广西科学 Guangxi Sciences 2010,17(4):303～306

局部凸空间上连续规函数 Gateaux 可微性与 Fréchet 可微性*

Gateaux and Fréchet Differentiability of Continuous Gauge Functions in Locally Convex Spaces

孙　钰[1],魏文展[2]
SUN Yu[1],WEI Wen-zhan[2]

(1.广西师范学院数学科学学院，广西南宁　530023 ;2.广西经贸职业技术学院,广西南宁　530021)
(1. School of Mathematical Sciences, Guangxi Teachers Education University, Nanning, Guangxi,530023,China; 2. Guangxi Economic Trade Polytechnic, Nanning, Guangxi, 530021, China)

摘要:分别给出局部凸空间上连续规函数 Gateaux 可微性与 Fréchet 可微性的充分必要条件.

关键词:局部凸空间　连续规函数　Gateaux 可微性　Fréchet 可微性
中图法分类号:O174.13　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2010)04-0303-04

Abstract: We give the sufficient and necessary condition of Gateaux and Fréchet differentiability of continuous gauge functions in locally convex spaces.

Key words: locally convex spaces, continuous gauge functions, Gateaux differentiability, Fréchet differentiability

Banach 空间上函数的 Gateaux 可微和 Fréchet 可微的研究由来已久,陈道琦和俞鑫泰分别在文献[1,2]中给出 Banach 空间中的范数在点 x_0 处 Gateaux 可微的一个充分条件和 Fréchet 可微的一个充分条件,文献[3]把它推广到连续规函数,并得出在 Banach 空间中一点 x_0 处 Gateaux 可微和 Fréchet 可微的充要条件. 本文将文献[3]的结论推广至局部凸空间.

1　定义和引理

设(E,P)为局部凸空间的拓扑线性空间,P 为 E 的一个生成拓扑的半范数族,对偶空间为 E',$\forall p \in P$,E' 中关于半范 p 连续 的线性泛函全体记为 $E^*=\{f\in E',\sup\limits_{p(x)\leqslant 1}|f(x)|<+\infty\}$. 由 Alaoglu-Bourbaki 定理可知 E^* 为 E' 的子空间,且按范数 $\|f\|_p=\sup\limits_{p(x)\leqslant 1}|f(x)|$ 成为 Banach 空间,记 $S(E')=\{f\in E^*,\|f\|_p=1\}$,$S_p(E)=\{x\in E,p(x)=1\}$,$U_p(E)=\{x\in E,p(x)\leqslant 1\}$. 注意到 U_p 为 E 中具有非空开核的闭凸均衡吸收集,因而 $\forall x\in S_p(E)$,存在 $f\in S(E^*)$,使 $f(x)=1$.

定义 1[4]　设 f 为局部凸空间 E 的开凸子集 F 上的连续凸函数,对于 $x_0\in F$,如果存在 $x^*\in E^*$,满足下述条件:

$$x^*(y-x_0)\leqslant f(y)-f(x_0),\forall\ y\in F,$$

则称 x^* 为 x_0 点的次梯度.

记 $\partial f(x_0)=\{x^*\in E^*,x^*$ 为 f 在点 x_0 的次梯度$\}$. 显然集 $\partial f(x_0)$ 非空.

引理 1[3]　设 F 为局部凸空间 E 的开凸子集,f 为其上的连续凸函数,若 $x_0\in F,x_0+ny\in F(t>0)$,则有 $x_N^*\in\{x^*:x^*\in E^*,x^*\in\partial f(x_0+my),0\leqslant m\leqslant n\}$,使得

$$nf_+(x_0)(y)\leqslant f(x_0+ny)-f(x_0)\leqslant nx_N^*(y),$$

其中 $f_+(x_0)(y)=\lim\limits_{\omega\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\omega y)-f(x_0)}{\omega}$.

收稿日期:2010-07-15
修回日期:2010-09-08
作者简介:孙　钰(1986-),女,硕士研究生,主要从事泛函分析空间理论研究。
*广西自然科学基金项目(桂科自 0728050)资助。

定义 2[3] 在局部凸空间 E 上,我们称次梯度映象在 x_0 处范-w^* 连续,如果 $\forall y \in E, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时,

$\sup\{|x^*(y) - x_0^*(y)|; x^* \in \partial f(x), x_0^* \in \partial f(x_0)\} < \varepsilon$.

定义 3[3] 在局部凸空间 E 上,我们称次梯度映象在 x_0 处范-范连续,如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时 $\| x^* - x_0^* \|_p < \varepsilon, \forall x^* \in \partial f(x), x_0^* \in \partial f(x_0)$.

引理 2 $f(x)$ 在 x_0 点 Gateaux 可微的充分必要条件为次梯度映象在 x_0 点范-w^* 连续.

证明 充分性.若 $f(x)$ 在 x_0 点非 Gateaux 可微,则 $\partial f(x_0)$ 不是单元素集,即存在 $x_1^*, x_2^* \in \partial f(x_0), x_1^* \neq x_2^*, \varepsilon_0 > 0$ 及 $y \in S(E)$,使得 $|x_1^*(y) - x_2^*(y)| \geqslant \varepsilon_0$,显然次梯度映象在 x_0 点非范-w^* 连续.

必要性.设 $f(x)$ 在 x_0 点 Gateaux 可微.若次梯度映象在 x_0 点非范-w^* 连续,则存在 $y_0 \in E, \varepsilon_0 > 0$,对任何 $\delta_n > 0$,都可以找到 $x_n \in U(x_0, \Delta_n)$,使得

$$|x_n^*(y_0) - x_0^*(y_0)| > \varepsilon_0, x_n^* \in \partial f(x_n).$$

又令 $\delta_n = \dfrac{1}{n}$,因 $\partial f(x)$ 是局部有界的,故存在 $M > 0$,对一切充分大的 n,有

$$\| \partial f(y) \|_p \leqslant M, \forall\ y \in U(x_0, \frac{1}{n}).$$

特别地,有 $\| x_n^* \|_p \leqslant M, n = 1,2,\cdots$ 由 Banach-Alaoglu 定理,存在 $\{x_n^*\}$ 的定向子列 $\{x_\alpha^*\}$ 使 $x_\alpha^* \xrightarrow{w^*} x^* \in E^*$,故对一切 $y \in U(x_0, \frac{1}{n})$,有 $x_\alpha^*(y - x_0) - M \| x_0 - x_\alpha \|_p \leqslant x_\alpha^*(y - x_0) - x_\alpha^*(x_\alpha - x_0) = x_\alpha^*(y - x_\alpha) \leqslant f(y) - f(x_\alpha)$. 又 $x_\alpha \to x_0, x_\alpha^* \xrightarrow{w^*} x^*$,所以 $\forall y \in U(x_0, \frac{1}{n})$,有 $x^*(y - x_0) \leqslant f(y) - f(x_0)$,因而 $x^* \in \partial f(x_0)$.注意到 $f(x)$ 在 x_0 点 Gateaux 可微 $\Leftrightarrow \partial f(x_0)$ 是单点集,所以 $x^* = x_0^*$.这与 $|x_n^*(y_0) - x_0^*(y_0)| > \varepsilon_0$ 相矛盾.故必要性得证.

引理 3 $f(x)$ 在 x_0 点 Fréchet 可微的充分必要条件为次梯度映象在 x_0 点范-范连续.

证明 充分性.若 $f(x)$ 在点 x_0 处非 Fréchet 可微,则有 $t_n \to 0^+, x_n \in S(E)$ 及 δ 使得

$$\frac{f(x_0 + t_n x_n) - f(x_0)}{t_n} - x_0^*(x_n) \geqslant \delta > 0, x_0^* \in \partial f(x_0).$$

由引理 1,存在 $\xi_n (0 \leqslant \xi_n \leqslant t_n), x_{n,M}^* \in \partial f(x_0 + \xi_n x_n)$,使得 $x_{n,M}^*(x_n) - x_0^*(x_n) \geqslant \delta$. 又因次梯度映象在 x_0 处范-范连续,所以从 $x_0 + \xi_n x_n \to x_0$ 可以推出 $x_{n,M}^* \to x_0^*$,这与上式矛盾.

必要性.设 $f(x)$ 在 $x_0 \in E$ Fréchet 可微,若次梯度映象在 x_0 处非范-范连续,则有 $\varepsilon_0 > 0, x_n \to x_0$ 及 $x_n^* \in \partial f(x_n)$,使得

$$\| x_n^* - x_0^* \|_p \geqslant \varepsilon_0, n = 1,2,\cdots$$

令 $\beta_n = x_n^*(x_n - x_0) - f(x_n) + f(x_0)$,由于 $x_n \to x_0$ 且 f 是连续的,故 $\beta_n \to 0$. 又 $x_n^* \in \partial f(x_n)$,因而

$$x_n^*(x_0 + y - x_n) \leqslant f(x_0 + y) - f(x_n).$$

进而有

$$x_n^*(y) \leqslant f(x_0 + y) - f(x_n) + x_n^*(x_n - x_0) = f(x_0 + y) - f(x_0) + x_n^*(x_n - x_0) - f(x_n) + f(x_0) = f(x_0 + y) - f(x_0) + \beta_n.$$

又因为 $\| x_n^* - x_0^* \|_p \to 0$,显然此与 $\| x_n^* - x_0^* \|_p \geqslant \varepsilon_0$ 矛盾,证明完毕.

2 主要结果

定理 1 设 E 为局部凸空间,$u(x)$ 为 E 上的连续规函数,则 $u(x)$ 在 $x_0 \in E$ 处 Gateaux 可微的充要条件为 $\forall\ y \in E$,令 $E_{\prod} = \mathrm{span}\{x_0, y\}$,恒有

$$\lim_{r \to 0^+} \sup_{\substack{m,n \in S_{p,x_0}(E_{\prod}) \cap U(x_0, r) \\ m \neq n}} \frac{1 - u(\frac{m+n}{2})}{p(m-n)} = 0, \tag{1}$$

其中 $S_{p,x_0}(E_{\prod}) = \{x \in E_{\prod}; u(x) = u(x_0)\}$.

证明 由 $u(x)$ 的正齐性,可以假定 $u(x_0) = 1$,并记 $S_p(E_{\prod}) = \{x \in E_{\prod}; u(x) = 1\}$.

充分性.若 $u(x)$ 在 x_0 点非 Gateaux 可微,可以取 $x_1^*, x_2^* \in \partial u(x_0), x_1^* \neq x_2^*$,使 $x_1^*(x_0) = x_2^*(x_0) = 1$. 令 $G_0 = \frac{1}{2}(x_1^* + x_2^*)$,取 $\bar{x} \in G_0^{-1} \cap S_p(E_{\prod})$,使 $1 \geqslant x_1^*(\bar{x}) = a > 0$,并令

$$x_n = (x_0 + \frac{1}{n}\bar{x})/[u(x_0 + \frac{1}{n}\bar{x})], y_n = (x_0 - \frac{1}{n}\bar{x})/[u(x_0 - \frac{1}{n}\bar{x})],$$

则 $x_n, y_n \in \mathrm{span}\{x_0, \bar{x}\}$. 根据次梯度的定义,有 $u(x_0 + \frac{1}{n}\bar{x}) - u(x_0) \geqslant x_1^*(\frac{1}{n}\bar{x}), u(x_0 - \frac{1}{n}\bar{x}) - u(x_0) \geqslant x_2^*(-\frac{1}{n}\bar{x})$. 又 $x_1^*(x_0) = x_2^*(x_0) = u(x_0) = 1$,故有 $u(x_0 + \frac{1}{n}\bar{x}) \geqslant x_1^*(x_0 + \frac{1}{n}\bar{x}) = 1 + \frac{a}{n} > 1, u(x_0 - \frac{1}{n}\bar{x}) \geqslant x_2^*(x_0 - \frac{1}{n}\bar{x}) = 1 + \frac{a}{n} > 1$. 所以

$$p(x_n - x_0) = p(\frac{x_0 + \frac{1}{n}\bar{x}}{u(x_0 + \frac{1}{n}\bar{x})} - (x_0 + \frac{1}{n}\bar{x}) +$$

$(x_0+\frac{1}{n}\bar{x})-x_0)\leqslant p(\frac{x_0+\frac{1}{n}\bar{x}}{u(x_0+\frac{1}{n}\bar{x})}-(x_0+\frac{1}{n}\bar{x}))+p((x_0+\frac{1}{n}\bar{x})-x_0)\leqslant p(x_0+\frac{1}{n}\bar{x})\left|\frac{1}{u(x_0+\frac{1}{n}\bar{x})}-1\right|+\frac{1}{n}p(\bar{x})\leqslant\frac{1}{n}(p(x_0)+p(\bar{x}))\leqslant\frac{M}{2n},M=2\max\{p(x_0)+p(\bar{x}),1,u(-\bar{x})\}$.

同理可证，$p(y_n-x_0)\leqslant\frac{M}{2n}$，因而 $p(y_n-x_n)\leqslant\frac{M}{n}$.

$$\frac{1}{2}u(x_n+y_n)=\frac{1}{2}u(\frac{x_0+\frac{1}{n}\bar{x}}{u(x_0+\frac{1}{n}\bar{x})}+\frac{x_0-\frac{1}{n}\bar{x}}{u(x_0-\frac{1}{n}\bar{x})})=\frac{1}{2}u[(\frac{1}{u(x_0+\frac{1}{n}\bar{x})}+\frac{1}{u(x_0-\frac{1}{n}\bar{x})})x_0+\frac{1}{n}u(\frac{1}{u(x_0+\frac{1}{n}\bar{x})}+\frac{1}{u(x_0-\frac{1}{n}\bar{x})})\bar{x}]\leqslant\frac{1}{2}\{u[(\frac{1}{u(x_0+\frac{1}{n}\bar{x})}+\frac{1}{u(x_0-\frac{1}{n}\bar{x})})x_0]+\frac{1}{n}u[(\frac{1}{u(x_0+\frac{1}{n}\bar{x})}+\frac{1}{u(x_0-\frac{1}{n}\bar{x})})\bar{x}]\}\leqslant\frac{1}{2}[\frac{1}{1+\frac{a}{n}}+\frac{1}{1+\frac{a}{n}}]+\frac{1}{n}\left|\frac{1}{u(x_0+\frac{1}{n}\bar{x})}-\frac{1}{u(x_0-\frac{1}{n}\bar{x})})x_0\right|\frac{M}{2}\leqslant\frac{1}{1+\frac{a}{n}}+\frac{1}{n}\frac{M}{2}\left|u(x_0-\frac{1}{n}\bar{x})-u(x_0+\frac{1}{n}\bar{x})\right|\leqslant\frac{1}{1+\frac{a}{n}}+\frac{M}{n^2},$$

所以 $1-\frac{1}{2}u(x_n+y_n)\geqslant(\frac{a}{n})/(1+\frac{a}{n})-\frac{M}{n^2}$，进而

$$\frac{1-\frac{1}{2}u(x_n+y_n)}{p(x_n-y_n)}\geqslant((\frac{a}{n})/(1+\frac{a}{n})-\frac{M}{n^2})/(\frac{M}{n})=\frac{a}{M(1+\frac{a}{n})}-\frac{1}{n}\rightarrow\frac{a}{M}>0,$$

此式与(1)式矛盾.

必要性. 设 $u(x)$ 在 $x_0\in S_p(E)$ 处 Gateaux 可微，对于每个 $y\in E,E_{\text{II}}=\text{span}\{x_0,y\}$，当 $m,n\in S_p(E_{\text{II}}),m\neq n$ 时，有

$$\frac{1-u(\frac{m+n}{2})}{p(m-n)}=\frac{u(m)-u(m+\frac{n-m}{2})}{p(m-n)}=\frac{u(m)-u(m+\lambda\omega)}{2\lambda}=-\frac{u(m+\lambda\omega)-u(m)}{2\lambda}\leqslant-\frac{1}{2}u_+(m)(\omega)\leqslant-\frac{1}{2}m^*(\omega)=\frac{1}{2}[n^*(\omega)-m^*(\omega)]-\frac{1}{2}n^*(\omega)=\frac{1}{2}(n^*-m^*)(\omega)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-n^*(m)}{p(n-m)}\leqslant\frac{1}{2}(n^*-m^*)(\omega)(\lambda=\frac{p(m-n)}{2},\omega=\frac{n-m}{p(m-n)}),$$

其中 $m^*\in\partial u(m),n^*\in\partial u(n)$.

注意到 $u(x)$ 在 x_0 处 Gateaux 可微，由引理 2 可知，次梯度映象在 x_0 点范-w^* 连续，即当 $m^*,n^*\xrightarrow{w^*}x_0^*$，进而在 $S(E_{\text{II}})$ 上一致的有 $(n^*-m^*)(x)\rightarrow0$，故(1)式成立.

定理 2 设 E 为局部凸空间，$u(x)$ 为 E 上的连续规函数，则 $u(x)$ 在 $x_0\in E$ 处 Fréchet 可微的充要条件为

$$\lim_{r\to0^+}\sup_{\substack{m,n\in S_{p,x_0}(E)\cap U(x_0,r)\\ m\neq n}}\frac{1-u(\frac{m+n}{2})}{p(m-n)}=0.\quad(2)$$

证明 不失一般性，仍假定 $u(x_0)=1$.

充分性. 设(2)式不真. 由定理 1 知 $u(x)$ 在点 x_0 处 Gateaux 可微，即 $\partial u(x_0)$ 是单元集. 若 $u(x)$ 在点 x_0 处非 Fréchet 可微，则有 $x_n\in S_p(E),x_n\rightarrow x_0,x_n^*\in\partial u(x_n)$ 及 $\varepsilon_0>0$，使得

$$\|x_n^*-x_0^*\|_p\geqslant\varepsilon_0,x_0^*\in\partial u(x_0),x_n^*(x_0)\geqslant1-\frac{1}{n^2},$$

令 $G_n=\frac{1}{2}(x_0^*+x_n^*)$，则 $G_n\neq x_0^*$. 由引理 2，$G_n\xrightarrow{w^*}x_0^*$，因而存在 $\{G_n\}$ 的一个子列(仍记为 $\{G_n\}$)及某个常数 $K>0,y_n\in S(E)$，使得 $G_n(y_n)=0$，$x_0^*(y_n)\geqslant\frac{\varepsilon_0}{K}$. 否则对任意的 $K>0$，当 n 充分大时，恒有

$$x_0^*(x)<\frac{\varepsilon_0}{K},\forall\ x\in G_n^{-1}(0)\cap S(E).$$

由 Bishop-Phelps 引理，或者

$$\left\|\frac{G_n}{\|G_n\|_p}-\frac{x_0^*}{\|x_0^*\|_p}\right\|_p\leqslant\frac{2\varepsilon_0}{K\|x_0^*\|_p},$$

或者

$$\left\|\frac{G_n}{\|G_n\|_p}+\frac{x_0^*}{\|x_0^*\|_p}\right\|_p\leqslant\frac{2\varepsilon_0}{K\|x_0^*\|_p}.$$

由 K 的任意性，或者

$$\left\|\frac{G_n}{\|G_n\|_p}-\frac{x_0^*}{\|x_0^*\|_p}\right\|_p\rightarrow0,n\rightarrow\infty,$$

或者

$$\left\|\frac{G_n}{\|G_n\|_p}+\frac{x_0^*}{\|x_0^*\|_p}\right\|_p\rightarrow0,n\rightarrow\infty.$$

若 $\frac{G_n}{\|G_n\|_p}-\frac{x_0^*}{\|x_0^*\|_p}\to 0$，即有 $\frac{\|x_0^*\|_p G_n}{\|G_n\|_p}\to x_0^*$，更有 $\frac{\|x_0^*\|_p G_n}{\|G_n\|_p}\xrightarrow{w^*}x_0^*$．又 $G_n\xrightarrow{w^*}x_0^*$，因此 $\|G_n\|_p\to\|x_0^*\|_p$，进而 $G_n\to x_0^*$，这样

$$\varepsilon_0\leqslant\|x_n^*-x_0^*\|_p=2\|G_n-x_0^*\|_p\to 0.$$

得出矛盾．

若 $\frac{G_n}{\|G_n\|_p}+\frac{x_0^*}{\|x_0^*\|_p}\to 0$，此时又与

$$\left(\frac{G_n}{\|G_n\|_p}+\frac{x_0^*}{\|x_0^*\|_p}\right)(x_0)\geqslant\frac{1-\frac{1}{2n^2}}{\|G_n\|_p}+\frac{1}{\|x_0^*\|_p}>\frac{1}{\|x_0^*\|_p}$$

相矛盾．因此上述常数 K 是存在．

令 $s_n=\frac{x_0+\frac{1}{n}y_n}{u(x_0+\frac{1}{n}y_n)}$，$t_n=\frac{x_0-\frac{1}{n}y_n}{u(x_0-\frac{1}{n}y_n)}$，显然 $u(s_n)=u(t_n)=1$，由 $G_n(y_n)=0$，知 $x_n^*(-y_n)=x_0^*(y_n)$，根据次梯度的定义，

$$u(x_0+\frac{1}{n}y_n)\geqslant x_0^*(\frac{1}{n}y_n)+u(x_0)\geqslant 1+\frac{\varepsilon_0}{nK},$$

$$u(x_n-\frac{1}{n}y_n)\geqslant x_n^*(-\frac{1}{n}y_n)+u(x_n)\geqslant 1+\frac{\varepsilon_0}{nK}.$$

由于 $x_n\to x_0$，不妨设 $\|x_n-x_0\|_p<\frac{1}{n^2}$，因 $u(x)$ 满足局部李普希兹条件，故

$$u(x_0-\frac{1}{n}y_n)\geqslant u(x_n-\frac{1}{n}y_n)-u(x_n-x_0)>1+\frac{\varepsilon_0}{nK}-\frac{M}{n^2},$$

其中 M 为某一常数，这样当 n 充分大时，有 $u(x_0-\frac{1}{n}y_n)>1+\frac{\varepsilon_0}{2nK}$．又

$$p(s_n-x_0)=p\left(\frac{x_0+\frac{1}{n}y_n}{u(x_0+\frac{1}{n}y_n)}-x_0\right)\leqslant p\left[\frac{x_0+\frac{1}{n}y_n}{u(x_0+\frac{1}{n}y_n)}-(x_0+\frac{1}{n}y_n)\right]+p\left[(x_0+\frac{1}{n}y_n)-x_0\right]\leqslant p(x_0+\frac{1}{n}y_n)\left|\frac{1}{u(x_0+\frac{1}{n}y_n)}-1\right|+\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{n}p(x_0)u(y_n)+\frac{1}{n}\leqslant\frac{M_1}{2n},$$

其中 $M_1=\max\{2[1+p(x_0)\sup\limits_n u(\pm y_n)],\sup\limits_n{}^2 u(\pm y_n)\}$．同理 $p(t_n-x_0)\leqslant\frac{M_1}{2n}$，可得到 $p(s_n-t_n)\leqslant\frac{M_1}{n}$，于是

$$\frac{1}{2}u(s_n+t_n)=\frac{1}{2}u\left[\left(\frac{1}{u(x_0+\frac{1}{n}y_n)}+\frac{1}{u(x_0-\frac{1}{n}y_n)}\right)x_0-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u(x_0+\frac{1}{n}y_n)}-\frac{1}{u(x_0-\frac{1}{n}y_n)}\right)y_n\right]\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{2}{1+\frac{\varepsilon_0}{nK}}+\frac{1}{n}\left|\frac{1}{u(x_0+\frac{1}{n}y_n)}-\frac{1}{u(x_0-\frac{1}{n}y_n)y_n}\right|\cdot\max\{u(y_n),u(-y_n)\}\right]\leqslant\frac{1}{1+\frac{\varepsilon_0}{nK}}+\frac{1}{n^2}\max{}^2\{u(y_n),u(-y_n)\}\leqslant\frac{1}{1+\frac{\varepsilon_0}{nK}}+\frac{M_1}{n^2},$$

从而，当 n 充分大时，有

$$\frac{1-u(\frac{s_n+t_n}{2})}{p(s_n-t_n)}\geqslant\frac{\frac{\varepsilon_0/nK}{1+\varepsilon_0/nK}-\frac{M_1}{n^2}}{\frac{M_1}{n}}=\frac{\varepsilon_0/K}{M_1(1+\varepsilon_0/nK)}-\frac{1}{n}>\frac{\varepsilon_0}{2M_1K}.$$

显然此式与(2)式矛盾．

必要性．设 $u(x)$ 在 $x_0\in S_p(E)$ Fréchet 可微．任给 $m,n\in S_p(E)$，$m\neq n$，记 $\lambda=\frac{p(m-n)}{2}$，$\omega=\frac{n-m}{p(n-m)}$，有

$$\frac{1-\frac{1}{2}u(m+n)}{p(m-n)}=\frac{u(m)-u(m+\lambda\omega)}{2\lambda}\leqslant-\frac{1}{2}u_+(m)(\omega)\leqslant-\frac{1}{2}m^*(\omega)=\frac{1}{2}(n^*-m^*)(\omega)-\frac{1}{2}n^*\left(\frac{n-m}{p(n-m)}\right)\leqslant\frac{1}{2}(n^*-m^*)(\omega)\leqslant\frac{1}{2}p(n^*-m^*)\leqslant\frac{1}{2}[p(n^*-x_0^*)+p(x_0^*-m^*)]\to 0(m,n\to x_0),$$

其中 $m^*\in\partial u(m)$，$n^*\in\partial u(n)$．因此(2)式为真．

参考文献：

[1] 陈道琦．支撑泛函唯一的一个充分条件[J]．数学学报，1982，25(3)：302-305.

[2] 俞鑫泰．范数 Fréchet 可微的一个充分条件——关于“支撑泛函唯一的一个充分条件”[J]．数学进展，1986，15(2)：211-213.

[3] 程立新．Banach 空间上连续规函数的 Gateaux 可微性与 Fréchet 可微性[J]．数学进展，1991，20(3)：326-334.

[4] 俞鑫泰．Banach 空间几何引论[M]．上海：华东师范大学出版社，1986.

（责任编辑：尹　闯）