极大群和极小群的弱 c-正规对有限群结构的影响
Influence of Weak c- normality of Maximal and Minimal Subgroups on the Structure of Finite Groups

高 辉[1],曾凡辉[2]
GAO Hui[1],ZENG Fan-hui[2]

(1. 大连海洋大学理学院,辽宁大连 116023;2. 广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)
(1. Science Institute, Dalian Ocean University, Dalian, Liaoning, 116023, China; 2. College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要:利用极大和极小群的弱 c-正规性对有限群的结构进行刻画,得到可解群和 p-幂零群的一些充分条件,推广了一些已知的结果.

关键词:极大子群 极小子群 弱 c-正规子群 可解群 p-幂零群
中图法分类号:O152.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2010)04-0282-02

Abstract: Using the weak c-normality of maximal and minimal subgroups to characterize the structure of the group G, some sufficient conditions under which a group belongs to solvable groups and p-nilpotent groups are obtained, and some known results are promoted.

Key words: maximal subgroups, minimal subgroups, weak c-normal subgroups, solvable groups, p-nilpotent groups

设 $\mathscr{F}$ 是一个群的集合,称 $\mathscr{F}$ 是一个群系,若满足(1) $G\in\mathscr{F}$,且 $H\trianglelefteq G$,则 $G/H\in\mathscr{F}$;(2) $G/H\in\mathscr{F}$,且 $G/K\in\mathscr{F}$,则 $G/H\cap K\in\mathscr{F}$. 称群系 $\mathscr{F}$ 是饱和的,如果 $G/\Phi(G)\in\mathscr{F}$,可推出 $G\in\mathscr{F}$. 设 S, N 分别表示所有的可解群类和幂零群类,$G^{\mathscr{F}}$ 是使 $G/N\in\mathscr{F}$ 的所有正规子群 N 的交,显然 S,N 均是饱和的.

1996 年,王燕鸣[1]证明群 G 可解的充要条件:G 的每个极大子群在 G 中 c-正规. 文献[2]证明 G 的素数阶子群包含在 $Z_{\infty}(G)$ 中,2^2 阶循环子群在 G 中 c-正规,则 G 为幂零群. 之后许多学者都推广了这两个结果. 他们主要从两个方面考虑:一方面减弱极大子群或极小子群的 c-正规的条件;另一方面减少极大子群或极小子群的个数. 文献[3]引进子群弱 c-正规的概念,并利用子群的弱 c-正规性研究有限群的构造. 由文献[3]的例 1 可知,子群的弱 c-正规性要比子群的 c-正规性弱,所以利用子群的弱 c-正规性可以得到更一般的结果. 本文利用极大和极小群弱 c-正规性对可解群、p-幂零群的结构进行刻画,推广文献[2]中关于 p-幂零群的结果. 文中所用符号皆为标准的,涉及的群指有限群.

收稿日期:2010-03-25
修回日期:2010-06-29
作者简介:高 辉(1978-),女,讲师,主要从事有限群的研究。

1 预备知识

定义 1[3] 设 G 为有限群,称子群 H 在 G 中弱 c-正规,如果存在 G 的次正规子群 N 使得 $G=HN$,且 $H\cap N\leqslant H_G$.

定义 2[4] $M<\cdot\, G$,若 $G/M_G\in\mathscr{F}$,则称 M 在 G 中 $\mathscr{F}$-正规. 否则称 M 在 G 中 $\mathscr{F}$-反正规.

显然,$G\in\mathscr{F}$ 当且仅当 G 的所有的极大子群在 G 中 $\mathscr{F}$-正规.

定义 3 定义下列集合:$U(G)=\{M<\cdot\, G\mid M$ 在 G 中 $\mathscr{F}$-反正规$\}$. 若 $U(G)\neq\varnothing$, 则定义 $\Phi_u(G)=\cap\{M\mid M\in U(G)\}$. 否则令 $\Phi_u(G)=G$.

引理 1[3] 设 G 为有限群,

(1)若 H 在 G 中 c-正规,则 H 在 G 中弱 c-正规.

(2)若 H 在 G 中弱 c-正规,$H\leqslant K\leqslant G$,则 H 在 K 中弱 c-正规.

(3)设 $T\trianglelefteq G$,且 $T\leqslant H$,则 H 在 G 中弱 c-正规当且仅当 H/T 在 G/T 中弱 c-正规.

引理 2 $\Phi_u(G)\in\mathscr{F}$.

证明 假设命题不真.若 $U(G)=\varnothing$,即对于 G 的每个极大子群 M 均是$\mathscr{F}$-正规,则 $G\in\mathscr{F}$.而 $\Phi_u(G)=G\in\mathscr{F}$,矛盾,故 $U(G)\neq\varnothing$.设 $\Phi_u(G)\neq 1$,则 G 非单.令 N 是 G 的极小正规子群,$\Phi_u(G/N)\in\mathscr{F}$,于是 $\Phi_u(G)N/N\in\mathscr{F}$.若 $N\cap\Phi_u(G)=1$,则 $\Phi_u(G)\in\mathscr{F}$,矛盾.于是 $N\cap\Phi_u(G)\neq 1$,即 $N\leqslant\Phi_u(G)$,从而 $\Phi_u(G)/N\in\mathscr{F}$.因 $\mathscr{F}$ 是饱和群系,所以可设 N 是 G 的唯一极小正规子群.

对于 G 的每个极大子群 M 必属于下面两种情况之一,要么 $G^{\mathscr{F}}\nleqslant M$,要么 $G^{\mathscr{F}}\leqslant M$.对于 $G^{\mathscr{F}}\nleqslant M$ 的所有极大子群,即 $M\in U(G)$,而 $N\leqslant\Phi_u(G)$,故 $N\leqslant M$.对于 $G^{\mathscr{F}}\leqslant M$ 的所有极大子群,因 $N\leqslant G^{\mathscr{F}}$,故 $N\leqslant M$.于是对 G 的所有极大子群 M,均有 $N\leqslant M$,故 $N\leqslant\Phi(G)$.则 $\Phi_u(G)/\Phi(G)\in\mathscr{F}$,所以 $\Phi_u(G)\in\mathscr{F}$,矛盾.

引理 3[4] 如果 H 是 G 的次正规子群,那么 $Soc(G)\leqslant N_G(H)$.

引理 4[5] 设 G 为内 p-幂零群,则

(1)$G=PQ$,P 为 G 的正规 Sylow p子群,Q 为 G 的非正规的循环 Sylow q-子群;

(2)当 $p>2$ 时,$\exp(P)=p$,当 $p=2$ 时,$\exp(P)\leqslant 4$;

(3)若 P 为 Abel 群,则 P 为初等 Abel 群;

(4)$Z(G)=\Phi(G)=\Phi(P)\times\Phi(Q)$.

引理 5[6] 令 G 为一个有限群,那么

(1)对于固定的奇素数 p,假设 G 的一切 p 阶子群均包含在 $Z(G)$ 中,则 G 为 p-幂零;

(2)若 G 的 2 阶及 4 阶元均属于 $Z(G)$,则 G 为 2-幂零.

引理 6[6] 设 G 为一个有限群,p 为一个固定素数,若 G 的任意 4 阶循环子群在 G 中弱 c-正规且 G 的任意 p-阶子群包含在 $Z_\infty(G)$ 中,那么 G p-幂零.

2 主要结果

定理 1 设 $\mathscr{F}$ 是包含 S 的饱和群系,那么有限群 $G\in\mathscr{F}$ 当且仅当 $M\in U(G)$,M 在 G 中弱 c-正规.

证明 必要性显然成立,只证明充分性.假设 $G\notin\mathscr{F}$,并且 G 是一个极小阶反例.若 $U(G)=\varnothing$,则 $\Phi_u(G)=G$.由引理 2 知,$\Phi_u(G)=G\in\mathscr{F}$,矛盾.故 $U(G)\neq\varnothing$,且 $M\in U(G)$.如果 G 是单群,则 G 是弱 c-单群,由此可得 $M=1$,因此 G 是一个素数阶群,从而 $G\in\mathscr{F}$,矛盾.令 N 是 G 的一个极小正规子群,容易验证 G/N 满足定理 1 的条件,则 $G/N\in\mathscr{F}$,因$\mathscr{F}$是饱和群系,故可设 G 有唯一的极小正规子群 N,且 $N\notin\mathscr{F}$,$N\leqslant G^{\mathscr{F}}$.

令 p 是 $|N|$ 的最大素因子,$N_p\in\mathrm{Syl}_p(N)$,则有 $P\in\mathrm{Syl}_p(G)$ 使 $N_p\leqslant P$,即 $N_p=N\cap P$.由 Frattini 论断知 $G=N_G(N_p)N$.由 $N\notin\mathscr{F}$ 及唯一极小正规性得,$N_p<N$ 且 $N_G(N_p)<G$.即 $\exists L<\cdot\, G$ 使 $N_G(N_p)\leqslant L$,于是 $N_G(P)\leqslant N_G(N_p)\leqslant L$,因此 p 不是 $|G:L|$ 的因子.又 $G=LN$,$N\nleqslant L$,$L_G=1$,从而 $G^{\mathscr{F}}\nleqslant L$,即 $L\in U(G)$.由题设知,存在 G 的一个次正规子群 K,使得 $G=LK$,且 $L\cap K\leqslant L_G=1$.于是 $|K|=|G:L|$,从而 p 不整除 $|K|$.设 A 是 G 的极小次正规子群且 $A\subseteq K$,显然 A 为单群,且 $A\cap N\lhd\lhd G$.由 A 是 G 的极小次正规子群得 $A\cap N=1$,或 $A\cap N=A$.如果 $A\nsubseteq N$,那么 $N\cap A=1$.由引理 3 知 $N\subseteq N_G(A)$,因此 $NA=N\times A$ 且 $A\subseteq C_G(N)=1$.此矛盾表明 $A\subseteq N$.因为 $N=A_1\times A_2\times\cdots\times A_t$ 是 G 的非交换单群,且 $A\in\{A_1,A_2,\cdots,A_t\}$.不妨设 $A=A_1$,Q 是 A 的 Sylow$p$-子群,则 $|P|=|Q|^t$,因此 $p\mid |A_i|$,$i=1,2,\cdots,t$,从而 $p\mid |K|=|G:L|$,矛盾.所以极小阶反例不成立,于是 $G\in\mathscr{F}$.

定理 2 设 G 为一个有限群,$H=G^S$ 为 G 的可解剩余,若 H 的极小子群在 G 中弱 c-正规,则 G 可解.

证明 假设定理不成立,G 为极小阶反例.首先条件是子群遗传的.设 K 为 G 的任一个真子群,$K^S\leqslant G^S$,即 K^S 的极小子群为 H 的极小子群.由引理 1 知,K^S 的极小子群在 K 中弱 c-正规,由 $|G|$ 的极小性知,K 可解.若 H 是 2-群,则 H 是可解的,故由 G/H 的可解性及 H 的可解性得 G 可解,矛盾.所以 H 不是 2-群,即有奇素数 $p\mid |H|$.若 H 的 p-阶子群 P 均包含在 G 的中心里,由 $Z(G)\cap H\leqslant Z(H)$,故 $P\subseteq Z(H)$.由引理 5 知,H 为 p-幂零.于是 $H=PK$,其中 K 是 H 的正规 p'-补,所以 $H/K\cong P$ 可解.而 K 可解,故 H 可解.由 G/H 可解得 G 可解,矛盾.故存在 H 的 p-阶元 a 但 $a\notin Z(G)$,则 $C_G(\langle a\rangle)<G$.由 $\langle a\rangle$ 在 G 中弱 c-正规,即存在 $E\lhd\lhd G$,使得 $G=\langle a\rangle E$ 且 $\langle a\rangle\cap E\leqslant\langle a\rangle_G$.若 $\langle a\rangle_G\neq 1$,则 $\langle a\rangle\trianglelefteq G$.由 N/C 定理得,$G/C_G(\langle a\rangle)=N_G(\langle a\rangle)/C_G(\langle a\rangle)\leqslant\mathrm{Aut}(\langle a\rangle)$.因为 $\mathrm{Aut}(\langle a\rangle)$ 是 Abel 群,所以 $G/C_G(\langle a\rangle)$ 可解,于是 G 可解.若 $\langle a\rangle_G=1$,则 $\langle a\rangle\cap E=1$,E 可解,因为 $E\lhd\lhd G$,所以存在 G 的包含 E 的次正规群列:

$$\cdots\leqslant E\leqslant E_1\leqslant E_2\leqslant\cdots\leqslant E_{s-1}\leqslant E_s=G.$$

由于 $E_1=E_1\cap\langle a\rangle E=E(E_1\cap\langle a\rangle)$,于是 $E_1/E=E(E_1\cap\langle a\rangle)/E\cong(E_1\cap\langle a\rangle)$ 可解,而 E 可解,所以 E_1 可解.同理可得 E_2 可解,依次类推,则 G 可解,矛盾.

(下转第 286 页 Continue on page 286)

708.

[3] Bazgan C, Harkat-Benhamdine A, Li H, et al. On the vertex-distinguishing proper edge-colorings of graphs [J]. J of Combin Theory Ser B, 1999, 75(2): 288-301.

[4] Zhang Zhong-fu, Liu Ling-zhong, Wang Jian-fang. Adjacent strong edge coloring of graphs[J]. Applied Mathematics Letters, 2002, 15: 623-626.

[5] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with application [M]. New York: The Macmillan Press Ltd, 1976.

[6] 孙宗剑，黎贞崇，罗海鹏，等. 升降梯图 L_{3m+n+1} 的优美性[J]. 计算机应用研究，2007，24(12)：132-133.

[7] Jia Jie, Chen Jian, Chang Guiran, et al. Find the maximum k-disjoint coverage sets in WSN using genetic algorithm[J]. International Journal of Modeling, Identification and Control, 2010, 9(1/2): 43-52.

[8] 朱洪，陈增武，段振华，等. 算法设计和分析[M]. 上海：上海科学技术文献出版社，1989.

（责任编辑：韦廷宗）

（上接第 283 页 Continue from page 283）

定理 3 设 G 为一个有限群，$H=G^N$ 为 G 的幂零剩余，p 为一个固定素数，若 H 的任意 4 阶循环子群在 G 中弱 c-正规且 H 的任意 p-阶子群包含在 $Z_\infty(G)$ 中，那么 G 为 p-幂零.

证明 假设定理 3 不成立，不访设 G 为极小阶反例. 下面证明群 G 的任意真子群继承定理 3 的条件. 设 K 为 G 的任一个真子群，由归纳法得，$Z_n(G)\cap K\leqslant Z_n(K)$，$\forall\ n\in N$，故 $Z_\infty(G)\cap K\leqslant Z_\infty(K)$. 又 $K^N\leqslant G^N\cap K$，则 K^N 中的任意 p-阶子群包含于 $G^N\cap K\subseteq Z_\infty(G)\cap K\leqslant Z_\infty(K)$. 由引理 1 知，$K^N$ 的任意 4 阶循环子群在 G 在弱 c-正规，从而在 K 中弱 c-正规，故 K 满足定理的假设. 由 $|G|$ 的极小性知，K 为 p-幂零，从而 G 为内 p-幂零. 由引理 4 知，$G=PQ$，$P\lhd G$，$Q\ntriangleleft G$，$P/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群. 因 $G/P\cong Q$ 幂零，故 $H\subseteq P$.

若 $H=P$，则 G 的所有 p-阶子群包含在 $Z_\infty(G)$ 中. 若 $p>2$，则 $\exp(P)=p$，从而 G 为 p-幂零，矛盾. 若 $p=2$，则 $\exp(P)=4$，于是 G 的任意 4 阶循环子群在 G 中弱 c-正规且 G 的任意 p-阶子群包含在 $Z_\infty(G)$ 中，由引理 6 知，G 为 p-幂零，矛盾.

若 $H<P$，则 $HQ<G$，由 G 为内 p-幂零群的性质知 HQ 幂零，于是 $HQ=H\times Q$. 而 $G/H=P/H\times QH/H$，故 $Q\,\mathrm{char}\,QH\lhd G$，则 $Q\lhd G$，即 $G=P\times Q$，矛盾.

参考文献：

[1] Wang Yanming. c-normality of groups and its properties[J]. J Algebra, 1996, 180: 954-965.

[2] 王品超，温凤桐，杨明升，等. 幂零群的若干充分条件[J]. 数学进展，1998，27(4)：331-333.

[3] Zhu L J, Guo W B, Shum K P. Weakly c-normal subgroups of finite groups and their properties[J]. Comm Alg, 2002, 30(11): 5505-5512..

[4] Doerk K, Hawkes T. Finite solvable groups[M]. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.

[5] 陈重穆. 内外-Σ 群与极小非 Σ-群[M]. 重庆：西南师范大学出版社，1988.

[6] 缪龙，於遒，朱路进，等. 极小子群对有限群结构的影响[J]. 扬州大学学报：自然科学版，2003，6(4)：1-3.

（责任编辑：尹　闯）