联图 $P_3 \vee K_{m,n}$ 和 $C_4 \vee K_{m,n}$ 的邻强边色数*

Adjacent Strong Edge Chromatic Number of Join Graph $P_3 \vee K_{m,n}$ and $C_4 \vee K_{m,n}$

孙宗剑[1],罗海鹏[2]
SUN Zong-jian[1],LUO Hai-peng[2]

(1. 河北科技大学理学院,河北石家庄 050018;2. 广西科学院,广西南宁 530007)
(1. College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei, 050018, China;2. Guangxi Academy of Sciences, Nanning, Guangxi, 530007, China)

摘要:设计一个具有分支限界技术的算法来研究联图 $P_3 \vee K_{m,n}$ 和 $C_4 \vee K_{m,n}$ 的 k - 邻强边染色,并证明 $m < n-3$ 时它们的邻强边色数均为 $m+n+3$.

关键词:邻强边色数 k - 邻强边染色 完全二部图 联图
中图法分类号:O157.5;TP18 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2010)04-0284-03

Abstract:An algorithm is designed to search for the k - adjacent strong edge coloring of join graph $P_3 \vee K_{m,n}$ and $C_4 \vee K_{m,n}$ and $\chi'_{as}(P_3 \vee K_{m,n}) = \chi'_{as}(C_4 \vee K_{m,n}) = m+n+3$ is proved when $m < n-3$.

Key words: adjacent strong edge chromatic number, k - adjacent strong edge coloring, complete bipartite graph, join graph

图的染色问题具有重要的实际意义和理论意义,是图论研究的主要内容之一,其基本问题就是确定各种染色法的色数.由网络的权分配提出点可以区别边染色[1~3](或强边染色)之后,文献[4]中又提出了图的邻强边染色的新概念,得到了若干结果,并提出了有关猜想.图的邻强边染色问题可以应用到计算机科学及通讯信号的研究中,与信息科学有密切的联系.本文设计一个具有分支限界技术的算法来研究联图的 k - 邻强边染色,给出了路 P_3 与完全二部图 $K_{m,n}$ 的联图 $P_3 \vee K_{m,n}$,圈 C_4 与完全二部图 $K_{m,n}$ 的联图 $C_4 \vee K_{m,n}$ 的邻强边色数.

1 定义及引理

定义 1[5] 设 G 和 H 是两个不相交的图,称顶点集和边集分别为 $V=V(G) \cup V(H)$ 与 $E=E(G) \cup E(H) \cup \{uv \mid u \in V(G), v \in V(H)\}$ 的图为 G 和 H 的联图,简记为 $G \vee H$.

定义 2[5] 无环图 $G(V,E)$ 的各边对于 k 种颜色 $1,2,\cdots,k$ 的一个分配称为图 G 的一个 k 边染色.若没有相邻的两条边有相同的颜色,则称其为 k - 正常边染色.

定义 3[4] 对图 $G(V,E)$,其 k - 正常边染色 f 若使任意 $uv \in E(G)$ 有 $C(u) \neq C(v)$,其中 $C(u) = \{f(uv) \mid uv \in E(G)\}$,则称 f 为 $G(V,E)$ 的 k - 邻强边染色,简称 k - $ASEC$;并称 $\chi'_{as}(G) = \min\{k \mid G$ 的 k - $ASEC\}$ 为 G 的邻强边色数.

由定义 3,显然有以下引理.

引理 1[4] 对于 $V(G) \geqslant 3$ 的简单连通图 G,若有两个相邻的最大度顶点,则

$$\chi'_{as}(G) \geqslant \Delta(G)+1,$$

其中 $\Delta(G)$ 为 G 的最大度.

引理 2[4] 对于完全二部图 $K_{m,n}(1 \leqslant m \leqslant n)$,

$$\chi'_{as}(K_{m,n}) = \begin{cases} n, & \text{当 } m < n, \\ n+2, & \text{当 } m = n \geqslant 2. \end{cases}$$

文中未加说明的术语与记号参见文献[1,4,5].

2 邻强边染色算法

对于联图 $P_3 \vee K_{m,n}$,易知 $\Delta(P_1 \vee K_{m,n}) = m+n+2$,$\chi'_{as}(P_1 \vee K_{m,n}) \geqslant m+n+3$.我们利用分支限界

收稿日期:2010-08-24
作者简介:孙宗剑(1980-),男,讲师,主要从事组合数学研究。
*国家自然科学基金项目(10901045,10926054,11001073),河北自然科学基金项目(A2010000828)资助。

界技术[6~8]设计一个算法,对较小的 m,n,用该算法探索一些特殊的 $P_3 \vee K_{m,n}$ 的邻强边染色方法和邻强边染色规律. 步骤如下:

(1)输入 m,n;

(2)在 $1,2,\cdots,m+n+3$ 中选 $m+n+2$ 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_{m+n+2}$;

(3)给出边 $w_2u_i,w_2v_j,w_1w_2,w_2w_3$ 到 $a_i(i=1,2,\cdots,m+n+2)$ 的一个一一对应;

(4)在 $1,2,\cdots,m+n+3$ 中选 $m+n+1$ 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_{m+n+1}$;

(5)给出边 w_3u_i,w_3v_j,w_3w_4 到 $a_i(i=1,2,\cdots,m+n+1)$ 的一个一一对应,若 $C(w_2)=C(w_3)$,则转步骤(4),否则,转步骤(6);

(6)给出边 $u_iv_j,w_ku_i,w_kv_j(k=1,4;i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 到 $\{1,2,\cdots,m+n+3\}$ 的一个对应 f,若 $f(u_ix)=f(u_iy)(x,y\in\{w_1,w_2,w_3,w_4,v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 且 $x\neq y;i=1,2,\cdots,m;)$,或 $f(v_ix)=f(v_iy)(x,y\in\{w_1,w_2,w_3,w_4,u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ 且 $x\neq y;i=1,2,\cdots,n;)$,则转步骤(7);

(7)找到了一个 $(m+n+3)$-邻强边染色方法,输出所有边的染色,转步骤(2)到下一个对应,寻找下一个 $(m+n+3)$-邻强边染色方法.

通过这个算法,我们上计算机计算,获得了一些特殊图的邻强边染色方法,对这些染色方法进行分析,我们获得了 $m<n-3$ 时 $P_3\vee K_{m,n}$ 和 $C_4\vee K_{m,n}$ 的邻强边染色方法,从而得到它们的邻强边色数.

3 主要结果

定理 1 对于联图 $P_3\vee K_{m,n}$,$m<n-3$ 时,$\chi'_{as}(P_3\vee K_{m,n})=m+n+3$.

证明 由于 $\Delta(P_3\vee K_{m,n})=m+n+2$,且 $P_3\vee K_{m,n}$ 的两个最大度顶点相邻,由引理 1 可知 $\chi'_{as}(P_3\vee K_{m,n})\geqslant m+n+3$. 要证明 $\chi'_{as}(P_3\vee K_{m,n})=m+n+3$,只需给出 $P_3\vee K_{m,n}$ 的一个$(m+n+3)$-邻强边染色.

为叙述方便,令 $K_{m,n}$ 的两个独立集分别是 $\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ 和 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,$P_3=w_1w_2w_3w_4$,$S=\{1,2,\cdots,m+n+3\}$. 下面分两种情况讨论.

(i)当 $m<n-3$ 时,分 3 个步骤构造 $P_3\vee K_{m,n}$ 的一个$(m+n+3)$-邻强边染色.

步骤 1 对 $K_{m,n}$ 的边进行如下染色:$f(u_iv_j)=n+i+j-1,i=1,2,\cdots,m;j=1,2,3,4$; $f(u_iv_j)=(i+j-1)\bmod n,i=1,2,\cdots,m;j=5,6,\cdots,n$.

步骤 2 对边 $w_iu_j(i=1,2,3,4;j=1,2,\cdots,m)$,$w_iv_j(i=1,2,3,4;j=1,2,\cdots,n)$ 进行如下染色:

$f(w_iu_j)=i+j-1,i=1,2,3,4;j=1,2,\cdots,m$;

$f(w_iv_j)=m+i+j-1,i=1,2,3,4;j=1,2,\cdots,n$.

步骤 3 对 P_3 的边进行如下染色:$f(w_1w_2)=m+n+3$;$f(w_2w_3)=1$;$f(w_3w_4)=2$.

由定义 2 可知 f 是 $P_3\vee K_{m,n}$ 的$(m+n+3)$-正常边染色.

(ii)又 $C(u_i)=\{1,2,\cdots,n,n+i,n+i+1,n+i+2,n+i+3\},i=1,2,\cdots,m$;

$C(v_i)=\{n+i,n+i+1,\cdots,n+m+i-1,m+i,m+i+1,m+i+2,m+i+3\},i=1,2,3,4$;

$C(v_i)=\{i,(i+1)\bmod n,(i+2)\bmod n,\cdots,(i+m-1)\bmod n,m+i,m+i+1,m+i+2,m+i+3\}$, $i=5,6,\cdots,n$;

$C(w_1)=\{1,2,\cdots,m+n,m+n+3\}$;

$C(w_2)=\{1,2,\cdots,m+n+1,m+n+3\}=S-\{m+n+2\}$;

$C(w_3)=\{1,2,\cdots,m+n+2\}=S-\{m+n+3\}$;

$C(w_4)=\{2,4,5,\cdots,m+n+3\}$.

由定义 3 可知 f 是$C_3\vee K_{m,n}$ 的$(m+n+3)$-邻强边染色.

综上可知,$m<n-3$ 时,$\chi'_{as}(P_3\vee K_{m,n})=m+n+3$.

定理 2 对于联图 $C_4\vee K_{m,n}$,$m<n-3$ 时 $\chi'_{as}(C_4\vee K_{m,n})=m+n+3$.

证明 由于 $\Delta(C_4\vee K_{m,n})=m+n+2$,且 $C_4\vee K_{m,n}$ 的最大度顶点两两相邻,由引理 1 可知 $\chi'_{as}(C_4\vee K_{m,n})\geqslant m+n+3$. 要证明 $\chi'_{as}(C_4\vee K_{m,n})=m+n+3$,只需要给出 $C_4\vee K_{m,n}$ 的一个$(m+n+3)$-邻强边染色.

令 $K_{m,n}$ 的两个独立集分别是 $\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ 和 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,$C_4=w_1w_2w_4w_3w_1$,$S=\{1,2,\cdots,m+n+3\}$.

当 $m<n-3$ 时,令边 $u_iv_j(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 的染色同 $P_3\vee K_{m,n}$.

$f(w_1w_2)=m+n+2$;$f(w_2w_4)=1$;$f(w_4w_3)=2$;$f(w_3w_1)=m+n+3$.

综上可知,$m<n-3$ 时,$\chi'_{as}(C_4\vee K_{m,n})=m+n+3$.

参考文献:

[1] Burris A C, Schelp R H. Vertex-distinguishing proper edge-colorings[J]. J of Graph Theory, 1997, 26(2): 73-82.

[2] 张忠辅,李敬文,陈祥恩,等. 图的距离不大于 β 的任意两点可区别的边染色[J]. 数学学报, 2006, 49(3): 703-

708.

[3] Bazgan C, Harkat-Benhamdine A, Li H, et al. On the vertex-distinguishing proper edge-colorings of graphs [J]. J of Combin Theory Ser B,1999,75(2):288-301.

[4] Zhang Zhong-fu,Liu Ling-zhong,Wang Jian-fang. Adjacent strong edge coloring of graphs[J]. Applied Mathematics Letters,2002,15:623-626.

[5] Bondy J A,Murty U S R. Graph theory with application [M]. New York:The Macmillan Press Ltd, 1976.

[6] 孙宗剑,黎贞崇,罗海鹏,等. 升降梯图 L_{3m+n+1} 的优美性[J]. 计算机应用研究,2007,24(12):132-133.

[7] Jia Jie,Chen Jian,Chang Guiran,et al. Find the maximum k-disjoint coverage sets in WSN using genetic algorithm[J]. International Journal of Modeling, Identification and Control,2010,9(1/2):43-52.

[8] 朱洪,陈增武,段振华,等. 算法设计和分析[M]. 上海:上海科学技术文献出版社,1989.

(责任编辑:韦廷宗)

(上接第 283 页 Continue from page 283)

定理 3 设 G 为一个有限群,$H=G^N$ 为 G 的幂零剩余,p 为一个固定素数,若 H 的任意 4 阶循环子群在 G 中弱 c-正规且 H 的任意 p-阶子群包含在 $Z_\infty(G)$ 中,那么 G 为 p-幂零.

证明 假设定理 3 不成立,不访设 G 为极小阶反例. 下面证明群 G 的任意真子群继承定理 3 的条件. 设 K 为 G 的任一个真子群,由归纳法得,$Z_n(G)\cap K\leqslant Z_n(K)$,$\forall\ n\in N$,故 $Z_\infty(G)\cap K\leqslant Z_\infty(K)$. 又 $K^N\leqslant G^N\cap K$,则 K^N 中的任意 p-阶子群包含于 $G^N\cap K\subseteq Z_\infty(G)\cap K\leqslant Z_\infty(K)$. 由引理 1 知,$K^N$ 的任意 4 阶循环子群在 G 在弱 c-正规,从而在 K 中弱 c-正规,故 K 满足定理的假设. 由 $|G|$ 的极小性知,K 为 p-幂零,从而 G 为内 p-幂零. 由引理 4 知,$G=PQ$,$P\lhd G$,$Q\ntriangleleft G$,$P/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群. 因 $G/P\cong Q$ 幂零,故 $H\subseteq P$.

若 $H=P$,则 G 的所有 p-阶子群包含在 $Z_\infty(G)$ 中. 若 $p>2$,则 $\exp(P)=p$,从而 G 为 p-幂零,矛盾. 若 $p=2$,则 $\exp(P)=4$,于是 G 的任意 4 阶循环子群在 G 中弱 c-正规且 G 的任意 p-阶子群包含在 $Z_\infty(G)$ 中,由引理 6 知,G 为 p-幂零,矛盾.

若 $H<P$,则 $HQ<G$,由 G 为内 p-幂零群的性质知 HQ 幂零,于是 $HQ=H\times Q$. 而 $G/H=P/H\times QH/H$,故 $Q\,\mathrm{char}\,QH\lhd G$,则 $Q\lhd G$,即 $G=P\times Q$,矛盾.

参考文献:

[1] Wang Yanming. c-normality of groups and its properties[J]. J Algebra,1996,180:954-965.

[2] 王品超,温凤桐,杨明升,等. 幂零群的若干充分条件[J]. 数学进展,1998,27(4):331-333.

[3] Zhu L J,Guo W B,Shum K P. Weakly c-normal subgroups of finite groups and their properties[J]. Comm Alg,2002,30(11):5505-5512..

[4] Doerk K,Hawkes T. Finite solvable groups[M]. Berlin, New York:Walter de Gruyter,1992.

[5] 陈重穆. 内外-Σ 群与极小非 Σ-群[M]. 重庆:西南师范大学出版社,1988.

[6] 缪龙,於遒,朱路进,等. 极小子群对有限群结构的影响[J]. 扬州大学学报:自然科学版,2003,6(4):1-3.

(责任编辑:尹　闯)