

# 双圈图 Laplacian 矩阵的谱\* Laplacian Matrix Spectra of Bicyclic Graphs

乔晓云, 郑学谦

QIAO Xiao-yun, ZHENG Xue-qian

(山西大学商务学院理学系, 山西太原 030031)

(Department of Mathematics and Physics, Bussiness College of Shanxi University, Taiyuan, Shanxi, 030031, China)

**摘要:** 分析双圈图的 Laplacian 矩阵谱和匹配数之间的关系, 得到双圈图 Laplacian 矩阵特征值的分布情况, 并利用线图理论给出两个圈均为偶圈的双圈图次大特征值的一种理论求法.

**关键词:** 双圈图 Laplacian 矩阵 特征值 匹配

**中图分类号:** O157.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 1005-9164(2010)04-0292-03

**Abstract:** This paper discusses the relation between the matching number and Laplacian matrix spectra of a bicyclic graph, and the distribution of eigenvalue of Laplacian matrix of a bicyclic graph is given. Besides, with the line graph theory, we give a method to calculate the second largest eigenvalue of a bicyclic graph, of which both cycles are even.

**Key words:** bicyclic graph, Laplacian matrix, eigenvalue, matching

研究图的 Laplacian 矩阵谱和图的不变量之间的关系有重要的图论意义, 而且这些关系在物理、化学、生物和计算机领域有着广泛的应用<sup>[1]</sup>. 双圈图的 Laplacian 矩阵谱的研究报道并不多, 邓汉元<sup>[2]</sup>对其进行过一些初步研究, 并给出了一些结论: 对  $n$  阶双圈图  $B_n$ , 有  $\lambda_1(B_n) \leq n$ , 且  $\lambda_1(B_n) = n$  当且仅当  $B_n \cong S_n^3$ , 其中  $S_n^3$  为在星图  $K_{1, n-1}$  中添加 2 条不相邻的、连接它的 2 个 1 度顶点的边所得到的图.

本文讨论双圈图的 Laplacian 矩阵谱与其匹配数之间的关系, 并给出双圈图的 Laplacian 矩阵次大特征值的一种理论求法.

## 1 预备知识

设  $G=(V, E)$  是  $n$  阶简单图, 其顶点集为  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 边集为  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ,  $d_G(v_i)$  为顶点  $v_i$  在图  $G$  中的度数, 简记为  $d_i$ .  $A(G)$  和  $D(G) = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  分别是图  $G$  的邻接矩阵和度对角矩阵. 图  $G$  的 Laplacian 矩阵定义为  $L(G)$

$= D(G) - A(G)$ . 对图  $G$  的每一条边, 取其中一条边的一个端点为始点, 另一个端点为终点, 这一过程称为给图  $G$  一个定向. 当图  $G$  取定一定方向, 其定向关联矩阵定义为  $Q(G) = (q_{ij})_{n \times m}$  时, 其中

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } v_i \text{ 是边 } e_j \text{ 的始点,} \\ -1, & \text{当 } v_i \text{ 是边 } e_j \text{ 的终点,} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$L(G) = Q(G)Q^T(G)$  且  $L(G)$  与图  $G$  的定向无关<sup>[3]</sup>. 容易证明  $L(G)$  是一个半正定的实对称矩阵, 而且它的每一行的行和为 0, 从而可以假设它的特征值按照从大到小的顺序排列为  $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G) = 0$ ,  $\lambda_k(G)$  表示图  $G$  的 Laplacian 矩阵的第  $k$  大特征值. 特别地, 称  $\lambda_1(G)$  为图  $G$  的 Laplacian 矩阵的谱半径.

图  $G$  的两条边如果不相邻, 则称其两边独立, 互相独立边的集合称为图  $G$  的一个匹配, 包含边数最多的匹配称为图  $G$  的最大匹配, 记为  $M(G)$ , 其所含边数记为  $\mu(G)$ . 如果图  $G$  的最大匹配  $M(G)$  满足  $2\mu(G) = n = |V(G)|$ , 则称  $M(G)$  为图  $G$  的一个完美匹配. 用  $\rho$  表示一个实数区间,  $m_G(\rho)$  表示  $L(G)$  矩阵的特征值落在  $\rho$  中的个数 (重根也计算在内),  $m_G(\lambda)$  表示  $\lambda$  作为  $L(G)$  特征根的重数.  $P_2$  表示含有两个顶点的路.

收稿日期: 2010-02-08

修回日期: 2010-08-29

作者简介: 乔晓云 (1982-), 女, 助教, 主要从事图论研究.

\* 山西大学商务学院科研基金项目 (LX2010036) 资助.

双圈图是指边数比顶点数多一的简单连通图,记 \$n\$ 阶双圈图为 \$B\_n\$. 圈长是偶数或奇数的圈分别称为偶圈或奇圈. 文中其它未被定义的术语可以参考文献 [3].

设 \$G\$ 为 \$n\$ 阶简单图, \$G' = G + e, V(G') = V(G)\$, 即图 \$G'\$ 是由图 \$G\$ 插入一条新边所得到的图; \$E\_1\$ 是 \$E(G)\$ 的子集, 且 \$|E\_1| = k, G''\$ 是由 \$G\$ 去掉所有属于 \$E\_1\$ 中的边得到的 \$G\$ 的生成子图.

**引理 1**<sup>[1]</sup> 图 \$G'\$ 和图 \$G\$ 的 Laplacian 矩阵的特征值有如下关系:

$$\lambda_1(G') \geq \lambda_1(G) \geq \lambda_2(G') \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G') = \lambda_n(G) = 0.$$

**引理 2**<sup>[4]</sup> 设 \$T\_n\$ 为 \$n\$ 阶树, \$M(T\_n)\$ 是 \$T\_n\$ 的完美匹配, 则 (1) \$\lambda\_{\mu(T\_n)}(T\_n) = \lambda\_{n/2}(T\_n) = 2\$; (2) \$\lambda\_{\mu(T\_n)+1}(T\_n) = \lambda\_{(n/2)+1}(T\_n) < 2\$.

**引理 3**<sup>[5]</sup> 设 \$T\_n\$ 为 \$n\$ 阶树, 则 \$\lambda\_k(T\_n) \leq \lceil \frac{n}{k} \rceil\$, 等号成立当且仅当 \$k < n, k | n\$, 并且 \$T\_n\$ 的支撑子图由 \$k\$ 个不相交的 \$K\_{1, \frac{n}{k}-1}\$ 组成.

**引理 4**<sup>[6]</sup> \$\lambda\_{i+k}(G) \leq \lambda\_i(G'') \leq \lambda\_i(G)\$, 其中 \$i = 1, 2, \dots, n-k\$.

**引理 5**<sup>[7]</sup> 设 \$T\_n\$ 为 \$n\$ 阶树, 如果 \$\lambda > 1\$ 是 \$L(T\_n)\$ 的整数特征值, \$\lambda\$ 对应的特征向量是 \$\mu\$, 则 (1) \$\lambda | n\$; (2) \$m\_{T\_n}(\lambda) = 1\$; (3) 向量 \$\mu\$ 的每个坐标都不为 0.

**引理 6**<sup>[1]</sup> 设 \$G\$ 是 \$n\$ 阶连通图, 则

(1) \$\lambda\_1(G) \leq n, \lambda\_1(G) = n\$ 当且仅当 \$G\$ 的补图 \$\bar{G}\$ 是不连通的;

(2) \$\lambda\_1(G) \leq d\_1 + d\_2\$;

(3) \$\lambda\_1(G) \geq d\_1 + 1, \lambda\_1(G) = d\_1 + 1\$ 当且仅当 \$d\_1 = n - 1\$.

**引理 7**<sup>[3]</sup> 一个非平凡图 \$G\$ 是二部图, 当且仅当 \$G\$ 不含奇圈.

**引理 8**<sup>[8]</sup> 设 \$G\$ 是 \$n\$ 阶二部图, 则 \$L(G)\$ 与 \$L(G) + 2A(G)\$ 有相同的谱.

**引理 9**<sup>[9]</sup> 设 \$G\$ 为 \$n(n \geq 3)\$ 个顶点的简单连通图, \$L\_G\$ 为 \$G\$ 的线图, 则 \$-1 \leq \lambda\_2(A(L\_G)) \leq n - 4\$.

## 2 主要结果

**定理 1** 设 \$B\_n\$ 为 \$n\$ 阶双圈图, \$M(B\_n)\$ 是 \$B\_n\$ 的一个完美匹配, 则有 (1) \$\lambda\_{\mu(B\_n)}(B\_n) = \lambda\_{n/2}(B\_n) \geq 2\$; (2) \$\lambda\_{\mu(B\_n)+1}(B\_n) = \lambda\_{(n/2)+1}(B\_n) \leq 3\$, (3) \$\lambda\_{\mu(B\_n)+2}(B\_n) = \lambda\_{(n/2)+2}(B\_n) \leq 2\$; (4) \$\lambda\_{\mu(B\_n)+3}(B\_n) = \lambda\_{(n/2)+3}(B\_n) < 2\$.

**证明** 因为 \$B\_n\$ 连通且存在完美匹配, 所以存在 \$e\_1, e\_2 \in E(B\_n), e\_1, e\_2 \notin M(B\_n)\$, 且 \$e\_1, e\_2\$ 分别在两个不同的圈上, 使得 \$B\_n - e\_1 - e\_2\$ 是树且 \$M(B\_n) = M(B\_n - e\_1 - e\_2) \cup \{e\_1, e\_2\}\$.

$$-e_1) = M(B_n - e_1 - e_2).$$

(1) 由引理 1 和引理 2 得 \$\lambda\_{\mu(B\_n)}(B\_n) = \lambda\_{\mu(B\_n-e\_1)}(B\_n) \geq \lambda\_{\mu(B\_n-e\_1)}(B\_n - e\_1) = \lambda\_{\mu(B\_n-e\_1-e\_2)}(B\_n - e\_1) \geq \lambda\_{\mu(B\_n-e\_1-e\_2)}(B\_n - e\_1 - e\_2) = 2\$, 又因为 \$2\mu(B\_n) = n\$, 所以 \$\mu(B\_n) = \frac{n}{2}\$, 所以 \$\lambda\_{\mu(B\_n)}(B\_n) = \lambda\_{n/2}(B\_n) \geq 2\$.

(2) 当 \$n \geq 6\$ 时, 由引理 3 得 \$\lambda\_{(n/2)-1}(B\_n - e\_1 - e\_2) \leq \lceil \frac{n}{(n/2)-1} \rceil = \lceil 2 + \frac{4}{n-2} \rceil = 3\$. 又由引理 4 得

$$\lambda_{\mu(B_n)+1}(B_n) = \lambda_{(n/2)+1}(B_n) \leq \lambda_{(n/2)-1}(B_n - e_1 - e_2) \leq 3.$$

当 \$n < 6\$ 时, 由于 \$B\_n\$ 是具有完美匹配的双圈图, 所以 \$B\_n\$ 只能是图 \$B^\*\$ (图 1) 经计算得 \$\lambda\_3(B^\*) = 2\$, 所以 \$\lambda\_{\mu(B\_n)+1}(B\_n) = \lambda\_{(n/2)+1}(B\_n) \leq 3\$.

(3) 由引理 2 和引理 4 得 \$\lambda\_{\mu(B\_n)+2}(B\_n) \leq \lambda\_{\mu(B\_n)}(B\_n - e\_1 - e\_2) = \lambda\_{\mu(B\_n-e\_1-e\_2)}(B\_n - e\_1 - e\_2) = 2\$, 所以 \$\lambda\_{\mu(B\_n)+2}(B\_n) = \lambda\_{(n/2)+2}(B\_n) \leq 2\$.

(4) 由引理 4 得 \$\lambda\_{\mu(B\_n)+3}(B\_n) = \lambda\_{\mu(B\_n-e\_1)+3}(B\_n) \leq \lambda\_{\mu(B\_n-e\_1)+2}(B\_n - e\_1) = \lambda\_{\mu(B\_n-e\_1-e\_2)+2}(B\_n - e\_1) \leq \lambda\_{\mu(B\_n-e\_1-e\_2)+1}(B\_n - e\_1 - e\_2)\$. 又由引理 2 得 \$\lambda\_{\mu(B\_n-e\_1-e\_2)+1}(B\_n - e\_1 - e\_2) < 2\$, 所以 \$\lambda\_{\mu(B\_n)+3}(B\_n) = \lambda\_{(n/2)+3}(B\_n) < 2\$.

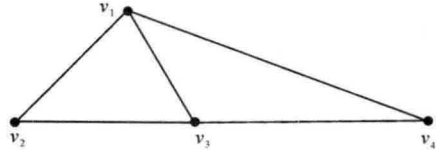


图 1 图 \$B^\*\$

Fig. 1 Figure \$B^\*\$

**推论 1** 设 \$B\_n\$ 为 \$n\$ 阶双圈图, \$M(B\_n)\$ 是 \$B\_n\$ 的一个完美匹配, 则 \$\mu(B\_n) + 2 = \frac{n}{2} + 2 \geq m\_{B\_n}([2, n]) \geq \frac{n}{2} = \mu(B\_n)\$.

**定理 2** 设 \$B\_n\$ 为 \$n\$ 阶双圈图, 如果 \$n > 2\mu(B\_n)\$, 则 \$m\_{B\_n}([2, n]) \geq \mu(B\_n)\$.

**证明** 因为 \$B\_n\$ 可以由 \$n - 2\mu(B\_n)\$ 个孤立点和 \$\mu(B\_n)\$ 条两点路再添加若干条边得到, 而且 \$\lambda\_1(P\_2) = 2\$, 所以 \$\lambda\_1((n - 2\mu(B\_n))K\_1 \cup \mu(B\_n)P\_2) = 2\$, 且 2 的重数为 \$\mu(B\_n)\$, 所以 \$\lambda\_{\mu(B\_n)}((n - 2\mu(B\_n))K\_1 \cup \mu(B\_n)P\_2) = 2\$.

取 \$e\_1, e\_2 \in E(B\_n)\$ 但 \$e\_1, e\_2 \notin M(B\_n)\$, 且 \$e\_1, e\_2\$ 分别在两个不同的圈上, 则 \$B\_n - e\_1 - e\_2\$ 是树, 且 \$\mu(B\_n - e\_1 - e\_2) = \mu(B\_n)\$.

(1) 当 \$n\$ 为奇数时, 由引理 5 知 2 不是 \$B\_n - e\_1 - e\_2\$ 的特征值, 再反复应用引理 1 可得 \$\lambda\_{\mu(B\_n)}(B\_n) \geq \lambda\_{\mu(B\_n)}(B\_n - e\_1 - e\_2) \geq \lambda\_{\mu(B\_n)}((n - 2\mu(B\_n))K\_1 \cup \mu(B\_n)P\_2) = 2\$. 所以 \$\lambda\_{\mu(B\_n)}(B\_n) \geq \lambda\_{\mu(B\_n)}(B\_n - e\_1 - e\_2)\$

$> 2$ , 即  $\lambda_{\mu(B_n)}(B_n) > 2$ .

(2) 当  $n$  为偶数时, 因为  $n > 2\mu(B_n)$ , 所以存在  $v \notin V(M(B_n - e_1 - e_2))$ .

(i) 当  $d_{(B_n - e_1 - e_2)}(v) = d_v = 1$  时, 由  $n$  为偶数知  $|V(B_n - e_1 - e_2 - v)| = n - 1$  为奇数, 由(1)的证明过程可知  $\lambda_{\mu(B_n - e_1 - e_2 - v)}(B_n - e_1 - e_2 - v) > 2$ . 又因为  $\mu(B_n - e_1 - e_2 - v) = \mu(B_n)$ , 所以  $\lambda_{\mu(B_n)}(B_n - e_1 - e_2 - v) > 2$ .

再因为在图中加入一个孤立点  $v$  所得的新图与原图有相同的非零特征值, 所以  $\lambda_{\mu(B_n)}((B_n - e_1 - e_2 - v) \cup v) = \lambda_{\mu(B_n)}(B_n - e_1 - e_2 - v) > 2$ , 反复应用引理 1 可得  $\lambda_{\mu(B_n)}(B_n) > 2$ .

(ii) 当  $d_{(B_n - e_1 - e_2)}(v) = d_v \geq 2$  时, 由于  $B_n - e_1 - e_2$  是树, 且  $d_v \geq 2$ , 所以  $v$  是割点. 所以  $B_n - e_1 - e_2 - v = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_{d_v}$ , 其中  $T_i (1 \leq i \leq d_v)$  是连通分支.

又因为  $|V(B_n - e_1 - e_2 - v)| = n - 1$  是奇数, 所以一定存在某个  $|V(T_j)| (1 \leq j \leq d_v)$  是奇数, 所以  $|V(B_n - e_1 - e_2 - V(T_j))|$  是奇数, 由(1)的证明过程可知  $\lambda_{\mu(T_j)}(T_j) > 2$  且  $\lambda_{\mu(B_n - e_1 - e_2 - V(T_j))}(B_n - e_1 - e_2 - V(T_j)) > 2$ . 所以  $\lambda_{(\mu(T_j) + \mu(B_n - e_1 - e_2 - V(T_j)))}((B_n - e_1 - e_2 - V(T_j)) \cup T_j) > 2$ .

又因为  $e_1, e_2 \notin M(B_n), v \notin V(M(B_n - e_1 - e_2))$ , 所以  $\mu(B_n - e_1 - e_2) = \mu(T_j) + \mu(B_n - e_1 - e_2 - V(T_j))$ . 反复应用引理 1 得  $\lambda_{\mu(B_n - e_1 - e_2)}(B_n - e_1 - e_2) > 2, \lambda_{\mu(B_n)}(B_n) > 2$ .

综合(1), (2) 可知  $m_{B_n}([2, n]) \geq \mu(B_n)$ .

**定理 3** 设  $B_n$  是  $n$  阶双圈图.

(1) 若  $B_n$  含有割点, 令  $v$  为  $B_n$  的割点,  $B_n - v = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_t (2 \leq t \leq d_v), S_i (1 \leq i \leq t)$  是  $B_n - v$  的连通分支, 则  $\lambda_2(B_n) \leq s + 1$ , 其中

$$s = \max \{ |V(S_1)|, |V(S_2)|, \dots, |V(S_t)| \}.$$

(2) 若  $B_n = B^*$  (图 1) 时,  $B_n$  不含割点, 令  $v$  为  $B_n$  的任一顶点, 则  $\lambda_2(B_n) = s + 1$ , 其中  $s = |V(B_n - v)|$ .

**证明** (1) 若  $B_n$  含有割点  $v$ , 令  $L(B_n - v)$  为  $L(B_n)$  去掉割点  $v$  对应的行和列所得的矩阵.  $L(B_n - v)$  的最大特征值记为  $a$ , 由柯西插值不等式得  $\lambda_1(B_n) \geq a \geq \lambda_2(B_n)$ . 令  $C_i = \{V(S_i), v\}, G_i = B_n[C_i]$  表示由  $C_i$  导出的  $B_n$  子图, 其中  $1 \leq i \leq t. L(G_i - v)$  表示  $L(G_i)$  去掉点  $v$  对应的行和列, 则  $L(B_n - v)$  是  $L(G_i - v)$  的直和, 所以一定存在某个  $k$ , 使得  $\lambda_1(G_k - v) =$

$a$ , 其中  $1 \leq k \leq t$ , 再由柯西插值不等式得  $\lambda_1(G_k) \geq a$ . 又因为  $|V(G_k)| \leq s + 1$ , 由引理 6 知  $\lambda_1(G_k) \leq |V(G_k)|$ , 所以  $a \leq s + 1$ , 所以  $\lambda_2(B_n) \leq s + 1$ .

(2) 若  $B_n = B^*$  时, 割点不存在,  $\forall v \in V(B^*), B^* - v$  仍然连通, 即  $B^* - v$  只有一个连通分支, 且  $s = 3$ . 经计算知  $\lambda_2(B^*) = 4 = s + 1$ .

**定理 4** 设  $B_n$  是两个圈均为偶圈的双圈图, 其关联矩阵为  $B(B_n), B_n$  的线图为  $M, M$  的邻接矩阵的次大特征值为  $m_2$ , 则  $\lambda_2(B_n) = 2 + m_2$ .

**证明** 设  $K(B_n) = B^T(B_n)B(B_n)$ , 由  $L(B_n) + 2A(B_n) = B(B_n)B^T(B_n)$  可得  $K(B_n)$  与  $L(B_n) + 2A(B_n)$  有相同的非零谱. 又由引理 7 和引理 8 知  $L(B_n)$  与  $L(B_n) + 2A(B_n)$  有相同的谱, 所以  $L(B_n)$  与  $K(B_n)$  有相同的非零谱. 又因为  $K(B_n) = 2I_n + A(M)$ , 所以  $\lambda_2(B_n) = \lambda_2(K(B_n)) = \lambda_2(2I_n + A(M)) = 2 + m_2$ .

**推论 2** 设  $B_n$  是两个圈均为偶圈的双圈图, 则  $1 \leq \lambda_2(B_n) \leq n - 2$ .

**参考文献:**

- [1] Merris R. Laplacian matrices of graphs: a survey[J]. Linear Algebra and Its Application, 1994, 197-198: 143-176.
- [2] 邓汉元. 双圈图的 Laplace 谱半径[J]. 湖南师范大学学报: 自然科学版, 2002, 25(1): 1-3.
- [3] J A 邦迪. 图论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1984.
- [4] Guo Jiming, Tan Shangwang. A relation between the matching number and Laplacian spectrum of graph[J]. Linear Algebra and Its Application, 2001, 325: 71-74.
- [5] Guo Jiming. The  $k$ th Laplacian eigenvalue of a tree[J]. Journal of Graph Theory, 2006, 24(3): 51-57.
- [6] Yuan Xiyang. On the algebraic connectivity of bicyclic graphs[J]. 黑龙江大学学报: 自然科学版, 2007, 24(4): 451-454.
- [7] Rrone R, Merris R, Sunder V S. The Laplacian of a graph[J]. SIAMJ Matrix Anal Appl, 1990, 11(2): 218-238.
- [8] 殷剑宏. 二分图的 Laplace 矩阵的最大特征值[J]. 合肥工业大学学报: 自然科学版, 2004, 27(8): 952-955.
- [9] Chen Yan. Properties of spectra of graphs and line graphs[J]. Appl Math, 2002, 17(3): 371-379.

(责任编辑: 尹 闯)