到了若干新的有意义的结果. 本文在前人的基础上,利用 Schreier 群扩张理论得到有限 p - 群两个重要的无限类,给出它们的一些性质,并进一步证明它们都是 LA - 群,从而得到一系列新的 LA - 群.

文中所考虑的群均指有限 p - 群,并且在文章的第 2 部分我们恒假定 p 是不等于 3 的奇素数. 设 G 是有限 p-群, 分别以 $\mathrm{Aut}(G)$、$\mathrm{Inn}(G)$、$A_c(G)$ 表示 G 的自同构群, 内自同构群和中心自同构群. $P(G) = \langle x^p \mid x \in G\rangle$. 文中所引用的参数 $k, k_i (i = 1, \cdots, 4)$, m, n 等,如无另外说明,均指正整数. 符号 $\Phi_9(2111)_a$ 等可参见文献[6]. 为方便起见,对群的定义关系中,形如 $[a,b] = 1$(a, b 是群元素) 的换位子都省略不写. 其他符号和术语均是标准的,具体可以参照文献[7] 和文献[8].

1　相关引理

引理 1.1[9]　(VanDyek) 设 G 是由生成元 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 和关系 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_r), i \in I$ 所定义的群, $H = \langle a_1, \cdots, a_r\rangle$(这些 a_i 可能相同), $\forall\ i \in I$, $f_i(a_1, \cdots, a_r) = 1$. 则存在唯一的满同态 $\sigma: G = F_r/N \to H$ 使得 $x_iN \mapsto a_i$,其中 $F_r = \langle x_1, \cdots, x_r\rangle$ 为自由群, $Y = \langle\{f_i(x_1, \cdots, x_r) \mid i \in I\}\rangle$, $N = Y^{F_r}$(Y 在 F_r 中的正规闭包). 如果 $|G| \leqslant |H| < +\infty$,则上述 σ 为群同构(即 H 是由生成元 $\{a_1, \cdots, a_r\}$ 与定义关系 $f_i(a_1, \cdots, a_r) = 1$, $\forall\ i \in I$ 所定义的群).

引理 1.2　满足下列条件之一的阶大于 p^2 的有限非循环 p - 群 G 是 LA - 群:

(1) $c(G) \leqslant 2$[10];

(2) G 是 p - 交换 p - 群[11];

(3) G 或 $G/Z(G)$ 是亚循环群($p > 2$)[12,13];

(4) G 有极大类或 G 有极大类正规子群 N 使 G/N 为初等交换群或为 p^2 阶循环群[14];

(5) $|G/Z(G)| \leqslant p^4$ 或者 $|G/Z(G)| \leqslant p^5$,但 $Z(G)$ 循环[8,15];

(6) $Z(G) \not\leqslant \Phi(G)$[16];

(7) $\Phi(G)$ 循环[1];

(8) G 是初等交换群被循环群的扩张[5];

收稿日期:2010-04-30

修回日期:2010-06-10

作者简介:班桂宁(1962-),男,博士,教授,主要从事有限群与控制论研究工作。

* 广西自然科学基金项目(No.0832054)资助。

(9) 对任意 $x \in G \backslash Z(G)$，都有 $xZ(G) \subseteq x^{G}$[17]；

(10) $|G| \leqslant 2^9 (p=2)$ 或 $|G| \leqslant p^7 (p > 2)$[18, 19].

引理 1.3[7] 设 G 是有限群，则 G 的全体中心内自同构组成 $\mathrm{Aut}(G)$ 的子群，并且它和 $Z(G/Z(G))$ 是同构的.

引理 1.4[1] 设 G 是 PN-群，G/G' 和 $Z(G)$ 的不变型分别为 $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_t \geqslant 1$ 和 $k_1 \geqslant k_2 \cdots \geqslant k_s \geqslant 1$，则 $|A_c(G)| = p^a$，其中 $a = \Sigma \min(m_j, k_i)$.

引理 1.5[20] 如果 G 是正则 p-群，$a, b \in G, n = p^\alpha$，则 $[a^n, b] = 1$ 当且仅当 $[a, b]^n = 1$.

2 主要结果

定理 2.1 设 $G = \langle a_0, a_1, \cdots, a_4 \mid [a_i, a_0] = a_{i+1}, a_0^{p^k} = a_4^{rp^t}, a_1^{p^{k_1}} = a_{i+1}^{p^{k_{i+1}}} = 1 (i=1,2,3) \rangle$，其中 $0 \leqslant r < p, 0 \leqslant t < k_4$. 则 G 成为一个群的充要条件是 $k_{i+1} \leqslant \min\{k_i, k\} (i=1,2,3)$. 进一步，在 G 成为群的条件下，有 $G = \langle a_0, a_1, \cdots, a_4 \mid [a_i, a_0] = a_{i+1}, a_0^{p^k} = a_4^{rp^t}, a_1^{p^{k_1}} = a_{i+1}^{p^{k_{i+1}}} = 1, k_{i+1} \leqslant \min\{k_i, k\} (i=1,2,3), 0 \leqslant r < p, 0 \leqslant t < k_4 \rangle$，亦即定理中所给的关系是群 G 的定义关系，且 $|G| = p^{k+k_1+\cdots+k_4}$.

证明 (Ⅰ) 假设定理中所给的 G 是一个群. 因为对于 $i=1,2,3$，$[a_i, a_0] = a_{i+1}$，即 $a_i^{a_0} = a_i a_{i+1}$，故 $o(a_i a_{i+1}) = o(a_i^{a_0}) = o(a_i) = p^{k_i}$. 又 $[a_i, a_{i+1}] = 1$，即 a_i 与 a_{i+1} 可交换，从而有 $1 = (a_i a_{i+1})^{p^{k_i}} = a_i^{p^{k_i}} a_{i+1}^{p^{k_i}} = a_{i+1}^{p^{k_i}}$. 但是 $o(a_{i+1}) = p^{k_{i+1}}$，所以 $p^{k_{i+1}} \mid p^{k_i}$，这就等价地得到 $k_{i+1} \leqslant k_i$. 为确定 $k_{i+1} (i=1,2,3)$ 与 k 的大小关系，我们先来计算几个一般的式子 $a_i^{a_0^m} (i=1,2,3)$，其中 $0 < m \leqslant p^k$ 为正整数.

$$a_3^{a_0^m} = (a_3 a_4)^{a_0^{m-1}} = a_3^{a_0^{m-1}} a_4 = a_3^{a_0^{m-2}} a_4^2 = \cdots = a_3^{a_0} a_4^{m-1} = a_3 a_4^m. \tag{2.1}$$

由 (2.1) 式，通过计算又得到

$$a_2^{a_0^m} = (a_2 a_3)^{a_0^{m-1}} = a_2^{a_0^{m-1}} a_3 a_4^{m-1} = a_2^{a_0^{m-2}} a_3^2 a_4^{(m-1)+(m-2)} = \cdots = a_2^{a_0} a_3^{m-1} a_4^{\binom{m}{2}} = a_2 a_3^m a_4^{\binom{m}{2}}. \tag{2.2}$$

又由 (2.1)、(2.2) 式有

$$a_1^{a_0^m} = (a_1 a_2)^{a_0^{m-1}} = a_1^{a_0^{m-1}} a_2 a_3^{m-1} a_4^{\binom{m-1}{2}} = a_1^{a_0^{m-2}} a_2^2 a_3^{(m-1)+(m-2)} a_4^{\binom{m-1}{2}+\binom{m-2}{2}} = \cdots = a_1^{a_0} a_2^{m-1} a_3^{\binom{m}{2}} a_4^{\binom{m}{3}} = a_1 a_2^m a_3^{\binom{m}{2}} a_4^{\binom{m}{3}}. \tag{2.3}$$

注意到 $a_0^{p^k} = a_4^{rp^t}$，取 $m = p^k$，代入 (2.1) 式，就有 $a_3 = a_3^{a_4^{rp^t}} = a_3^{a_0^{p^k}} = a_3 a_4^{\binom{p^k}{3}}$，于是 $a_4^{p^k} = 1$. 由于 $o(a_4) = p^{k_4}$，从而 $p^{k_4} \mid p^k$，这又等价于 $k_4 \leqslant k$. 再由 (2.2) 式得到 $a_2 = a_2^{a_4^{rp^t}} = a_2^{a_0^{p^k}} = a_2 a_3^{p^k} a_4^{\binom{p^k}{3}} = a_2 a_3^{p^k}$，于是 $a_3^{p^k} = 1$，从而 $p^{k_3} = o(a_3) \mid p^k, k_3 \leqslant k$. 最后由 (2.3) 式又有

$$a_1 = a_1^{a_4^{rp^t}} = a_1^{a_0^{p^k}} = a_1 a_2^{p^k} a_3^{\binom{p^k}{2}} a_4^{\binom{p^k}{3}} = a_1 a_2^{p^k},$$

于是 $a_2^{p^k} = 1$，这样 $p^{k_2} = o(a_2) \mid p^k, k_2 \leqslant k$. 最终我们得到关系 $k_{i+1} \leqslant \min\{k_i, k\} (i=1,2,3)$.

(Ⅱ) 利用群的扩张理论证明定理 2.1 所给的条件下群 G 的存在性.

令 $N = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle \times \langle a_4 \rangle$，则显然群 N 是存在的，且 N 是一个型不变量为 $(p^{k_1}, p^{k_2}, p^{k_3}, p^{k_4})$ 的交换群. 设 $F = \langle s \rangle$ 是 p^k 阶循环群. 又设 $a = a_4^{rp^t} \in N$，映射 $\tau: N \to N$ 如下作用在 N 上

$$a_1^\tau = a_1 a_2, a_2^\tau = a_2 a_3, a_3^\tau = a_3 a_4, a_4^\tau = a_4.$$

根据条件 $k_{i+1} \leqslant k_i (i=1,2,3)$，及 a_{i+1} 与 a_i 可交换，τ 可扩成 N 的一个自同构. 这样对于 $\tau \in \mathrm{Aut}(N)$，我们有 $a^\tau = (a_4^{rp^t})^\tau = (a_4^\tau)^{rp^t} = a_4^{rp^t} = a$. 进一步，通过计算又得到

$$a_3^{\tau^{p^k}} = a_3 a_4^{p^k} = a_3, a_2^{\tau^{p^k}} = a_2 a_3^{p^k} a_4^{\binom{p^k}{2}} = a_2, a_1^{\tau^{p^k}} = a_1 a_2^{p^k} a_3^{\binom{p^k}{2}} a_4^{\binom{p^k}{3}} = a_1,$$

从而 $\tau^{p^k} = 1 = a$（这里 a 表示由群元素 a 诱导出的 N 的内自同构）. 若此时我们记扩张函数 $f: F \times F \to N$ 和 $\alpha: F \to \mathrm{Aut}(N)$ 有如下形状

$$f(s^i, s^j) = \begin{cases} 1, i+j < p^k, \\ a, i+j \geqslant p^k, \end{cases}$$

$$\alpha(s^i) = \tau^i, i = 0, 1, \cdots, p^k - 1.$$

则由 Schreier 扩张理论，便得到一个 N 被 F 的扩张 $G = \mathrm{Ext}(N, p^k; a_4^{rp^t}, \tau)$，且 $F \cong G/N$. 设在同构 $\sigma: F \to G/N$ 之下 s 的像为 $\bar{s}N$，$\bar{s}$ 是陪集 $\bar{s}N$ 中选定的代表元，满足 $\bar{s}^{p^k} = a_4^{rp^t} \in N$. 记 $\bar{s} = a_0$，则有 $G = \langle a_0, a_1, \cdots, a_4 \rangle$，$a_0^{p^k} = \bar{s}^{p^k} = a_4^{rp^t}$，$a_1^{p^{k_1}} = a_{i+1}^{p^{k_{i+1}}} = 1$，$a_i^{a_0} = a_i^{\bar{s}} = a_i^\tau = a_i a_{i+1}$，即 $[a_i, a_0] = a_{i+1} (i=1,2,3)$，$a_4^{a_0} = a_4^{\bar{s}} = a_4^\tau = a_4$，那么 $[a_4, a_0] = 1$. 因此，群 G 是存在的，且从上述证明过程也得知 $|G| = p^{k+k_1+k_2+k_3+k_4}$.

(Ⅲ) 利用自由群理论来证明定理 2.1 中所给的关系是群 G 的定义关系.

设 $F = \langle b_0, b_1, \cdots, b_4 \rangle$ 是一个自由群，$S = \{b_1^{p^{k_1}}, \cdots, b_4^{p^{k_4}}, [b_i, b_0] b_{i+1}^{-1} (i=1,2,3), [b_j, b_l] (1 \leqslant j, l \leqslant 4), [b_4, b_0], b_0^{p^k} b_4^{-rp^t}\}$，$N = S^F$. 则 $\bar{F} = F/N = F/S^F = \langle \bar{b}_0, \bar{b}_1, \cdots, \bar{b}_4 \rangle$，因此有 $\bar{b}_1^{p^{k_1}} = \bar{b}_{i+1}^{p^{k_{i+1}}} = 1$，$[\bar{b}_i, \bar{b}_0] = \bar{b}_{i+1}$，$[\bar{b}_j, \bar{b}_l] = 1$，$[\bar{b}_0, \bar{b}_4] = 1$，$\bar{b}_0^{p^k} = \bar{b}_4^{rp^t}$. 这样对于 $\bar{F}$ 的子群 $\bar{H} = \langle \bar{b}_1, \cdots, \bar{b}_4 \rangle$ 有 $\bar{H} \trianglelefteq \bar{F}$，于是 $|\bar{F}/\bar{H}| = |\langle \bar{b}_0 \bar{H} \rangle| \leqslant p^k$. 又 $|\bar{H}| = |\langle \bar{b}_1, \cdots, \bar{b}_4 \rangle| \leqslant p^{k_1+\cdots+k_4}$，故 $|\bar{F}| \leqslant p^k |\bar{H}| \leqslant p^{k+k_1+\cdots+k_4} = |G|$. 由引理 1.1，可知 $G \cong \bar{F} = F/S^F$，所以 $G = \langle a_0, a_1, \cdots, a_4 \mid [a_i, a_0] = a_{i+1}, a_0^{p^k} =$

$a_4^{rp^t}, a_1^{p^{k_1}} = a_{i+1}^{p^{k_{i+1}}} = 1, k_{i+1} \leqslant \min\{k_i, k\}(i=1,2,3), 0 \leqslant r < p, 0 \leqslant t < k_4\rangle$.

定理 2.2 设 $H = \langle a_0, a_1, \cdots, a_4 \mid [a_i, a_0] = a_{i+1}, [a_1, a_2] = a_4^{rp^t}, a_0^{p^k} = a_1^{p^{k_1}} = a_{i+1}^{p^{k_{i+1}}} = 1(i=1,2,3)\rangle$，其中 $0 \leqslant r < p, 0 \leqslant t < k_4$. 则 H 成为一个群的充要条件是 $k_{i+1} \leqslant \min\{k_i, k\}(i=1,2,3)$. 进一步，在 H 成为群的条件下，有 $H = \langle a_0, a_1, \cdots, a_4 \mid [a_i, a_0] = a_{i+1}, [a_1, a_2] = a_4^{rp^t}, a_0^{p^k} = a_1^{p^{k_1}} = a_{i+1}^{p^{k_{i+1}}} = 1, k_{i+1} \leqslant \min\{k_i, k\}(i=1,2,3), 0 \leqslant r < p, 0 \leqslant t < k_4\rangle$，即定理中所给的关系就是群 H 的定义关系，且 $|H| = p^{k+k_1+\cdots+k_4}$.

证明 假设定理 2.2 中所给的 H 是一个群. 类似于定理 2.1 中(Ⅰ)的证明，我们可以得到关系 $k_4 \leqslant k_3 \leqslant k_2 \leqslant k$. 另外，由于 $[a_1, a_2] = a_4^{rp^t}$，即 $a_1^{a_2} = a_1 a_4^{rp^t}$，从而 $1 = (a_1^{a_2})^{p^{k_1}} = (a_1 a_4^{rp^t})^{p^{k_1}} = a_1^{p^{k_1}} a_4^{rp^{t+k_1}} = a_4^{rp^{t+k_1}}$，这就得到 $p^{k_4} \mid rp^{t+k_1}$，于是 $k_1 + t \geqslant k_4$. 当然，由 $[a_1, a_2] = a_4^{rp^t}$，亦可得到 $(a_2^{-1})^{a_1} = a_4^{rp^t} a_2^{-1}$，从而 $a_2^{a_1} = a_2 a_4^{-rp^t}$. 又由 $[a_1, a_0] = a_2$，得 $(a_0^{-1})^{a_1} = a_2 a_0^{-1}$，于是计算得

$$(a_0^{-1})^{a_1^m} = a_2^{a_1^{m-1}} (a_0^{-1})^{a_1^{m-1}} =$$
$$(a_2^{a_1^{m-2}})^2 (a_0^{-1})^{a_1^{m-2}} a_4^{-rp^t} =$$
$$(a_2^{a_1^{m-3}})^3 (a_0^{-1})^{a_1^{m-3}} a_4^{-rp^t(1+2)} = \cdots =$$
$$(a_2^{a_1^{m-(m-1)}})^{m-1} (a_0^{-1})^{a_1^{m-(m-1)}} a_4^{-rp^t[1+2+\cdots+(m-2)]} =$$
$$a_2^m a_4^{-\binom{m}{2} rp^t} a_0^{-1},$$

因此 $[a_1^m, a_0] = a_2^m a_4^{-\binom{m}{2} rp^t}$. 取 $m = p^{k_1}$，注意到 $a_1^{p^{k_1}} = 1$，且 $k_1 + t \geqslant k_4$，就有

$$1 = [a_1^{p^{k_1}}, a_0] = a_2^{p^{k_1}} a_4^{-\binom{p^{k_1}}{2} rp^t} = a_2^{p^{k_1}},$$

于是 $p^{k_2} \mid p^{k_1}$，这又等价地得到 $k_2 \leqslant k_1$. 故最终得到关系 $k_{i+1} \leqslant \min\{k_i, k\}$.

为证明群 H 的存在性，首先令 $N = \langle a_2\rangle \times \langle a_3\rangle \times \langle a_4\rangle$，它是一个型不变量为 $(p^{k_2}, p^{k_3}, p^{k_4})$ 的交换群，$F = \langle s\rangle$ 是 p^{k_1} 阶循环群. 由 Schreier 扩张理论，类似于定理 2.1 中(Ⅱ)的证明，可得到一个 N 被 F 的扩张 $N_1 = \mathrm{Ext}(N, p^{k_1}; 1, \tau) = \langle a_1, a_2, a_3, a_4\rangle$，其中 $[a_1, a_2] = a_4^{rp^t}, [a_1, a_3] = [a_1, a_4] = 1, a_1^{p^{k_1}} = a_{i+1}^{p^{k_{i+1}}} = 1(i=1,2,3)$. 再作 N_1 借助 p^k 阶循环群 $F_1 = \langle s_1\rangle$ 的扩张 $H = \mathrm{Ext}(N_1, p^k; 1, \sigma) = \langle a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\rangle$，其中 $[a_i, a_0] = a_{i+1}, [a_1, a_2] = a_4^{rp^t}, a_0^{p^k} = a_1^{p^{k_1}} = a_{i+1}^{p^{k_{i+1}}} = 1(i=1,2,3)$，因此 H 是存在的，且 $|H| = p^{k+k_1+k_2+k_3+k_4}$.

最后，类似于定理 2.1 证明过程中的(Ⅲ)，可得到群 $H = \langle a_0, a_1, \cdots, a_4 \mid [a_i, a_0] = a_{i+1}, [a_1, a_2] = a_4^{rp^t}, a_0^{p^k} = a_1^{p^{k_1}} = a_{i+1}^{p^{k_{i+1}}} = 1, k_{i+1} \leqslant \min\{k_i, k\}(i=1,2,3), 0 \leqslant r < p, 0 \leqslant t < k_4\rangle$.

为方便起见，在以下的论述中，我们恒假定 G, H 分别是定理 2.1、2.2 中的关系所确定的群.

定理 2.3 G 有下列性质：

(1) $c(G) = 4$，G 是正则 p - 群，并且

$G' = G_2 = \langle a_2\rangle \times \langle a_3\rangle \times \langle a_4\rangle, G_3 = \langle a_3\rangle \times \langle a_4\rangle, G_4 = \langle a_4\rangle$.

(2) $a_1^{a_0^m} = a_1 a_2^m a_3^{\binom{m}{2}} a_4^{\binom{m}{3}}$，$a_2^{a_0^m} = a_2 a_3^m a_4^{\binom{m}{2}}, a_3^{a_0^m} = a_3 a_4^m$；

$[a_1^n, a_0^m] = a_2^{mn} a_3^{\binom{m}{2}n} a_4^{\binom{m}{3}n}$，$[a_2^n, a_0^m] = a_3^{mn} a_4^{\binom{m}{2}n}$，$[a_3^n, a_0^m] = a_4^{mn}$.

(3) $Z(G) < \Phi(G)$，从而 G 是 PN - 群，并且

$Z(G) = (\langle a_1^{p^{k_2}}\rangle \times \langle a_2^{p^{k_3}}\rangle \times \langle a_3^{p^{k_4}}\rangle \times \langle a_4\rangle) \cdot \langle a_0^{p^{k_2}}\rangle$,

$Z_2(G) = (\langle a_1^{p^{k_3}}\rangle \times \langle a_2^{p^{k_4}}\rangle \times \langle a_3\rangle \times \langle a_4\rangle) \cdot \langle a_0^{p^{k_3}}\rangle$,

$Z_3(G) = (\langle a_1^{p^{k_4}}\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle a_3\rangle \times \langle a_4\rangle) \cdot \langle a_0^{p^{k_4}}\rangle$.

(4) 当 $k = k_1 = 1$ 时，若 $r \neq 0$，则 $G \cong \Phi_9(2111)_a$；若 $r = 0$，则 $G \cong \Phi_9(1^5)$.

当 $k = 2, k_1 = 1$ 时，若 $r \neq 0$，则 $G \cong \Phi_9(3111)_a$；若 $r = 0$，则 $G \cong \Phi_9(21^4)_d$.

当 $k = 1, k_1 = 2$ 时，若 $r \neq 0$，则 $G \cong \Phi_9(2211)_a$；若 $r = 0$，则 $G \cong \Phi_9(21^4)_e$.

证明 (1) 由 G 的定义关系，显然有 $\langle a_2\rangle \times \langle a_3\rangle \times \langle a_4\rangle \leqslant G'$. 令 $N = \langle a_2\rangle \times \langle a_3\rangle \times \langle a_4\rangle$，则易知 $N \trianglelefteq G$，于是 $G/N = \langle a_0 N, a_1 N\rangle$. 因为 $[a_1, a_0] = a_2 \in N$，这等价于 $a_1 N \cdot a_0 N = a_0 N \cdot a_1 N$，即 G/N 是交换群，所以 $G' \leqslant N$，从而得到 $G' = N = \langle a_2\rangle \times \langle a_3\rangle \times \langle a_4\rangle$. 这样又容易得到 $G_3 = [G_2, G] = \langle a_3\rangle \times \langle a_4\rangle, G_4 = \langle a_4\rangle$. 因为 $\langle a_4\rangle \leqslant Z(G)$，于是 $G_5 = [G_4, G] = 1$，$c(G) = 4$. 由于 $p \geqslant 5$，故 G 是正则的.

(2) 前 3 个式子直接从定理 2.1 证明过程中的 (2.1)、(2.2) 和 (2.3) 式得到. 而由此 3 个式子又分别可以得到

$$[a_1^n, a_0^m] = a_1^{-n} (a_1^n)^{a_0^m} = a_1^{-n} (a_1^{a_0^m})^n =$$
$$a_1^{-n} a_1^n a_2^{mn} a_3^{\binom{m}{2}n} a_4^{\binom{m}{3}n} = a_2^{mn} a_3^{\binom{m}{2}n} a_4^{\binom{m}{3}n},$$
$$[a_2^n, a_0^m] = a_2^{-n} (a_2^n)^{a_0^m} = a_2^{-n} (a_2^{a_0^m})^n =$$
$$a_2^{-n} a_2^n a_3^{mn} a_4^{\binom{m}{2}n} = a_3^{mn} a_4^{\binom{m}{2}n},$$
$$[a_3^n, a_0^m] = a_3^{-n} (a_3^n)^{a_0^m} = a_3^{-n} (a_3^{a_0^m})^n = a_3^{-n} a_3^n a_4^{mn} = a_4^{mn}.$$

(3) 因为 $[a_i, a_0] = a_{i+1}, o(a_{i+1}) = p^{k_{i+1}} (i = 1,2,3)$，所以 $[a_i, a_0]^{p^{k_{i+1}}} = a_{i+1}^{p^{k_{i+1}}} = 1$. 由 (1) 知 G 正则，根据引理 1.5，就有 $[a_i^{p^{k_{i+1}}}, a_0] = 1$ 以及 $[a_i, a_0^{p^{k_{i+1}}}] = 1$. 由

于 $k_{i+1}\leqslant\min\{k_i,k\}$，从而得到 $a_i^{p^{k_{i+1}}}\in Z(G)$，$a_0^{p^{k_2}}\in Z(G)$. 又显然 $a_4\in Z(G)$，故 $(\langle a_1^{p^{k_2}}\rangle\times\langle a_2^{p^{k_3}}\rangle\times\langle a_3^{p^{k_4}}\rangle\times\langle a_4\rangle)\cdot\langle a_0^{p^{k_2}}\rangle\leqslant Z(G)$. 再设 $z=a_1^{t_1}a_2^{t_2}a_3^{t_3}a_4^{t_4}a_0^{t_0}\in Z(G)$，则有

$$1=[z,a_1]=[a_1^{t_1}a_2^{t_2}a_3^{t_3}a_4^{t_4}a_0^{t_0},a_1]=a_2^{-t_0}a_3^{-\binom{t_0}{2}}a_4^{-\binom{t_0}{3}},$$

$$1=[z,a_0]=[a_1^{t_1}a_2^{t_2}a_3^{t_3}a_4^{t_4}a_0^{t_0},a_0]=a_2^{t_1}a_3^{t_0t_1+t_2}a_4^{\binom{t_0}{2}t_1+t_0t_2+t_3},$$

由此得到 $p^{k_{i+1}}\mid t_i(i=1,2,3)$，$p^{k_2}\mid t_0$. 这便使得 $z\in(\langle a_1^{p^{k_2}}\rangle\times\langle a_2^{p^{k_3}}\rangle\times\langle a_3^{p^{k_4}}\rangle\times\langle a_4\rangle)\cdot\langle a_0^{p^{k_2}}\rangle$. 由 z 的任意性，就得到相反的包含关系，于是 $Z(G)=(\langle a_1^{p^{k_2}}\rangle\times\langle a_2^{p^{k_3}}\rangle\times\langle a_3^{p^{k_4}}\rangle\times\langle a_4\rangle)\cdot\langle a_0^{p^{k_2}}\rangle$. 类似地，可以证明

$$Z_2(G)=(\langle a_1^{p^{k_3}}\rangle\times\langle a_2^{p^{k_4}}\rangle\times\langle a_3\rangle\times\langle a_4\rangle)\cdot\langle a_0^{p^{k_3}}\rangle,$$

$$Z_3(G)=(\langle a_1^{p^{k_4}}\rangle\times\langle a_2\rangle\times\langle a_3\rangle\times\langle a_4\rangle)\cdot\langle a_0^{p^{k_4}}\rangle.$$

又因为 G 正则，$P(G)=\langle a_0^p,a_1^p,a_2^p,a_3^p,a_4^p\rangle$，故 $\Phi(G)=P(G)G'=(\langle a_1^p\rangle\times\langle a_2\rangle\times\langle a_3\rangle\times\langle a_4\rangle)\cdot\langle a_0^p\rangle$，从而 $Z(G)<\Phi(G)$，G 是 PN - 群.

(4) 直接验证即可.

类似于定理 2.3，我们可以得到

定理 2.4 H 有下列性质：

(1) $c(H)=4$，H 是正则 p - 群，并且

$H'=H_2=\langle a_2\rangle\times\langle a_3\rangle\times\langle a_4\rangle$，$H_3=\langle a_3\rangle\times\langle a_4\rangle$，$H_4=\langle a_4\rangle$.

(2) $a_1^{a_0^m}=a_1a_2^ma_3^{\binom{m}{2}}a_4^{\binom{m}{3}}$，$a_2^{a_0^m}=a_2a_3^ma_4^{\binom{m}{2}}$，$a_3^{a_0^m}=a_3a_4^m$，$a_1^{a_2^m}=a_1a_4^{mrp^t}$；

$[a_1^n,a_0^m]=a_2^{mn}a_3^{\binom{m}{2}n}a_4^{\binom{m}{3}n-m\binom{n}{2}rp^t}$，$[a_2^n,a_0^m]=a_3^{mn}a_4^{\binom{m}{2}n}$，$[a_3^n,a_0^m]=a_4^{mn}$，$[a_1^n,a_2^m]=a_4^{mnrp^t}$.

(3) $Z(H)<\Phi(H)$，从而 H 是 PN - 群，并且

$$Z(H)=\langle a_1^{p^{k_2}}\rangle\times\langle a_2^{p^{k_3}}\rangle\times\langle a_3^{p^{k_4}}\rangle\times\langle a_4\rangle\times\langle a_0^{p^{k_2}}\rangle,$$

$$Z_2(H)=\langle a_1^{p^{k_3}}\rangle\times\langle a_2^{p^{k_4}}\rangle\times\langle a_3\rangle\times\langle a_4\rangle\times\langle a_0^{p^{k_3}}\rangle,$$

$$Z_3(H)=\langle a_1^{p^{k_4}}\rangle\times\langle a_2\rangle\times\langle a_3\rangle\times\langle a_4\rangle\times\langle a_0^{p^{k_4}}\rangle.$$

(4)(i) 若 $r=1,t=0$，则当 $k=k_1=1$ 时，$H\cong\Phi_{10}(1^5)$；当 $k=2,k_1=1$ 时，$H\cong\Phi_{10}(21^4)_d$；当 $k=1,k_1=2$ 时，$H\cong\Phi_{10}(21^4)_e$.

(ii) 若 $r=0$，则 $H\cong G$.

定理 2.5 G 和 H 是 LA - 群.

证明 我们只证明群 G 是 LA - 群，对 H 可类似地证明.

令 $R=\mathrm{Inn}(G)A_c(G)$，则 $R\leqslant\mathrm{Aut}(G)$. 由引理 1.3，有

$$|R|=|\mathrm{Inn}(G)A_c(G)|=\frac{|\mathrm{Inn}(G)|\cdot|A_c(G)|}{|\mathrm{Inn}(G)\cap A_c(G)|}=|A_c(G)||G:Z_2(G)|.$$

因为 R 是 $\mathrm{Aut}(G)$ 的 p - 子群，故只要 $|R|\geqslant|G|$，则定理 2.5 必然成立. 由定理 2.3(3) 知，G 是 PN - 群，从而可以应用引理 1.4 来完成定理的证明.

(Ⅰ) 若 $k=k_2$，则由定理 2.3(3)，有

$$Z(G)=\langle a_1^{p^{k_2}}\rangle\times\langle a_2^{p^{k_3}}\rangle\times\langle a_3^{p^{k_4}}\rangle\times\langle a_4\rangle,$$

其不变型为 $k_1-k_2,k_2-k_3,k_3-k_4,k_4$. 又显然 $G/G_2=\langle a_0G_2\rangle\times\langle a_1G_2\rangle$，其不变型为 k,k_1.

(i) 如果 $k\leqslant k_1-k_2$，则 $|A_c(G)|=p^k\cdot p^{k_2}\cdot p^{k_1}=p^{k+k_1+k_2}$，于是 $|R|=p^{k+k_1+k_2}\cdot p^{2k_3+k_4}=p^{k+k_1+k_2+2k_3+k_4}=|G|\cdot p^{k_3}>|G|$.

(ii) 如果 $k>k_1-k_2$，则此时有 $|A_c(G)|=|Z(G)|^2=p^{2k_1}$，于是 $|R|=p^{2k_1}\cdot p^{2k_3+k_4}=|G|\cdot p^{k_1+k_3-k-k_2}$. 显然，若又有 $k_2=k_3$，则 $|R|=|G|p^{k_1-k_2}\geqslant|G|$，定理 2.5 成立. 而若 $k_2>k_3$，则仍需作以下讨论：

(a) $k_1\geqslant k+k_4-t$，亦即 $o(a_1)\geqslant o(a_0)$. 此时，令

$$\sigma:a_0\mapsto a_0,a_1\mapsto a_1a_0^{p^{k_3}},a_2\mapsto a_2,a_3\mapsto a_3,a_4\mapsto a_4,$$

则显然 $\sigma\in\mathrm{Aut}(G)$. 但 $a_1^{-1}a_1^{\sigma}=a_0^{p^{k_3}}\notin G'Z(G)$，于是 $\sigma\notin R$. 又 $a_1^{-1}a_1^{\sigma^{p^{k_2-k_3}}}=a_0^{p^{k_2}}\in Z(G)$，故 $\sigma^{p^{k_2-k_3}}\in R$. 又有 $a_1^{\sigma^{p^{k+k_4-t-k_3}}}=a_1a_0^{p^{k+k_4-t}}=a_1$，从而 $o(\sigma)=p^{k+k_4-t-k_3}$. 这样，若令 $S=\langle R,\sigma\rangle$，则

$$|S|=\frac{|R|\cdot|\langle\sigma\rangle|}{|R\cap\langle\sigma\rangle|}=\frac{|R|\cdot p^{k+k_4-t-k_3}}{p^{k+k_4-t-k_3+k_3-k_2}}=p^{2k+2k_1+k_3+k_4-k_2}=|G|\cdot p^{k+k_1-2k_2}\geqslant|G|.$$

(b) $k_1<k+k_4-t$，亦即 $o(a_1)<o(a_0)$. 此时，如果又有 $k_3\geqslant k+k_4-t-k_1$，则我们仍可选取 a 中的 σ，从而使得结论成立. 故不妨假设 $k_3<k+k_4-t-k_1$. 令

$$\tau:a_0\mapsto a_0,a_1\mapsto a_1a_0^{p^{k+k_4-t-k_1}},a_2\mapsto a_2,a_3\mapsto a_3,a_4\mapsto a_4,$$

则亦有 $\tau\in\mathrm{Aut}(G)$. 因为 $k_2>k+k_4-t-k_1$，所以 $a_1^{-1}a_1^{\tau}=a_0^{p^{k+k_4-t-k_1}}\notin G'Z(G)$，从而 $\tau\notin R$. 又易知 $\tau^{p^{k_2-(k+k_4-t-k_1)}}\in R$，且 $o(\tau)=p^{k_1}$. 令 $T=\langle R,\tau\rangle$，就有

$$|T|=\frac{|R|\cdot|\langle\tau\rangle|}{|R\cap\langle\tau\rangle|}=p^{k+3k_1+2k_3+t-k_2}=|G|\cdot p^{2k_1+k_3+t-2k_2-k_4}\geqslant|G|.$$

到此，我们证明了在 $k=k_2$ 时，定理 2.5 成立.

（Ⅱ）若 $k>k_2$，因为

$$Z(G)=(\langle a_1^{p^{k_2}}\rangle\times\langle a_2^{p^{k_3}}\rangle\times\langle a_3^{p^{k_4}}\rangle\times\langle a_4\rangle)\cdot\langle a_0^{p^{k_2}}\rangle,$$

此时 $Z(G)$ 不循环，但 $Z(G)$ 正则，$\exp Z(G)=\max\{p^{k_1-k_2},p^{k_2-k_3},p^{k_3-k_4},p^{k_4},p^{k+k_4-t-k_2}\}$. 如果下列情形之一成立：(i) $\exp Z(G)=p^{k_2-k_3}$，(ii) $\exp Z(G)=p^{k_3-k_4}$，(iii) $\exp Z(G)=p^{k_4}$，(iv) $\exp Z(G)=p^{k_1-k_2}$，且 $k\geqslant k_1-k_2$，(v) $\exp Z(G)=p^{k+k_4-k_2-t}$，且 $k_1\geqslant k+k_4-k_2-t$，则我们都可以得到

$$|R|=|Z(G)|^2|G:Z_2(G)|=p^{2k+2k_1+2k_3+k_4-2k_2}.$$

这样类似于(I)中(ii)的讨论，可知此时定理 2.5 也是成立的. 于是，我们还需考虑：

(vi) $\exp Z(G)=p^{k_1-k_2}$，但 $k<k_1-k_2$. 因为恒有 $k_1>k_1-k_2$，故此时又有 $|A_c(G)|=p^k\cdot p^k\cdot|Z(G)|=p^{3k+k_1-k_2}$，于是

$$|R|=p^{3k+k_1-k_2}\cdot p^{2k_3+k_4}=p^{3k+k_1+2k_3+k_4-k_2}=|G|\cdot p^{2k+k_3-2k_2}>|G|.$$

(vii) $\exp Z(G)=p^{k+k_4-k_2-t}$，但 $k_1<k+k_4-k_2-t$. 也因为恒有 $k>k+k_4-k_2-t$，故

$$|A_c(G)|=p^{k_1}\cdot p^{k_1-k_4+t}\cdot|Z(G)|=p^{k+3k_1+t-k_2-k_4},$$

从而

$$|R|=p^{k+3k_1+t-k_2-k_4}\cdot p^{2k_3+k_4}=p^{k+3k_1+2k_3+t-k_2}=|G|\cdot p^{2k_1+k_3+t-2k_2-k_4}\geqslant|G|.$$

综上所述在 $k>k_2$ 的情形下，G 也是 LA-群.

易知，当 G 和 H 的定义关系中的参数较大或取适当的值时，可使得 G 和 H 均不在引理 1.2 所述的范围之列，因此定理 2.5 表明，我们确实得到了若干新的 LA-群.

参考文献：

[1] Exarchakos T. LA-groups[J]. J Math Soc Japan, 1981, 33(2):185-190.

[2] Ban Guining, Zhang Xinzheng. Two important classes of p-groups and the orders of their automorphism groups [J]. Chin Quart J of Math, 2008, 23(4):491-493.

[3] 班桂宁，张中健，张玉，等. 一系列新的 LA-群及其自同构群的阶[J]. 广西科学，2009，16(1)：1-3.

[4] Ban Guining, Chen Liying, Zhou Yu. A new series of LA-groups[J]. J Guangxi Teachers Education University, 2007, 24(4): 5-7.

[5] Ban Guining, Li Shiyu, Zhang Jinsong. The new series of LA-groups[J]. Chin Quart J of Math, 1994, 9(2): 73-78.

[6] James R. The groups of order p^6 (p an odd prime)[J]. Math Comput, 1980, 150(34): 613-637.

[7] 徐明曜. 有限群导引(上、下)[M]. 第二版. 北京：科学出版社，2001.

[8] Davitt R M. On the automorphism group of a finite p-group with a small central quotient[J]. Can J Math, 1980, 32(5): 1168-1176.

[9] 班桂宁，俞曙霞. 一类 p-群的自同构群的阶[J]. 数学学报，1992，35(4)：570-574.

[10] Faudree R. A note on the automorphism group of a p-group[J]. Proc Amer Math Soc, 1968, 19: 1379-1382.

[11] Davitt R M. Automorphism group of finite p-abelian p-groups[J]. Ill J Math, 1972, 16: 76-85.

[12] Davitt R M. The automorphism group of finite metacyclic p-groups[J]. Proc Amer Math Soc, 1970, 25: 876-879.

[13] Davitt R M, Otto A D. On the automorphism group of a finite p-group with the central quotient metacyclic [J]. Proc Amer Math Soc, 1971, 30: 467-472.

[14] Otto A. Central automorphisms of a finite p-group[J]. Duck Math J, 1996, 125: 280-287.

[15] 俞曙霞，班桂宁. 具有循环中心和小中心商的有限 p-群[J]. 广西大学学报：自然科学版，1993，18(3)：15-23.

[16] Hummel K. The order of the automorphism group of a central product[J]. Proc Amer Math Soc, 1975, 47: 37-40.

[17] Yadav M K. On the automorphisms of finite p-groups [J]. J Group Th, 2007, 10: 859-866.

[18] Flynn J, MacHale D, O' Brien E A, et al. Finite groups whose automorphism groups are 2-groups[J]. Proc Roy Irish Acad Sect A, 1994, 94(2): 137-145.

[19] Yu Shuxia, Ban Guining, Zhang Jingsong. Minimal p-groups with automorphism groups of order p^7[J]. Algebra Colloq, 1996, 3(2): 97-106.

[20] M 赫尔. 群论(中译本)[M]. 北京：科学出版社，1981.

（责任编辑：尹　闯）