

小波矩量法求解线天线电流方程

Solution of Wire Antenna Current Equation Based on Wavelet Method of Moment

魏丽英¹,陈晓鹏²

WEI Li-ying¹, CHEN Xiao-peng²

(1. 桂林电子科技大学数学与计算科学学院, 广西桂林 541004; 2. 潞安集团地质处, 山西长治 046204)

(1. School of Mathematics and Computational Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004; 2. Geological Department of Lu'an Group, Changzhi, Shanxi, 046204, China)

摘要:将小波分析与矩量法相结合来求解线天线方程,并用算例检验其优劣.先用矩量法得到矩阵方程,再通过小波基函数代替矩量法中的基函数和权函数进行求解.该方法能够减少计算量,节约计算机内存,可以有效求解线天线电流方程.

关键词:小波 矩量法 电流方程 线天线

中图分类号:O174.43 **文献标识码:**A **文章编号:**1005-9164(2010)04-0307-04

Abstract: Current distribution of wire antennas is studied by using wavelet method of moment, and its character is verified by examples. Firstly, the matrix equations are obtained by moment method, then the basis function and weight function in moment method are replaced by wavelet basis function for the fast calculation of current distribution. The experiment results show that the computational complexity of this algorithm is decreased correspondingly and computer memory is saved, And therefore, the effectiveness of this method on current equation is confirmed.

Key words: wavelet, moment method, current equation, wire antenna

矩量法^[1]是电磁场数值计算中广泛使用的经典方法之一,是一种将连续方程离散化成代数方程组的方法.矩量法的求解步骤统一,求解过程简单,应用起来较方便,可以达到所需的精度,但是它所形成的离散矩阵为一稠密矩阵,对于解决电磁数值计算中的电大尺寸物体来说,其计算量很大.所以在求解过程中需要一定的数学技巧,如积分方程离散化程度,基函数与权函数的选取,矩阵求解等.其中基函数与权函数的选择尤其重要.

在解决实际问题时,人们总希望用较小的计算量和内存空间求得较精确的解,小波算法对这类问题的解决具有一定的优势.本文将小波分析与矩量法相结

合来求解线天线电流方程.算例分析表明,该方法可以减少计算量,节约计算机内存.

1 矩量法的一般求解过程

首先将待求积分或微分方程写成带有积分或微分算符的算子方程,然后再将待求函数表示为某一组选用的基函数的线性组合并代入算子方程,最后用一组选取的权函数对所得的方程取矩量,得到一个矩阵方程或代数方程组.求解过程如下:

对于电磁场问题的一个算子方程:

$$L(f) = g, \quad (1)$$

其中, L 是线性算子, f 是未知的场或响应, g 是已知的源或激励.由确定理论^[2]可知(1)式的解是唯一的,即只有一个 f 对应一个已知的 g .如果 f 能由方程(1)解出,则 f 是一个精确的解析解.多数情况下 f 的解要通过数值方法进行预估.

先令 f 在 L 的定义域内被展开为 f_1, f_2, f_3, \dots ,

收稿日期:2010-06-01

修回日期:2010-06-10

作者简介:魏丽英(1981-),女,硕士研究生,主要从事小波分析及其应用.

f_n 的线性组合得

$$f = \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n, \quad (2)$$

其中, f_n 为展开函数, α_n 是系数. 将(2)式代入(1)式, 再应用算子 L 的线性性便可以得到

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n L(f_n) = g, \quad (3)$$

然后在 L 的值域内选取一组权函数, 并对每个权函数 ω_m 与(3)式两边同时作内积, 得

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \langle \omega_m, L(f_n) \rangle = \langle \omega_m, g \rangle, m=1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

此方程组可写成矩阵形式

$$MA = J, \quad (5)$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} \langle \omega_1, Lf_1 \rangle & \cdots & \langle \omega_1, Lf_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \omega_m, Lf_1 \rangle & \cdots & \langle \omega_m, Lf_n \rangle \end{bmatrix}, A =$$

$$[a_1, a_2, \dots, a_n]^T, J = [\langle \omega_1, g \rangle, \langle \omega_2, g \rangle, \dots, \langle \omega_m, g \rangle]^T.$$

如果矩阵 M 非奇异性, 则

$$A = M^{-1}J. \quad (6)$$

令 $F = [f_1, f_2, \dots]$, 则

$$f = FA = FM^{-1}J. \quad (7)$$

2 小波矩量法求解电流方程

小波通过小波展开^[3]与矩量法相结合^[4,5]. 小波展开依据多分辨分析, 将函数展开成小波级数, 再利用矩量法确定展开系数. 小波变换先利用一般简单的基函数(如脉冲基函数等)将函数展开, 并由矩量法得到常用的矩阵方程, 然后利用 Mallat 分解算法, 最后将稠密的矩量矩阵稀疏化后求解矩阵方程.

设所要求解的积分方程为^[6]

$$\int_L f(x')G(x, x')dx' = g(x), x \in L, \quad (8)$$

$$f(x) = 0, x \in \bar{L}, \quad (9)$$

式中 $G(x, x')$ 为已知的格林函数, $f(x')$ 为未知的电流, L 为积分区域. 设 $f(x)$ 为目标上待求的电流函数, 以小波函数为基函数将 $f(x)$ 展开, 得

$$f(x) \approx ap(x) + \sum_{m=m_1}^{m_2} \sum_{n=n_1}^{n_2(m)} A_{mn} \Psi_{mn}(x), \quad (10)$$

其中 a 和 A_{mn} 为待定系数, m_1 是较大特征尺度, m_2 是较小特征尺度. 且有

$$p(x) = \begin{cases} 1, x \in L, \\ 0, x \in \bar{L}. \end{cases} \quad (11)$$

将(10)式代入(8)式可得算子方程

$$aP(x) + \sum_{m=m_1}^{m_2} \sum_{n=N(m)} A_{mn} F_{mn}(x) = g(x), x \in L, \quad (12)$$

$$\sum_{m=m_1}^{m_2} \sum_{n=N(m)} A_{mn} \Psi_{mn}(x) = 0, x \in \bar{L}. \quad (13)$$

此时, $N(m) = n_2(m) - n_1(m)$ (基函数的个数), 使得它们的中心落在 L 及其邻域中, 其中

$$P(x) = \int_L p(x')G(x, x')dx', F_{mn}(x) =$$

$$\int_L \Psi_{mn}(x')G(x, x')dx'.$$

则积分方程(8)和(9)可以转化为(12)式和(13)式的矩阵形式. 选择与基函数相同的权函数对(12)式和(13)式两端作内积, 有

$$as + \sum_{m=m_1}^{m_2} \sum_{n=N(m)} A_{mn} \gamma_{mn} = q, \quad (14)$$

$$ac_{lk} + \sum_{m=m_1}^{m_2} \sum_{n=N(m)} A_{mn} \Phi_{mnlk} = q_{lk}, l, k \in L, \quad (15)$$

$$\sum_{m=m_1}^{m_2} \sum_{n=N(m)} A_{mn} \psi_{mnlk} = 0, l, k \in \bar{L}, \quad (16)$$

其中

$$s = \int_L P(x)p(x)dx = \int_L p(x) \int_L G(x, x')p(x')dx'dx, q = \int_L g(x)p(x)dx, \gamma_{mn} =$$

$$\int_L F_{mn}(x)p(x)dx = \int_L p(x) \int_L G(x, x')F_{mn}(x')\psi_{mn}(x')dx'dx, c_{lk} = \int_L P(x)\psi_{lk}(x)dx =$$

$$\int_L \psi_{lk}(x) \int_L G(x, x')p(x')dx'dx, q_{lk} =$$

$$\int_L g(x)\psi_{lk}(x)dx, \Phi_{mnlk} = \int_L F_{mn}(x)\psi_{lk}(x)dx =$$

$$\int_L \psi_{lk}(x) \int_L G(x, x')\psi_{mn}(x')dx'dx, \psi_{mnlk} =$$

$$\int_L \Psi_{mn}(x)\Psi_{lk}(x)dx.$$

$$\int_L \Psi_{mn}(x)\Psi_{lk}(x)dx.$$

$$\int_L \Psi_{mn}(x)\Psi_{lk}(x)dx.$$

令 $\vec{A} = (\vec{A}_{m_1}, \vec{A}_{m_1+1}, \dots, \vec{A}_{m_2})^T$, 其中, $\vec{A}_{m_i} = (A_{m_i,1}, A_{m_i,2}, \dots, A_{m_i, N(m_i)})^T$. 则(14)~(16)式可以表示为

$$\vec{B}'\vec{A}' = \vec{Q}', \quad (17)$$

$$\text{其中, } \vec{B}' = \begin{bmatrix} s & \vec{R}^T \\ \vec{C} & \vec{B} \end{bmatrix}, \vec{A}' = \begin{bmatrix} a \\ \vec{A} \end{bmatrix}, \vec{Q}' = \begin{bmatrix} q \\ \vec{Q} \end{bmatrix}.$$

$\vec{R}, \vec{C}, \vec{Q}$ 的构造同 \vec{A} , 分别由 $\gamma_{mn}, c_{lk}, q_{lk}$ 得到. 即

$$\vec{R} = (\vec{R}_{m_1}, \vec{R}_{m_1+1}, \dots, \vec{R}_{m_2})^T, \vec{C} = (\vec{C}_{l_1}, \vec{C}_{l_1+1}, \dots,$$

$$\vec{C}_{l_2})^T, \vec{Q} = (\vec{Q}_{l_1}, \vec{Q}_{l_1+1}, \dots, \vec{Q}_{l_2})^T.$$

其中, $l_1 = m_1, l_2 = m_2$. 矩阵 \vec{B} 表示为

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} \vec{B}_{l_1, m_1} & \vec{B}_{l_1, m_1+1} & \vec{B}_{l_1, m_2} \\ \vec{B}_{l_1+1, m_1} & \vec{B}_{l_1+1, m_1+1} & \\ \vdots & & \ddots \\ \vec{B}_{l_2, m_1} & \cdots & \cdots \vec{B}_{l_2, m_2} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

从而可以求得矩阵 \vec{B}' , 由此得 a 和 A , 进而解得待求未知量 $f(x)$.

3 算例分析

对任意形状的线天线(图 1), 天线的各项参数为: 天线周围介质的介电常数为 ϵ , 其中 \hat{s} 是该点切线方向的单位矢量, s 是天线上任意一点距馈电点的弧长, 假如导线很细, 则天线上的电流方向为导线的轴线方向.

线天线的 Pocklington 积分方程为

$$\int_L I(s') \left(\frac{\partial^2 G(s, s')}{\partial s'^2} + \beta^2 G(s, s') \right) ds' = -j\omega\epsilon_0 E(s), \quad (19)$$

式中 $I(s')$ 为线上的电流函数, L 是天线的周长, $E(s)$ 是已知的切向电场, $\beta = 2\pi/\lambda$ 是波数, 函数 $G(s, s')$ 表示对应问题的格林函数.

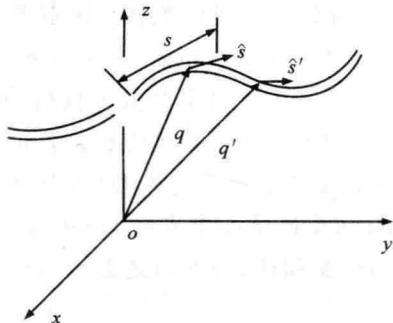


图 1 任意形状的线天线

Fig. 1 Wire antennas of arbitrary shape

以方环天线为例, 首先将天线分成 n 段(图 2).

那么位置矢量 q 可以表示为

$$q = \frac{1}{\zeta_t} \{ (\zeta - \zeta_t) q_{t-1} + (\zeta - \zeta_{t-1}) q_t \}, \quad (20)$$

其中, ζ 是天线环上各段的位置坐标, q_t 是节点 t ($t = 1, 2, \dots, n$) 的位置矢量, ζ_t 是第 t 个标准段的长度.

选择周期小波函数 $f_n(\zeta/L)$:

$$\begin{cases} f_0(x) = 1, \\ f_{2^j+t}(x) = f_{2^j}(x - t2^{-j}) \end{cases} \quad (21)$$

为基函数, 其中 $0 \leq t \leq 2^j - 1, j = 0, 1, 2, \dots$. 用 $2^j - 1$ 将线上的电流函数 $I(s)$ 展开:

广西科学 2010 年 11 月 第 17 卷第 4 期

$$I(s) = \sum_{n=0}^{2^j-1} I_n f_n(\zeta/L), \quad (22)$$

其中 I_n 是待定系数, 2^j 是控制展开精度的最高分辨率.

同时选取一组与基函数相同的权函数 $l_n(\zeta/L) = f_n(\zeta/L)$, 即对基函数取适当的权重, 将(22)式代入(19)式, 此时积分方程(19)可以转化为一矩阵形式, 再在(19)式两端同时与权函数 $l_n(\zeta/L)$ 作内积. 则天线环上各段所满足的方程可用矩阵形式表示为

$$[Z_{m,n}] \cdot [I_{n-1}] = [V_m], \quad (23)$$

其中,

$$[Z_{m,n}] = \sum_{t=1}^N \int_{\zeta_t} l_{m-1}(\zeta/L) \left\{ \sum_{t=1}^N \int_{\zeta_t} G(q, q') \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \beta^2 \hat{s} \cdot \hat{s}' \right) f_{n-1}(\zeta'/L) d\zeta' \right\} d\zeta,$$

$$[V_m] = \sum_{t=1}^N \int_{\zeta_t} l_{m-1}(\zeta/L) [-j\omega\epsilon E(q)] d\zeta, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots, 2^j.$$

应用脉冲基函数((24)式)与本文算法作对比.

$$e(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1/2, 1/2], \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \quad (24)$$

将(19)式展开(参数与前面一致). 计算结果(图 3)表明两种方法所得结果相符.

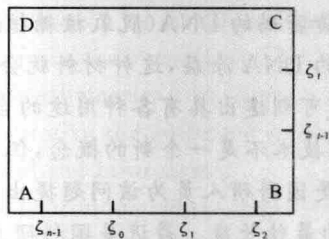


图 2 方环的分段

Fig. 2 Segmentation of a square loop

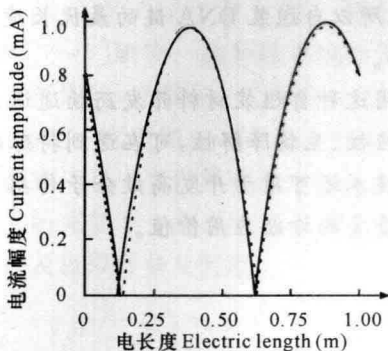


图 3 方环天线的电流分布

Fig. 3 Current distributions of a square loop antenna

—: 小波基函数; ·····: 脉冲基函数.

---: Wavelet basis function; ·····: Pulse basis function.

4 结束语

本文将小波分析应用到矩量法中求解电磁场积

分方程. 因为小波矩量法具有自适应剖分的功能, 可大大减小计算量, 而且小波具有消失矩特性, 小波展开后的矩阵具有很强的稀疏性, 计算量是 $O(N \log(N))$, 而直接通过矩阵求逆来解稠密的矩阵方程计算量是 $O(N^3)$. 在同一台主频为 1.70GHz, 内存为 1G 的计算机上, 采用相同的分段数, 获得了一致的结果, 但是本文算法比矩量法快了约 2.2s, 所占内存约少了 420KB. 随着分段数的增加, 此种优越性会更加突出, 说明小波矩量法求解线天线的电流分布是有效的.

参考文献:

[1] 成礼智, 郭汉伟. 小波与离散变换理论及工程实践[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
 [2] R F 哈林顿. 计算电磁场的矩量法[M]. 王尔杰, 译. 北京: 国防工业出版社, 1981: 49-73.

[3] Goswami J C, Chan K, Chui C K. On solving first-kind integral equations using wavelets on a bounded interval [J]. IEEE Trans AP, 1995, 43(6): 614-622.
 [4] Xiang Z, lu Y. An effective wavelet matrix transform approach for efficient solutions of electromagnetic integral equations[J]. IEEE Trans AP, 1997, 45(8): 1025-1213.
 [5] Golik W L. Wavelet packets for fast solution of electromagnetic integral equations[J]. IEEE Trans AP, 1998, 46(5): 618-624.
 [6] Geranmayeh Amir, Moini Rouzbeh, S H Hesam Sadeghi. On the use of piecewise linear wavelets for fast construction of sparsified moment matrices in solving the thin-wire [J]. EFIE Engineering Analysis with Boundary Elements, 2006, 30: 869-881.

(责任编辑: 尹 闯)

科学家发现 DNA 链自组装最佳长度

包含遗传密码的 DNA(脱氧核糖核酸)链, 会跟包含其独特互补序列的另一链结合在一起。如果给材料喷涂一种特殊的 DNA 涂层, 这种材料就会自动找出与其相配的配对物并与之结合。这种被称为 DNA 辅助自我组装的概念, 可创建出具有各种用途的自组装材料, 从而为生物医学和材料科学领域开拓广阔前景。实际上, DNA 自组装技术不是一个新的概念, 但其面临一大障碍: 片断太短会无法实现自我组装, 而片断太长会使材料变形。最近美国科研人员为该问题提出了解决方案, 他们从分子动力学角度利用计算机数据模拟, 确定了自组装 DNA 链的最佳长度。最近美国科研人员利用计算机数据模拟 DNA 链和 DNA 层间的相互作用结果显示, 短链(少于 10 个碱基)和长链(超过 30 个碱基)的单链 DNA 无法生成最合适的膜。因为 DNA 链会互相结合, 而不是和“配对”材料结合。这种自我保护机制让它们能和其他层的 DNA 链结合形成对 DNA 自身最适宜的组装情形, 所以自组装 DNA 链的最优长度并不是太长(以便与其他的链互相结合)也不是太短(以便能有效地自我折叠)。

在利用这种自组装材料开发药物递送工具方面, 科学家已经研制出一种自组装的 DNA 胶囊, 其具有完全的生物适应性、生物降解性, 可在遇到特殊物理刺激时释放药物, 从而使其成为最理想的药物递送工具。DNA 自我组装技术还可用于开发高效分子传感器。利用 DNA 探测临床上的重要生物分子并发出信号, 这在医学领域具有重要的诊断应用价值。

(据科学网)