约束条件中含有三角模糊数的线性规划求解方法*

Solution to Linear Programming with Triangle Fuzzy Numbers in Restricted Condition

王中兴[1],李　健[2]
WANG Zhong-xing[1], LI Jian[2]

(1.广西大学数学与信息科学学院,广西南宁　530004;2.广西大学行健文理学院,广西南宁　530004)

(1. School of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China; 2. Xingjian College of Science and Liberal Arts, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要:采用一种新的模糊数排序方法,将约束条件中含有三角模糊数的模糊线性规划转化为经典的线性规划,进而求得原模糊线性规划的最优解.实际应用实例显示,该求解方法是有效可行的,可以为解决模糊线性规划问题提供一种新的途径.

关键词:三角模糊数　排序　模糊线性规划

中图法分类号:O159,O221.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2010)04-0295-03

Abstract: Fuzzy linear programming with triangle fuzzy numbers in restricted condition is transformed into classical linear programming by using a new ranking criterion of fuzzy numbers, and an optimal solution is obtained. Moreover, effective application of this method is illustrated by an example, which can provide a new approach for decision makers in dealing with the fuzzy linear programming.

Key words: triangle fuzzy numbers, ranking, fuzzy linear programming

在实际生活中,许多优化问题都可以归结为具有模糊系数的线性规划问题.国内外众多学者对于求解模糊线性规划的问题给出了多种算法.利用模糊数排序准则,将模糊不等式或模糊等式转化为确定不等式或确定等式是一个研究的热点.文献[1～3]对给定的隶属度,通过求解各个子规划给出一种可行的求解方法;文献[4～7]利用所定义的模糊数序关系,将模糊线性规划问题转换成普通的线性规划问题;文献[8～12]对模糊线性规划当中具有等式约束条件的情况进行了讨论。本文采用一种新的模糊数排序方法,给出约束条件中含有三角模糊数的模糊线性规划的求解方法,最后将该求解方法应用到实际问题当中.

收稿日期:2009-12-07

作者简介:王中兴(1962-),男,教授,主要从事优化与决策研究。

*广西自然科学基金项目(桂科自 0991029),广西研究生教育创新计划项目(105930903068)资助。

1　模糊数排序方法

定义 1[13]　模糊数 $\widetilde{A}(a,b,c,d)$ 称为左右型模糊数,若其隶属函数 $f_{\widetilde{A}}(x)$ 为:

$$f_{\widetilde{A}}(x)=\begin{cases} f_{\widetilde{A}}^{L}(x), a \leqslant x < b; \\ 1, b \leqslant x < c; \\ f_{\widetilde{A}}^{R}(x), c \leqslant x \leqslant d; \\ 0,\text{其他}. \end{cases} \quad (1)$$

(1)式中 $f_{\widetilde{A}}^{L}(x):[a,b]\rightarrow[0,1]$ 为严格单调递增连续函数;$f_{\widetilde{A}}^{R}(x):[c,d]\rightarrow[0,1]$ 为严格单调递减连续函数.若 $f_{\widetilde{A}}^{L}(x)$,$f_{\widetilde{A}}^{R}(x)$ 均为线性函数,则称 $\widetilde{A}$ 为梯形模糊数,简记为 $\widetilde{T}(a,b,c,d)$.特别当 $b=c$ 时,称为三角模糊数,简记为 $\widetilde{F}(a,b,d)$.

由于 $f_{\widetilde{A}}^{L}(x)$,$f_{\widetilde{A}}^{R}(x)$ 是严格单调连续函数,从而它必定存在反函数,不妨设其反函数为:$g_{\widetilde{A}}^{L}(\alpha):[0,1]\rightarrow[a,b]$;$g_{\widetilde{A}}^{R}(\alpha):[0,1]\rightarrow[c,d]$;这样模糊数 $\widetilde{A}$ 用其反函数形式表示为:$\widetilde{A}=[g_{\widetilde{A}}^{L}(\alpha),g_{\widetilde{A}}^{R}(\alpha)]$,其中

$g_{\widetilde{A}}^{L}(\alpha)=\inf\{x\in R\mid f_{\widetilde{A}}(x)\geqslant\alpha\}$，$g_{\widetilde{A}}^{R}(\alpha)=\sup\{x\in R\mid f_{\widetilde{A}}(x)\geqslant\alpha\}$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$. 当 $\widetilde{A}$ 为梯形模糊数时，

$$g_{\widetilde{A}}^{L}(\alpha)=a+(b-a)\alpha;g_{\widetilde{A}}^{R}(\alpha)=d-(d-c)\alpha;$$

当 $\widetilde{A}$ 为三角模糊数时，

$$g_{\widetilde{A}}^{L}(\alpha)=a+(b-a)\alpha;g_{\widetilde{A}}^{R}(\alpha)=d-(d-b)\alpha.$$

为了表示模糊数 $\widetilde{A}$ 在不同截集 α 下的信息，我们给出如下的模糊数排序指标：

定义 2 对于模糊数 $\widetilde{A}(a,b,c,d)$，其排序指标定义为

$$T(\widetilde{A})=\frac{1}{2}\{\int_{0}^{1}[g_{\widetilde{A}}^{L}(\alpha)+g_{\widetilde{A}}^{R}(\alpha)+b+c]\alpha\mathrm{d}\alpha\};\tag{2}$$

当左右型模糊数 $\widetilde{A}(a,b,c,d)$ 为梯形模糊数时

$$T(\widetilde{A})=\frac{a+5b+5c+d}{12};\tag{3}$$

当左右型模糊数 $\widetilde{A}(a,b,c,d)$ 为三角模糊数时

$$T(\widetilde{A})=\frac{a+10b+d}{12}.\tag{4}$$

定义 3 对于任意左右型模糊数 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{B}$，定义排序方法如下：

(1) $\widetilde{A}<\widetilde{B}$，当且仅当 $T(\widetilde{A})<T(\widetilde{B})$；

(2) $\widetilde{A}\sim\widetilde{B}$，当且仅当 $T(\widetilde{A})=T(\widetilde{B})$；

(3) $\widetilde{A}>\widetilde{B}$，当且仅当 $T(\widetilde{A})>T(\widetilde{B})$.

2 约束条件中含有三角模糊数的模糊线性规划及其求解

我们讨论约束条件中含有三角模糊数的模糊线性规划模型

$$\max Z=C^{\mathrm{T}}X,$$
$$\text{s.t.}\ \widetilde{A}X\leqslant\tilde{b},X\geqslant 0,\tag{5}$$

其中，$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 为 n 维清晰型行向量，$\widetilde{A}$，$\tilde{b}$ 的元素全部或部分是三角模糊数.

设 $\widetilde{A}=(\tilde{a}_{ij})_{m\times n}$ 及 $\tilde{b}=(\tilde{b}_i)_{m\times j}$ 中的元素 $\tilde{a}_{ij}$，$\tilde{b}_i(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 都是三角模糊数，记为 $\tilde{a}_{ij}=(a_{lij},a_{mij},a_{uij})$，$\tilde{b}_i=(b_{li},b_{mi},b_{ui})$. 为讨论方便起见，不妨设所有的量均不小于 0.

由模糊数之间的运算法则，$\forall x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,n)$，$\sum\limits_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}x_j$ 也是三角模糊数，且有

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}x_j=(\sum_{j=1}^{n}a_{lij}x_j,\sum_{j=1}^{n}a_{mij}x_j,\sum_{j=1}^{n}a_{uij}x_j),$$

由综合排序指标(4)，得到模型(5)的模糊约束条件可转化为

$$\text{s.t.}\ \frac{(\sum_{j=1}^{n}a_{lij}+10\sum_{j=1}^{n}a_{mij}+\sum_{j=1}^{n}a_{uij})x_j}{12}\leqslant\frac{b_{li}+10b_{mi}+b_{ui}}{12}(i=1,2,\cdots,m),x_j\geqslant 0.\tag{6}$$

性质 1 若模糊线性规划模型(5)的约束条件 $\widetilde{A}=(\tilde{a}_{ij})_{m\times n}$ 及 $\tilde{b}=(\tilde{b}_i)_{m\times j}$ 中的元素 $\tilde{a}_{ij}$，$\tilde{b}_i(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 都是正三角模糊数，则不等式约束(6)为线性不等式约束.

证明 由于不等式约束(6)中的未知变量处于不等式的左端，且由(4)式可知 $\dfrac{\sum_{j=1}^{n}a_{lij}+10\sum_{j=1}^{n}a_{mij}+\sum_{j=1}^{n}a_{uij}}{12}$ 为实数. 因此不等式约束(6)为线性不等式约束. 因此模型(5)可以转化为如下的线性规划模型：

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j,$$
$$\text{s.t.}\ \frac{(\sum_{j=1}^{n}a_{lij}+10\sum_{j=1}^{n}a_{mij}+\sum_{j=1}^{n}a_{uij})x_j}{12}\leqslant\frac{b_{li}+10b_{mi}+b_{ui}}{12},(i=1,2,\cdots,m),x_j\geqslant 0.\tag{7}$$

这样，对于模型(7)我们可以用单纯形法求解.

对于此类问题，如果分别按照文献[14～17]所给出的模糊数排序方法，我们得到如下几个常见的处理模型：加权平均模型[3]，似然模型[6]，极大似然模型[18]，多约束线性规划模型[17]。文献[6]证明了多约束线性规划模型也是似然模型的解，对于加权平均模型、似然模型、极大似然模型和多约束线性规划模型的各种解法中，其主要解法思想是将三角模糊系数转化为确定数. 设三角模糊数 $\widetilde{F}(a,b,d)$ 的可能性分布如图 1 所示. 图 1 中 a 为最悲观值，且 $f_{\widetilde{F}}(a)=0$；b 为最可能值，且 $f_{\widetilde{F}}(b)=1$；d 为最乐观值，$f_{\widetilde{F}}(d)=0$. 在上述各种模型的解法中，分别对 a,b,d 赋予不同的权重，最后将三角模糊系数转化为确定数，解法反应了决策者的决策态度. 对于不同的决策者，采取不同的决策态度可以直接影响到决策结果.

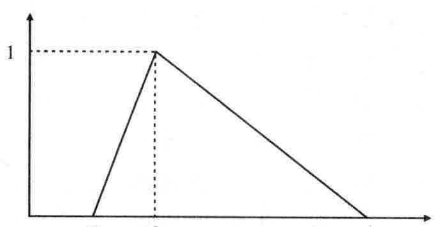

图 1 三角模糊数 $\widetilde{F}$ 的可能性分布

Fig. 1 Possibility distribution of triangle fuzzy number $\widetilde{F}$

3 数值算例

为比较方法的可行性，我们采用文献[6]的实例：

某药品加工厂生产甲、乙两种药品，甲种药品利润为3万元/千克，乙种药品利润为4万元/千克.生产1 kg甲种药品需要原材料A约4 kg少一点，需要原材料B约12 kg多一点；生产1 kg乙种药品需要原材料A约20 kg，需要原材料B约6.4 kg.现有原材料A约4600 kg，原材料B约4800 kg，问应如何安排甲、乙两种药品的产量以使利润最大.

在本例中，不确定的模糊数可以用三角模糊数表示为：约4＝(3,4,5)，约20＝(19,20,21)，约12＝(11,12,13)，约6.4＝(5.4,6.4,7.4)，约4600＝(4500,4600,4700)，约4800＝(4600,4800,5250).设甲、乙两种产品的产量分别为约 x_1 kg和 x_2 kg，则该问题的数学模型为：

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2,$$

$$\text{s.t.}\ (3,4,5)x_1 + (19,20,21)x_2 \leqslant (4500,4600,4700),$$

$$(11,12,13)x_1 + (5.4,6.4,7.4)x_2 \leqslant (4600,4800,5250),$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

利用本文提出的模糊数排序方法，由(6)式将上述数学模型转化为如下线性规划模型：

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2,$$

$$\text{s.t.}\ \frac{3+10\times 4+5}{12}x_1 + \frac{19+10\times 20+21}{12}x_2 \leqslant \frac{4500+10\times 4600+4700}{12},$$

$$\frac{11+10\times 12+13}{12}x_1 + \frac{5.4+10\times 6.4+7.4}{12}\times x_2 \leqslant \frac{4600+10\times 4800+5250}{12},$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0,$$

对模型进一步化简为：

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2,$$

$$\text{s.t.}\ 4x_1 + 20x_2 \leqslant 4600,$$

$$12x_1 + 6.4x_2 \leqslant 4820.8,$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

在Matlab 7.1环境下解得

$X^* = (x_1^*, x_2^*) = (312.3881, 167.5224)$，$Z^* = 1607.3$.

对于上述的线性规划问题，分别采用加权平均模型、似然模型、极大似然模型和多约束线性规划模型进行求解，得到的规划结果如表1所示。从表1的结果可以看出，最优生产方案依赖于决策者的决策态度参数(即对于 a,b,d 赋予不同的权值)，从而使决策方案具有一定的柔性.这样，对于一个偏好中立的决策者来说，最好采取本文提出的规划模型，因为该方法对于最可能值 b 赋予最大的权值.

表1 不同规划方法的规划结果比较

Table 1 Comparative results from different programming methods

方法 Methods	a	b	d	x_1	x_2	Z
加权平均模型[3] Weighted mean model[3]	1/3	1/3	1/3	318.2183	166.3563	1620.1
似然模型[6] Likelihood model[6]	1/4	2/4	1/4	309.9380	163.0176	1581.9
极大似然模型[18] Maximun likelihood model[18]	1/6	4/6	1/6	314.3377	167.1325	1611.5
多约束线性规划模型[17] Linear programming model with much restrain[17]	/	/	/	182.2680	180.4124	1268.5
本文模型 Propose model	1/12	10/12	1/12	312.3881	167.5224	1607.3

4 结束语

本文定义了模糊数的排序指标，对于约束条件中含有三角模糊数的模糊线性规划问题，给出一种新的基于该排序指标的求解方法，并通过求解关于该排序指标的线性规划模型得到原模糊规划问题的最优解.数值算例表明本文所提方法有效、可行.该方法为解决模糊线性规划问题提供了一种新的途径，使决策方案具有一定的柔性.

参考文献：

[1] 宿洁，丁梅，胡发胜.模糊系数交叉规划[J].山东大学学报，2004，39(6)：38-42.

[2] 宿洁，袁军鹏.多目标全系数模糊线性规划[J].工程数学学报，2005，22(3)：525-530.

[3] 梁志贞，施鹏飞.一种具有三角模糊系数的线性规划方法[J].系统工程与电子技术，2004，26(12)：1818-1820.

[4] 朱章遐，曹炳元，李德权.全系数模糊型线性规划的偏差法[J].模糊系统与数学，2008，22(6)：152-157.

[5] 朱章遐，曹炳元.具有模糊变量的线性规划问题[J].模糊系统与数学，2008，22(1)：115-119.

[6] 高淑萍，刘三阳.一类模糊线性规划的求解方法及应用[J].系统工程与电子技术，2005，27(8)：1412-1415.

[7] 梁雪春，龚艳冰，陈森发.基于模糊比例指标的模糊线性规划求解方法[J].系统工程，2007，25(11)：111-113.

[8] 杨吉会，曹炳元.模糊关系几何规划[J].模糊系统与数学，2006，20(3)：110-115.

[9] 杨吉会，曹炳元.目标系数模糊型模糊关系线性规划[J].数学的实践与认识，2008，38(4)：105-112.

[10] 曾庆宁.含等式约束的全系数模糊线性规划[J].系统工程理论与实践，2000，9：105-109.

(下转第302页 Continue on page 302)

模糊数 $\widetilde{A}_2=(1.2,1.3,1.4,1.8)$ 模糊度，比较结果见表 3.

表 3 新模糊度公式与其它模糊度公式的比较(Ⅲ)

Table 3 Comparation of new method and old methods(Ⅲ)

方法 Methods	模糊数(例 4) Fuzzy number(example 4) $\widetilde{A}_1$	$\widetilde{A}_2$	模糊度 Fuzzy degree (*FUZZ*)
新模糊度公式(10) New ambiguity(10)	0.1313	0.0413	$\widetilde{A}_1 > \widetilde{A}_2$
面积模糊度[2] Area ambiguity	0.1923	0.1923	$\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_2$
Shannon 熵[6] Shannon entropy	0.2774	0.2774	$\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_2$
文献[9]的模糊度公式 Ambiguity from reference[9]	0.0321	0.0321	$\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_2$

上述 4 个例子代表了经常碰到的但是难以比较的一些情形. 由表 2 和表 3 中的数据可以看到，运用 Shannon 熵、面积模糊度公式以及文献[9]中的模糊度公式得到的结果均为 $FUZZ(\widetilde{A}_1)=FUZZ(\widetilde{A}_2)$. 根据模糊数的位置对模糊程度的影响，本文的新模糊度公式(2)，能够有效地比较模糊集之间的模糊程度大小.

参考文献：

[1] William Voxman. Some remarks on distances between fuzzy numbers[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 100: 353-365.

[2] 唐国春. 模糊排序中的面积模糊度[J]. 上海第二工业大学学报，1999(2):48-55.

[3] 张运杰，梁德群. 模糊度定义的不一致性及其理论分析[J]. 模糊系统与数学，2003，17(3):38-48.

[4] 王翠香. 模糊集合的模糊度的一种表示形式[J]. 数学的实践与认识，2006，36(2):267-269.

[5] 艾小莲，赵明清，蔺香运. 对模糊度一般形式的进一步讨论[J]. 山东科技大学学报：自然科学版，2002，21(3):21-24.

[6] 杨纶标，高英仪. 模糊数学原理及应用[M]. 广州：华南理工大学出版社，2005.

[7] Dubios D, Prade H. Operations on fuzzy numbers[J]. International Journal of Systems Science, 1978(9): 613-626.

[8] Cheng C H, Mon D L. Fuzzy system reliability by confidence interval[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1993, 56: 29-35.

[9] 王中兴，莫亚妮. 基于理想解方法的模糊数排序方法[J]. 统计与决策，2009(4):15-16.

[10] Deng Y, Zhu Z F, Liu Q. Ranking fuzzy numbers with an area method using Radius of Gyration[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2006, 51: 1127-1136.

(责任编辑：尹　闯)

(上接第 297 页 Continue from page 297)

[11] 李荣钧. 综合型模糊线性规划分析[J]. 运筹与管理，2004，11(2):11-15.

[12] 张艳娥，孙建平，纪爱兵，等. 解带有等式约束的可能性线性规划问题[J]. 模糊系统与数学，2000，14(1):74-77.

[13] Duboic D, Prade H. Operations on fuzzy numbers[J]. Internat Journal of Systems Science, 1978, 9(2):1-9.

[14] Wang Yujie, Lee Hsuan-Shih. The revised method of ranking numbers with an area between the centroid and original points[J]. Cumputers and Mathematics with Applications, 2008, 55(9): 2033-2042.

[15] Abbasbandy S, Asady B. Ranking of fuzzy numbers by sign distance[J]. Inform Sciences, 2006, 176(16): 2405-2416.

[16] Asady B, Zendehnam A. Ranking fuzzy numbers by distance minimization [J]. Applied Mathem - Atical Modelling, 2007, 31(11): 2589-2598.

[17] 李荣钧. 模糊多准则决策理论与应用[M]. 北京：科学出版社，2002:16-57.

[18] 赵海坤，郭嗣琮. 一类全系数模糊线性规划的求解方法[J]. 模糊系统与数学，2009，23(3):139-144.

(责任编辑：韦廷宗)