一种新的模糊集合模糊度公式

A New Formula of the Degree of Fuzziness about Fuzzy Sets

梁宝兰,莫亚妮
LIANG Bao-lan,MO Ya-ni

(广西建设职业技术学院,广西南宁 530003)
(Guangxi Polytechnic of Construction, Nanning,Guangxi,530003, China)

摘要:根据决策者的偏好,结合模糊集的位置引入位置影响因子,得到基于模糊集与最模糊集相对贴近度的新模糊度公式,并用算例检验其合理性和分辨力.新模糊度公式能有效地比较模糊集之间的模糊程度大小.

关键词:模糊集合 模糊度 隶属函数 位置影响因子

中图法分类号:O159 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2010)04-0298-05

Abstract: We introduce the influence factor when a fuzzy set is situated in the different position based on decision makers' risk preference. Then we get a new formula of the degree of fuzziness for fuzzy sets based on the relative close degree of fuzzy set and the most fuzzy set. Some numerical examples are displayed to verify the validity and resolution of the proposed new fuzzy degree, which can effectively compare the fuzziness of fuzzy sets.

Key words: fuzzy sets, fuzzy degree, subordinate function, position influence factor

模糊度是模糊集理论中的一个重要概念,它是度量模糊集合模糊程度的一种数量指标,其公理化定义由 Deluca 和 Termini 于 1972 年提出.由于模糊程度的度量具有很强的应用背景,因此模糊度公式成为研究者所关注的问题之一.模糊度公式的研究到目前为止已经取得不少的成果[1~5],如面积模糊度[2]、海明模糊度[6]、欧几里得模糊度[6]以及用热力学中的熵得到模糊熵[6].目前的模糊度公式主要通过模糊集与最模糊集之间的距离而得到,然而这些模糊度公式或多或少都存在着分辨率不高的问题,特别是无法比较多个对称分布模糊集的模糊程度大小,因此关于模糊集合的模糊度公式还有待进一步研究.为了实现主观权重与模糊集客观性质相结合来刻画模糊集的模糊程度,我们通过考虑决策者主观偏好,引入与模糊集位置有关的影响因子,提出基于模糊集与最大模糊集相对贴近度的一般模糊集新模糊度公式.

收稿日期:2010-03-09
修回日期:2010-08-06
作者简介:梁宝兰(1962-),女,副教授,主要从事优化与决策研究。

1 基本定义

定义 1[7] 论域 X 到 $[0,1]$ 闭区间上的任意映射 $\mu_{\tilde{A}}(x):X\rightarrow[0,1]$ 都确定 X 上的一个模糊集 $\tilde{A}$,$\mu_{\tilde{A}}(x)$ 称为 $\tilde{A}$ 的隶属函数,$\mu_{\tilde{A}}(x)$ 称为 x 对 $\tilde{A}$ 的隶属度.特别的,若模糊集 $\tilde{A}$ 的隶属度 $\mu_{\tilde{A}}(x)\equiv 0.5$,则称模糊集 $\tilde{A}$ 为最模糊集,通常记为 $\tilde{A}_M$.为了方便起见,记论域 X 上的模糊集全体为 $F(X)$;若模糊集 $\tilde{A}$ 的隶属函数 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 仅取 0 和 1 两个数,则模糊集 $\tilde{A}$ 即为普通集,并记论域 X 上的普通集全体为 $P(X)$.

定义 2[7] 若模糊集 $\tilde{A}$ 的隶属函数有如下表示形式

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\mu_{\tilde{A}}^{L}(x), & a\leqslant x\leqslant b,\\ w, & b\leqslant x\leqslant c,\\ \mu_{\tilde{A}}^{R}(x), & c\leqslant x\leqslant d,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad(1)$$

其中 $0\leqslant w\leqslant 1$,$\mu_{\tilde{A}}^{L}(x):[a,b]\rightarrow[0,w]$ 连续且递增;$\mu_{\tilde{A}}^{R}(x):[c,d]\rightarrow[0,w]$ 连续且递减,则称 $\tilde{A}$ 为左右型模糊数,简记为 $\tilde{A}=(a,b,c,d;w)$.若 $w=1$,且 $\mu_{\tilde{A}}^{L}(x)$ 和 $\mu_{\tilde{A}}^{R}(x)$ 均为线性函数,则称 $\tilde{A}$ 为正规梯形模糊数,记为 $\tilde{A}=(a,b,c,d)$.若 $b\equiv c$,则称 $\tilde{A}$ 为三角模糊数;若 $a=b$ 并且 $c=d$,则称 $\tilde{A}$ 为区间数;若 $a=$

$b=c=d$，则称 $\widetilde{A}$ 为实数.

定义 3[8] 对于模糊集 A，其支撑集表示为 $S(A)=\{x\in X \mid \mu_A(x)>0\}$. 对于任意给定的一组模糊数 $\widetilde{A}_i(i=1,2,\cdots,n)$，其支撑集下确界可以表示为 $x_{\min}=\inf\limits_{x\in s}\{x\}$，其中 $S=\bigcup\limits_{i=1}^{n}S(\widetilde{A}_i)$；其支撑集的上确界可以表示为 $x_{\max}=\sup\limits_{x\in s}\{x\}$，其中 $S=\bigcup\limits_{i=1}^{n}S(\widetilde{A}_i)$.

定义 4[6] 模糊度 $FUZZ(\widetilde{A}_i)$ 是关于 $\widetilde{A}_i\in F(X)$ 的一个实值函数，满足下列条件：

(1)对 $\forall\widetilde{A}_i\in F(X)$，有 $FUZZ(\widetilde{A}_i)\in[0,1]$；

(2)当且仅当 $\widetilde{A}_i\in P(X)$ 或者 $\widetilde{A}_i\in R$ 时，$FUZZ(\widetilde{A}_i)=0$；

(3) $FUZZ(\widetilde{A}_M)$ 达到最大值，当且仅当 $\mu_{\widetilde{A}_M}(x)\equiv 0.5$，对任意 $x\in X$；

(4) $\forall x\in X$，$\mu_{\widetilde{A}_i}(x)\leqslant\mu_{\widetilde{A}_j}(x)\leqslant 0.5$，$FUZZ(\widetilde{A}_i)\leqslant FUZZ(\widetilde{A}_j)$；$\mu_{\widetilde{A}_i}(x)\geqslant\mu_{\widetilde{A}_j}(x)\geqslant 0.5$ 时，$FUZZ(\widetilde{A}_i)\leqslant FUZZ(\widetilde{A}_j)$；

(5) $\forall\widetilde{A}_i\in F(X)$，$FUZZ(\widetilde{A}_i)=FUZZ(\widetilde{A}_i^c)$.

条件(2)说明普通集是不模糊的. 条件(3)和(4)说明模糊集的隶属度越靠近 0.5 就越模糊，尤其当 $\mu_{\widetilde{A}_M}(x)\equiv 0.5$ 时最模糊. 条件(5)说明模糊集 $\widetilde{A}_i$ 和 $\widetilde{A}_i^c$ 有同等的模糊度. 显然模糊集的模糊度越大，其模糊程度也就越大，从而越不确定.

2 新模糊度公式

定义 5 论域 X 上模糊集 $\widetilde{A}_i$ 的模糊度为

$$FUZZ(\widetilde{A}_i)=\frac{\int_\gamma^\beta w(x)\mu_{\widetilde{A}_i\cap\widetilde{A}_i^c}(x)\mathrm{d}x}{\int_\gamma^\beta w(x)\mu_{\widetilde{A}_M}(x)\mathrm{d}x},\tag{2}$$

其中，$\gamma=\inf X$，$\beta=\sup X$，$w(x)$ 为模糊集所在左右位置对模糊程度的影响，作为位置影响因子，且 $w(x)$ 满足 $0\leqslant w(x)\leqslant 1$，$\int_\gamma^\beta\omega(x)\mathrm{d}x\neq 0$.

当论域 X 为有限，即 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 时模糊集 $\widetilde{A}_i$ 的模糊度为

$$FUZZ(\widetilde{A}_i)=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}w(x_j)\mu_{\widetilde{A}_i\cap\widetilde{A}_i^c}(x_j)}{\sum\limits_{j=1}^{n}w(x_j)\mu_{\widetilde{A}_M}(x_j)},\tag{3}$$

其中，$w(x)$ 为位置影响因子，且 $w(x)$ 满足 $0\leqslant w(x_j)\leqslant 1$，$\sum\limits_{j=1}^{n}w(x_j)\neq 0$，$j=1,2,\cdots,n$.

定理 1 模糊度公式(2)以及模糊度公式(3)满足模糊度定义 4 的 5 个条件.

证明 不失一般性，先证明论域 X 为实数集上闭区间的情形，即 $X=[\gamma,\beta]$. 设 $\widetilde{A}_i$ 是定义在论域 X 上的模糊集.

因为 $0\leqslant w(x)\leqslant 1$，$0\leqslant\mu_{\widetilde{A}_i\cap\widetilde{A}_i^c}(x)\leqslant 1$，且 $0\leqslant\mu_{\widetilde{A}_i\cap\widetilde{A}_i^c}(x)\leqslant\frac{1}{2}$，又因为 $0\leqslant w(x)\mu_{\widetilde{A}_i\cap\widetilde{A}_i^c}(x)\leqslant w(x)\mu_{\widetilde{A}_M}(x)\leqslant 1$，所以 $0\leqslant\int_\gamma^\beta w(x)\mu_{\widetilde{A}_i\cap\widetilde{A}_i^c}(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_\gamma^\beta w(x)\mu_{\widetilde{A}_M}(x)\mathrm{d}x$，因此有 $0\leqslant\frac{\int_\gamma^\beta w(x)\mu_{\widetilde{A}_i\cap\widetilde{A}_i^c}(x)\mathrm{d}x}{\int_\gamma^\beta w(x)\mu_{\widetilde{A}_M}(x)\mathrm{d}x}\leqslant 1$，所以，由公式(2)，模糊集 $\widetilde{A}_i$ 的模糊度满足 $0\leqslant FUZZ(\widetilde{A}_i)\leqslant 1$. 条件(1)证明完毕.

当 $\widetilde{A}_i\in P(X)$ 时，$\mu_{\widetilde{A}_i}(x)=\begin{cases}1, x\in\widetilde{A}_i,\\0, x\notin\widetilde{A}_i,\end{cases}$ 则 $\mu_{A_i\cap A_i^c}(x)\equiv 0$，所以 $FUZZ(\widetilde{A}_i)=0$. 条件(2)成立.

类似条件(2)的证明. 因为对任意的 $x\in X$，$\mu_{\widetilde{A}_M}(x)\equiv 0.5$，则 $\mu_{\widetilde{A}_i\cap\widetilde{A}_i^c}(x)\equiv 0.5$. 所以

$$FUZZ(\widetilde{A}_M)=\frac{\int_\gamma^\beta w(x)\mu_{\widetilde{A}_i\cap\widetilde{A}_i^c}(x)\mathrm{d}x}{\int_\gamma^\beta w(x)\mu_{\widetilde{A}_M}(x)\mathrm{d}x}=\frac{\int_\gamma^\beta w(x)\times 0.5\mathrm{d}x}{\int_\gamma^\beta w(x)\times 0.5\mathrm{d}x}=1,$$

则 $\forall\widetilde{A}_j\in F(X)$，$FUZZ(\widetilde{A}_j)\leqslant FUZZ(\widetilde{A}_M)$. 所以 $FUZZ(\widetilde{A}_M)$ 达到最大值，且此时 $FUZZ(\widetilde{A}_M)=1$. 条件(3)证明完毕.

当 $\forall x\in X$，$0\leqslant\mu_{\widetilde{A}_i}(x)\leqslant\mu_{\widetilde{A}_j}(x)\leqslant 0.5$ 时，显然有 $1-\mu_{\widetilde{A}_i}(x)\geqslant 1-\mu_{\widetilde{A}_j}(x)\geqslant 0.5$，

$\mu_{\widetilde{A}_i\cap\widetilde{A}_i^c}(x)=\mu_{\widetilde{A}_i}(x)\wedge\mu_{\widetilde{A}_i^c}(x)=\mu_{\widetilde{A}_i}(x)\wedge(1-\mu_{\widetilde{A}_i}(x))$，

$\mu_{\widetilde{A}_j\cap\widetilde{A}_j^c}(x)=\mu_{\widetilde{A}_j}(x)\wedge\mu_{\widetilde{A}_j^c}(x)=\mu_{\widetilde{A}_j}(x)\wedge(1-\mu_{\widetilde{A}_j}(x))$，

所以，$\mu_{\widetilde{A}_i\cap\widetilde{A}_i^c}(x)=\mu_{\widetilde{A}_i}(x)$，$\mu_{\widetilde{A}_j\cap\widetilde{A}_j^c}(x)=\mu_{\widetilde{A}_j}(x)$，因此 $\mu_{\widetilde{A}_i\cap\widetilde{A}_i^c}(x)\leqslant\mu_{\widetilde{A}_j\cap\widetilde{A}_j^c}(x)$. 从而 $\int_\gamma^\beta w(x)\mu_{\widetilde{A}_i\cap\widetilde{A}_i^c}(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_\gamma^\beta w(x)\mu_{\widetilde{A}_j\cap\widetilde{A}_j^c}(x)\mathrm{d}x$，所以 $FUZZ(\widetilde{A}_i)\leqslant FUZZ(\widetilde{A}_j)$. 条件(4)证明完毕.

对模糊集 $\widetilde{A}_i$ 的补集 $\widetilde{A}_i^c$ 有 $\mu_{\widetilde{A}_i^c}(x)=1-\mu_{\widetilde{A}_i}(x)$，因为

$$FUZZ(\widetilde{A}_i^c)=\frac{\int_\gamma^\beta w(x)\mu_{\widetilde{A}_i^c\cap(\widetilde{A}_i^c)^c}(x)\mathrm{d}x}{\int_\gamma^\beta w(x)\mu_{\widetilde{A}_M}(x)\mathrm{d}x}=\frac{\int_\gamma^\beta w(x)\mu_{\widetilde{A}_i\cap\widetilde{A}_i^c}(x)\mathrm{d}x}{\int_\gamma^\beta w(x)\mu_{\widetilde{A}_M}(x)\mathrm{d}x}=FUZZ(\widetilde{A}_i).$$

所以 $FUZZ(\widetilde{A}_i)=FUZZ(\widetilde{A}_i^c)$. 条件(5)证明完毕.

当论域 X 为有限，即 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 时. 同理可证，公式(3)为模糊集 $\widetilde{A}_i$ 的模糊度.

特别的，考虑定义在论域 $X=[\gamma,\beta]$ 上模糊数 $\widetilde{A}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的模糊度. 由定义 3，模糊数 $\widetilde{A}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 支撑集下确界定义为 $x_{\min}$，支撑集上确界定义为 $x_{\max}$. 根据(1)式中模糊数隶属函数的特征，若 $0<x_{\max}-x_{\min}<2$，则可令模糊数 $\widetilde{A}_i$ 定义的论域 $X=[\gamma,\beta]=[x_{\min},x_{\min}+2]$；若 $x_{\max}-x_{\min}\geqslant 2$ 时，则可令模糊数 $\widetilde{A}_i$ 定义的论域为 $X=[\gamma,\beta]=[x_{\min},x_{\max}]$. 由公式(2)，模糊数 $\widetilde{A}_i$ 的模糊度为

$$FUZZ(\widetilde{A}_i)=\frac{\int_{\gamma}^{\beta}w(x)\mu_{\widetilde{A}_i\cap\widetilde{A}_i^c}(x)\mathrm{d}x}{\int_{\gamma}^{\beta}w(x)\mu_{\widetilde{A}_M}(x)\mathrm{d}x},$$

其中 $w(x)$ 为模糊数所在的位置对模糊程度的影响，称之为位置影响因子. 根据上述情形，对于模糊数 $\widetilde{A}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 有 $\beta-\gamma\geqslant 2$ 成立. 再根据决策者的偏好，影响因子 $w(x)$ 根据以下两种情况来确定：

(1)若决策者认为模糊数位置对模糊数模糊程度大小的影响一样，则影响因子 $w(x)$ 可取为常数函数

$$w(x)=\frac{1}{\beta-\gamma}, \tag{4}$$

则模糊度公式(2)可以简化为

$$FUZZ(\widetilde{A}_i)=\frac{2}{\beta-\gamma}\int_{\gamma}^{\beta}\mu_{\widetilde{A}_i\cap\widetilde{A}_i^c}(x)\mathrm{d}x. \tag{5}$$

(2)若决策者根据模糊数越靠右越大，那么模糊数靠右位置对模糊程度的影响也就越大. 且 $w(x)$ 应该满足 $0\leqslant w(x)\leqslant 1,\int_{\gamma}^{\beta}\omega(x)\mathrm{d}x=1$. 由于线性函数简单，则位置影响因子 $w(x)$ 可采用一次线性函数

$$w(x)=\frac{2(x-\gamma)}{(\beta-\gamma)^2}, \tag{6}$$

则模糊度公式(2)可以简化为

$$FUZZ(\widetilde{A}_i)=\frac{4}{(\beta-\gamma)^2}\int_{\gamma}^{\beta}(x-\gamma)\mu_{\widetilde{A}_i\cap\widetilde{A}_i^c}(x)\mathrm{d}x. \tag{7}$$

特别的，若 $\beta-\gamma=2$ 时，根据 $w(x)$ 满足的上述条件可得

$$w(x)=\frac{1}{2}(x-\gamma), \tag{8}$$

则模糊度公式(2)可以简化为

$$FUZZ(\widetilde{A}_i)=\int_{\gamma}^{\beta}(x-\gamma)\mu_{\widetilde{A}_i\cap\widetilde{A}_i^c}(x)\mathrm{d}x. \tag{9}$$

定理 2 定义在论域 $X=[\gamma,\beta]$ 上的梯形模糊数 $\widetilde{A}=(a,b,c,d)$ 的模糊度为

$$FUZZ(\widetilde{A})=\frac{1}{2(\beta-\gamma)^2}[(d-a)(a+d)-(c-b)(c+b)]-\frac{r}{(\beta-\gamma)^2}[(d-a)-(c-b)]. \tag{10}$$

证明 梯形模糊数 $\widetilde{A}$ 的隶属函数为

$$\mu_{\widetilde{A}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 1, & b\leqslant x\leqslant c,\\ \dfrac{(d-x)}{d-c}, & c\leqslant x\leqslant d,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

根据模糊度公式(7)，梯形模糊数 $\widetilde{A}$ 的模糊度为

$$FUZZ(\widetilde{A})=\frac{4}{(\beta-\gamma)^2}\int_{\gamma}^{\beta}(x-\gamma)\mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{A}^c}(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{(\beta-\gamma)^2}\int_{a}^{d}(x-\gamma)\mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{A}^c}(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{(\beta-\gamma)^2}\Big(\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}(x-\gamma)\frac{x-a}{b-a}\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-\gamma)(1-\frac{x-a}{b-a})\mathrm{d}x+\int_{c}^{\frac{c+d}{2}}(x-\gamma)(1+\frac{x-d}{d-c})\mathrm{d}x+\int_{\frac{c+d}{2}}^{d}(x-\gamma)\frac{d-x}{d-c}\mathrm{d}x\Big)=\frac{1}{2(\beta-\gamma)^2}[(d-a)(a+d)-(c-b)(c+b)]-\frac{r}{(\beta-\gamma)^2}[(d-a)-(c-b)].$$

特别的，若 $b=c$ 则模糊数 $\widetilde{A}$ 为三角模糊数，其模糊度为

$$FUZZ(\widetilde{A})=\frac{1}{2(\beta-\gamma)^2}(d-a)(d+a+2r). \tag{11}$$

3 新模糊度公式与其它模糊度公式的比较

对定义在论域 $X=[\gamma,\beta]$ 上，呈对称分布的模糊数 $\widetilde{A}_i=(a_i,b_i,c_i,d_i),\widetilde{A}_j=(a_j,b_j,c_j,d_j),a_i-a_j=b_i-b_j=c_i-c_j=d_i-d_j=k_0\neq 0$，根据本文提出的新模糊度公式(10)，可以得到模糊数 $\widetilde{A}_i,\widetilde{A}_j$ 的模糊度为

$$FUZZ(\widetilde{A}_i)=\frac{1}{2(\beta-\gamma)^2}[(d_i-a_i)(a_i+d_i)-(c_i-b_i)(c_i+b_i)]-\frac{r}{(\beta-\gamma)^2}[(d_i-a_i)-(c_i-b_i)],$$

$$FUZZ(\widetilde{A}_j)=\frac{1}{2(\beta-\gamma)^2}[(d_j-a_j)(a_j+d_j)-(c_j-b_j)(c_j+b_j)]-\frac{r}{(\beta-\gamma)^2}[(d_j-a_j)-(c_j-b_j)].$$

因为 $a_i-a_j=b_i-b_j=c_i-c_j=d_i-d_j=k_0\neq 0$，所以 $d_i-a_i=d_j-a_j,c_i-b_i=c_j-b_j$.

(1) 若 $d_i-a_i=d_j-a_j=c_i-b_i=c_j-b_j$，则模糊数 $\widetilde{A}_i,\widetilde{A}_j$ 退化为普通集. 由定义 4，$FUZZ(\widetilde{A}_i)=FUZZ(\widetilde{A}_j)=0$，即模糊数 $\widetilde{A}_i,\widetilde{A}_j$ 不模糊，其模糊程度为零.

(2) 若 $d_i-a_i=d_j-a_j\neq c_i-b_i=c_j-b_j$，则令 $d_i-a_i=d_j-a_j=k_i,c_i-b_i=c_j-b_j=k_j$，那么

$$FUZZ(\widetilde{A}_i)-FUZZ(\widetilde{A}_j)=\frac{1}{2(\beta-\gamma)^2}[k_i(d_i+a_i-$$

$d_j - a_j) - k_j(c_i + b_i - c_j - b_j)] = \frac{k_0(k_i - k_j)}{2(\beta - \gamma)^2} \neq 0$. 然而，根据面积模糊度[2]、Shannon 熵[6]和文献[9]的模糊度公式，均可以得到 $FUZZ(\widetilde{A}_i) = FUZZ(\widetilde{A}_j) \neq 0$. 虽然模糊数 $\widetilde{A}_i, \widetilde{A}_j$ 呈对称分布，但是两者的位置均不相同，因此在比较模糊度大小的时候，应该结合模糊数的位置影响因子来考虑其模糊程度.

例 1[10] 求三角模糊数 $\widetilde{A}_1 = (3,5,7;1)$，$\widetilde{A}_2 = (3,5,7;0.8)$ 及梯形模糊数 $\widetilde{A}_3 = (5,7,9,10;1)$，$\widetilde{A}_4 = (6,7,9,10;0.6)$ 和 $\widetilde{A}_5 = (7,8,9,10;0.4)$ 的模糊度，其隶属函数如图 1 所示.

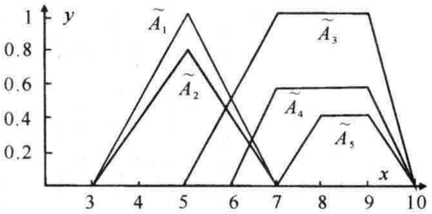

图 1 模糊数的隶属函数

Fig. 1 Fuzzy membership function

解 由于 $0 < x_{\max} - x_{\min} = 10 - 3 > 2$，则模糊数 $\widetilde{A}_i$ 定义的论域 $X = [\gamma, \beta] = [x_{\min}, x_{\max}] = [3,10]$. 由(4)式得位置影响因子 $w(x) = \frac{1}{7}$，再由公式(5)可得

$$FUZZ(\widetilde{A}_i) = \int_3^7 \frac{2}{7}\mu_{\widetilde{A}_i \cap \widetilde{A}_i^c}(x)\mathrm{d}x, i = 1,2,\cdots 5,$$

所以，$FUZZ(\widetilde{A}_1) = \frac{2}{7}$，$FUZZ(\widetilde{A}_2) = \int_3^7 \frac{2}{7}\mu_{\widetilde{A}_2 \cap \widetilde{A}_2^c}(x)\mathrm{d}x = \frac{23}{70}$，$FUZZ(\widetilde{A}_3) = \int_5^{10} \frac{2}{7}\mu_{\widetilde{A}_3 \cap \widetilde{A}_3^c}(x)\mathrm{d}x \ \frac{3}{14}$，

同理可得 $FUZZ(\widetilde{A}_4) = \frac{41}{105}$，$FUZZ(\widetilde{A}_5) = \int_7^{10} \frac{2}{7}\mu_{\widetilde{A}_5 \cap \widetilde{A}_5^c}(x)\mathrm{d}x = \frac{8}{35}$.

由图 1 也可以看出，模糊数 $\widetilde{A}_2, \widetilde{A}_4$ 比模糊数 $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_3, \widetilde{A}_5$ 更贴近最模糊集 $\widetilde{A}_M$，其模糊程度相对要大，这与本文提出的新模糊度公式(5)所得的计算结果相一致，说明公式(5)与直观相符.

另外运用文献[2]中给出的面积模糊度公式计算模糊数的模糊度得 $FUZZ(\widetilde{A}_1) = \frac{2}{7}$，$FUZZ(\widetilde{A}_2) = \frac{23}{70}$，$FUZZ(\widetilde{A}_3) = \frac{3}{14}$，$FUZZ(\widetilde{A}_4) = \frac{41}{105}$，$FUZZ(\widetilde{A}_5) = \frac{8}{35}$，与公式(5)计算的结果一致，本文提出的新模糊度公式具有一定的合理性与有效性.

例 2[6] 求模糊集 $\widetilde{A}_1 = \frac{0.8}{x_1} + \frac{0.9}{x_2} + \frac{0.1}{x_3} + \frac{0.8}{x_4}$ 和 $\widetilde{A}_2 = \frac{0.3}{x_1} + \frac{0}{x_2} + \frac{0.3}{x_3} + \frac{0}{x_4}$ 的模糊度.

解 因为 $0 \leqslant w(x_j) \leqslant 1$，且 $\sum_{j=1}^{n} w(x_j) = 1, j = 1, 2, \cdots, n$). 所以得到位置影响因子 $w(x_j) = \frac{j}{10}(j = 1, 2, 3, 4)$. 根据新模糊度公式(3)得

$$FUZZ(\widetilde{A}_I) = \frac{\sum_{j=1}^{4} w(x_j)\mu_{\widetilde{A}_I \cap \widetilde{A}_I^c}(x_j)}{\sum_{j=1}^{4} w(x_j)\mu_{\widetilde{A}_M}(x_j)}.$$

从直观上不难发现模糊集 $\widetilde{A}_1$ 比 $\widetilde{A}_2$ 更贴近最模糊集 $\widetilde{A}_M$，即模糊集 $\widetilde{A}_1$ 的模糊程度比 $\widetilde{A}_2$ 要大. 由表 1 可以看出，用本文提出的新模糊度公式(3)与文献[6]给出的 Shannon 熵比较模糊集 $\widetilde{A}_1$ 与 $\widetilde{A}_2$ 的模糊度得到 $FUZZ(\widetilde{A}_1) > FUZZ(\widetilde{A}_2)$ 与直观相符. 而文献[6]给出的海明模糊度公式得到 $FUZZ(\widetilde{A}_1) = FUZZ(\widetilde{A}_2) = 0.3$，无法比较模糊集 $\widetilde{A}_1$ 和 $\widetilde{A}_2$ 之间的模糊程度大小. 然而运用欧几里得公式计算模糊度，其计算过程较为复杂.

表 1 新模糊度公式与其它模糊度公式的比较(Ⅰ)

Table 1 Comparation of new method and old methods(Ⅰ)

方法 Methods	模糊数(例 2) Fuzzy number(example 2)		模糊度 Fuzzy degree (FUZZ)
	$\widetilde{A}_1$	$\widetilde{A}_2$	
新模糊度公式(3) New ambiguity(3)	0.3	0.24	$\widetilde{A}_1 > \widetilde{A}_2$
海明模糊度公式[6] Haimming ambiguity	0.3	0.3	$\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_2$
欧几里得模糊度公式[6] Euclidean ambiguity	0.316	0.424	$\widetilde{A}_1 < \widetilde{A}_2$
Shannon 熵[6] Shannon entropy	0.5955	0.4406	$\widetilde{A}_1 > \widetilde{A}_2$

例 3[9] 求对称分布三角模糊数 $\widetilde{A}_1 = (0.2, 0.5, 0.5, 0.9)$ 和 $\widetilde{A}_2 = (0.1, 0.6, 0.6, 0.8)$ 模糊度，比较结果见表 2.

表 2 新模糊度公式与其它模糊度公式的比较(Ⅱ)

Table 2 Comparation of new method and old methods(Ⅱ)

方法 Methods	模糊数(例 3) Fuzzy number(example 3)		模糊度 Fuzzy degree (FUZZ)
	$\widetilde{A}_1$	$\widetilde{A}_2$	
新模糊度公式(10) New ambiguity(10)	0.0788	0.0612	$\widetilde{A}_1 > \widetilde{A}_2$
面积模糊度[2] Area ambiguity	0.4375	0.4375	$\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_2$
Shannon 熵[6] Shannon entropy	0.6321	0.6321	$\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_2$
文献[9]的模糊度公式 Ambiguity from reference[9]	0.0729	0.0729	$\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_2$

例 4 求三角模糊数 $\widetilde{A}_1 = (2, 2.2, 2, 2.5)$ 和梯形

模糊数 $\widetilde{A}_2=(1.2,1.3,1.4,1.8)$ 模糊度，比较结果见表 3.

表 3 新模糊度公式与其它模糊度公式的比较(Ⅲ)

Table 3 Comparation of new method and old methods(Ⅲ)

方法 Methods	模糊数(例 4) Fuzzy number(example 4)		模糊度 Fuzzy degree (*FUZZ*)
	$\widetilde{A}_1$	$\widetilde{A}_2$	
新模糊度公式(10) New ambiguity(10)	0.1313	0.0413	$\widetilde{A}_1>\widetilde{A}_2$
面积模糊度[2] Area ambiguity	0.1923	0.1923	$\widetilde{A}_1=\widetilde{A}_2$
Shannon 熵[6] Shannon entropy	0.2774	0.2774	$\widetilde{A}_1=\widetilde{A}_2$
文献[9]的模糊度公式 Ambiguity from reference[9]	0.0321	0.0321	$\widetilde{A}_1=\widetilde{A}_2$

上述 4 个例子代表了经常碰到的但是难以比较的一些情形.由表 2 和表 3 中的数据可以看到，运用 Shannon 熵、面积模糊度公式以及文献[9]中的模糊度公式得到的结果均为 $FUZZ(\widetilde{A}_1)=FUZZ(\widetilde{A}_2)$. 根据模糊数的位置对模糊程度的影响，本文的新模糊度公式(2)，能够有效地比较模糊集之间的模糊程度大小.

参考文献：

[1] William Voxman. Some remarks on distances between fuzzy numbers[J]. Fuzzy Sets and Systems，1998，100：353-365.

[2] 唐国春.模糊排序中的面积模糊度[J].上海第二工业大学学报，1999(2)：48-55.

[3] 张运杰，梁德群.模糊度定义的不一致性及其理论分析[J].模糊系统与数学，2003，17(3)：38-48.

[4] 王翠香.模糊集合的模糊度的一种表示形式[J].数学的实践与认识，2006，36(2)：267-269.

[5] 艾小莲，赵明清，蔺香运.对模糊度一般形式的进一步讨论[J].山东科技大学学报：自然科学版，2002，21(3)：21-24.

[6] 杨纶标，高英仪.模糊数学原理及应用[M].广州：华南理工大学出版社，2005.

[7] Dubios D，Prade H. Operations on fuzzy numbers[J]. International Journal of Systems Science，1978(9)：613-626.

[8] Cheng C H，Mon D L. Fuzzy system reliability by confidence interval[J]. Fuzzy Sets and Systems，1993，56：29-35.

[9] 王中兴，莫亚妮.基于理想解方法的模糊数排序方法[J].统计与决策，2009(4)：15-16.

[10] Deng Y，Zhu Z F，Liu Q. Ranking fuzzy numbers with an area method using Radius of Gyration[J]. Computers and Mathematics with Applications，2006，51：1127-1136.

(责任编辑：尹　闯)

(上接第 297 页 Continue from page 297)

[11] 李荣钧.综合型模糊线性规划分析[J].运筹与管理，2004，11(2)：11-15.

[12] 张艳娥，孙建平，纪爱兵，等.解带有等式约束的可能性线性规划问题[J].模糊系统与数学，2000，14(1)：74-77.

[13] Duboic D，Prade H. Operations on fuzzy numbers[J]. Internat Journal of Systems Science，1978，9(2)：1-9.

[14] Wang Yujie，Lee Hsuan-Shih. The revised method of ranking numbers with an area between the centroid and original points[J]. Cumputers and Mathematics with Applications，2008，55(9)：2033-2042.

[15] Abbasbandy S，Asady B. Ranking of fuzzy numbers by sign distance[J]. Inform Sciences，2006，176(16)：2405-2416.

[16] Asady B，Zendehnam A. Ranking fuzzy numbers by distance minimization [J]. Applied Mathem - Atical Modelling，2007，31(11)：2589-2598.

[17] 李荣钧.模糊多准则决策理论与应用[M].北京：科学出版社，2002：16-57.

[18] 赵海坤，郭嗣琮.一类全系数模糊线性规划的求解方法[J].模糊系统与数学，2009，23(3)：139-144.

(责任编辑：韦廷宗)