广西科学 Guangxi Sciences 2010,17(4):316~317

具有σ-紧有限弱基的空间*

Spaces with a σ-Compact-Finite Weak Base

陈海燕,黄兵昌,王中立
CHEN Hai-yan,HUANG Bing-chang,WANG Zhong-li

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)
(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004,China)

摘要:研究弱开映射和 msk-映射,建立度量空间与具有 σ-紧有限弱基空间之间的联系,以有助于完善空间与映射理论.

关键词:σ-紧有限 msk-映射 弱基 度量空间

中图法分类号:O189.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2010)04-0316-02

Abstract: The images of the metric spaces is discussed. By means of the concept of weakly open and msk-mappings introduced, we establish the relationship between spaces with σ-compact-finite weak base and metric spaces, in order to improve the theory on Mappings and Spaces.

Key words: σ-compact-finite, msk-mapping, weak base, metric space

寻找度量空间的某些映射象的内在刻画一直是一般拓扑学中活跃的研究方向.夏省祥在文献[1]中引入了弱开映射的概念,并得到了一类 g-第一可数空间的刻画.李招文在文献[2]中引入 msk-映射的概念,并证明了拓扑空间 X 具有 σ-紧有限网当且仅当它是度量空间的 msk-映射象.本文通过研究弱开映射和 msk-映射,建立度量空间与具有 σ-紧有限弱基空间之间的联系,以有助于完善空间与映射理论.

本文所述的空间都假设为正则 T_1 的,所有映射均为连续到上的.N 表示自然数.对于空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 及映射 $f:X\to Y$,记 $f(\mathscr{P})=\{f(P):P\in\mathscr{P}\}$.

1 预备知识

定义 1 设 X 是一个空间,$\mathscr{P}$ 是 X 的覆盖.$\mathscr{P}=\bigcup\{\mathscr{P}_x: x\in X\}$ 称为 X 的一个弱基[3],如果对每一个 $x\in X$,$\mathscr{P}_x$ 是 X 的集族,且 $\mathscr{P}_x$ 的每一个元素都包含 x,满足:(a)在空间 X 中,$\mathscr{P}_x$ 是点 x 处的网;(b)若 $U,V\in\mathscr{P}_x$,则存在 $W\in\mathscr{P}_x$,使得 $W\subset U\cap V$;(c)X 的子集 G 是开集当且仅当对每一个 $x\in G$,存在 $P\in\mathscr{P}_x$ 使得 $P\subset G$.

定义 2 设 $f:X\to Y$ 是一个映射.

(1)f 称为弱开映射[1],如果存在 Y 的弱基 $\mathscr{B}=\bigcup\{\mathscr{B}_y: y\in Y\}$,且对每一个 $y\in Y$,存在 $x(y)\in f^{-1}(y)$,满足:$x(y)$ 的任何开邻域 U,存在 $B_y\in\mathscr{B}_y$,使得 $B_y\subset f(U)$.

(2)f 称为 msk-映射[2],如果存在以 X 为子空间的乘积空间 $\prod_{i\in N}X_i$,其中每一个 X_i 均为度量空间,满足:对于 Y 的任意紧子集 K 及每一个 $i\in N$,$cl(\pi_i f^{-1}(K))$ 是 X_i 的紧子集,X 是度量空间.

(3)f 称为1序列覆盖映射[4],若对于 $y\in Y$,存在 $x\in f^{-1}(y)$,满足:如果 Y 的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y,那么存在 X 中收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$ 使每一个 $x_n\in f^{-1}(y_n)$.

(4)f 称为商映射[5],若 $f^{-1}(U)$ 是 X 的开子集,则 U 是 Y 的开子集.

引理 1[1] 设 $f:X\to Y$ 是一个映射,X 是第一可数空间,则 f 是弱开映射当且仅当 f 是1序列覆盖商映射.

引理 2[2] 设 $f:X\to Y$ 是一个 msk-映射,则存在 X 的基 $\mathscr{B}$,使得 $f(\mathscr{B})$ 为 Y 中的 σ-紧有限网.

2 主要结果

定理 1 拓扑空间 X 具有 σ-紧有限弱基当且仅当它是度量空间的弱开 msk-映射象.

证明 必要性.设 $\mathscr{P}=\bigcup\{\mathscr{P}_i: i\in N\}$ 是 X 的 σ-紧有限弱基,其中每一个 $\mathscr{P}_i=\{P_\alpha:\alpha\in A_i\}$ 是 X 中的

收稿日期:2010-02-07

作者简介:陈海燕(1958-),女,教授,主要从事一般拓扑学研究工作。

*广西自然科学基金项目(桂科自 0728035)资助。

紧有限集族,不妨设每一个 $\mathscr{P}_i$ 关于有限交封闭并且 $X\in\mathscr{P}_i\subset\mathscr{P}_{i+1}$. 赋予每一个 A_i 离散拓扑,则 A_i 是度量空间. 置 $M=\{\alpha=(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}A_i:\{P_{\alpha_i}:i\in N\}\subset\mathscr{P}$ 是 X 中某点 $x(\alpha)$ 在 X 的网$\}$. 赋予 M 为 $\prod_{i\in N}A_i$ 所诱导的子空间拓扑,则 M 是度量空间. 由于 X 是 T_1 的,则 $x(\alpha)$ 是唯一确定的,这就通过 $f(\alpha)=x(\alpha)$ 定义了 $f:M\to X$ 为 M 到 X 的映射.

(i) f 是连续映射.

对于每一个 $\alpha=(\alpha_i)\in M$,有 $f(\alpha)=x(\alpha)\in X$,若 U 为点 $x(\alpha)$ 在 X 中的开邻域,则存在 $i\in N$,使得 $x(\alpha)\in P_{\alpha_i}\subset U$. 令 $W=\{\beta\in M:\pi_i(\beta)=\alpha_i\}$. 则 W 为 α 在 M 中的开邻域且 $f(W)\subset P_{\alpha_i}\subset U$. 因此,$f$ 是连续映射.

(ii) f 是满射.

对于每一个 $x\in X$,存在 $\{n_i\}$ 及 $\alpha_{n_i}\in A_{n_i}$ 使得 $\{P_{\alpha_i}:i\in N\}$ 是点 x 的网. 对于 $n\in N\setminus\{n_i:i\in N\}$,取 $\alpha_n\in A_n$,$P_{\alpha_n}=X$,$\alpha=(\alpha_n)$,则 $\alpha\in M$ 且 $f(\alpha)=x$.

(iii) f 是 msk-映射.

由于每一个 $\mathscr{P}_i$ 是 X 中的紧有限集族,则对于 X 的每一个紧子集 K 及每一个 $i\in N$,$\{\alpha\in A_i:P_\alpha\cap K\neq\phi\}$ 是有限集,置 $D_i=\{\alpha\in A_i:P_\alpha\cap K\neq\phi\}$,则 $\pi_i f^{-1}(K)\subset D_i$,即 $cl(\pi_i f^{-1}(K))\subset cl(D_i)=D_i$,则 $cl(\pi_i f^{-1}(K))$ 是 A_i 的紧子集,因此,f 是 msk-映射.

(iv) f 是弱开映射.

对于每一个 $n\in N$ 及 $\alpha_n\in A_n$,置

$B(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\{\beta\in M$:对于 $i\leqslant n,\pi_i(\beta)=\alpha_i\}$,

显然 $\{B(\alpha_1,\cdots,\alpha_n):n\in N\}$ 构成 M 中点 α 的局部邻域基. 令 $\mathscr{B}=\{B(\alpha_1,\cdots,\alpha_n):\alpha_i\in A_i,i\leqslant n,n\in N\}$,则 $\mathscr{B}$ 为 M 的一个基. 下面证明 $f(B(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))=\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}$,其中 $\alpha_n\in A_n$,$n\in N$. 对于每一个 $n\in N$ 及 $\alpha_n\in A_n$,$i\leqslant n$ 时,$f(B(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))\subset\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}$. 任取 $x\in\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}$,存在 $\beta=(\beta_j)\in M$,使得 $f(\beta)=x$. 对每一个 $j\in N$,$P_{\beta_j}\in\mathscr{P}_j\subset\mathscr{P}_{j+n}$,因此存在 $\alpha_{j+n}\in A_{j+n}$,使得 $P_{\beta_j}=P_{\alpha_{j+n}}$,令 $\alpha=(\alpha_j)$,则 $\alpha\in B(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,且 $f(\alpha)=x$,即 $x\in f(B(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))$,因此 $\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}\subset f(B(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))$. 因此,$f(B(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))=\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}$. 置

$\mathscr{P}_x=\{P\in\mathscr{P}:x\in P\}$,则 $\mathscr{P}=\bigcup\{\mathscr{P}_x:x\in X\}$.

对于每一个 $x\in X$,由 $\mathscr{P}$ 的定义,存在 $(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}A_i$ 使得 $\{P_{\alpha_i}:i\in N\}$ 是点 x 在 X 中的网,因此 $\alpha=(\alpha_i)\in f^{-1}(x)$.

设 G 是 M 中点 α 的任意开邻域,则存在 $j\in N$,使得 $B(\alpha_1,\cdots,\alpha_j)\subset G$,即 $f(B(\alpha_1,\cdots,\alpha_j))\subset f(G)$,因此 $\bigcap_{i\leqslant j}P_{\alpha_i}\subset f(G)$. 于是存在 $P_x\in\mathscr{P}_x$,使得 $P_x\subset\bigcap_{i\leqslant j}P_{\alpha_i}$,即 $P_x\subset f(G)$. 这样就存在了 X 的一个弱基 $\mathscr{P}$ 及 $\alpha\in f^{-1}(x)$ 满足定义 2 的条件(1). 因此,f 是弱开映射.

综上所述,X 是度量空间的弱开 msk-映射象.

充分性. 设 $f:M\to X$ 是弱开 msk-映射,其中 M 是度量空间. 由于 f 是 msk-映射,根据引理 2,存在 M 的基 $\mathscr{B}$,使得 $f(\mathscr{B})$ 为 X 中的 σ-紧有限网. 由于 f 是弱开映射,则存在 X 中弱基 $\mathscr{P}=\bigcup\{\mathscr{P}_x:x\in X\}$,使得对每一个 $x\in X$,存在 $\alpha\in f^{-1}(x)$,满足:对 α 的任何开邻域 U,存在 $P_x\in\mathscr{P}_x$,使得 $P_x\subset f(U)$. 对每一个 $x\in X$,置

$\mathscr{F}_x=\{f(B):\alpha\in B\in\mathscr{B}\}$,

$\mathscr{F}=\bigcup\{\mathscr{F}_x:x\in X\}$.

显然,$\mathscr{F}\subset f(\mathscr{B})$,因此 $\mathscr{F}$ 是 X 中的 σ-紧有限集族. 下面证明 $\mathscr{F}$ 是 X 的弱基. 显然 $\mathscr{F}$ 满足定义 1 中的条件(a).

对每一个 $x\in X$,若 $U,V\in\mathscr{F}_x$,存在 $C,D\in\mathscr{B}$ 使得 $\alpha\in C\cap D$ 且 $f(C)=U,f(D)=V$. 由于 $\mathscr{B}$ 是 M 的基,则存在 $B\in\mathscr{B}$ 使得 $\alpha\in B\subset C\cap D$,则 $f(B)\subset f(C\cap D)\subset U\cap V$,$f(B)\in\mathscr{F}$. 即 $\mathscr{F}$ 满足定义 1 中的条件(b).

若 $G\subset X$ 为 X 中的开集,则对于每一个 $x\in G$,$\alpha\in f^{-1}(G)$,由于 $\mathscr{B}$ 是 M 的基,则存在 $B\in\mathscr{B}$ 使得 $\alpha\in B\subset f^{-1}(G)$,则 $f(B)\subset G$ 且 $f(B)\in\mathscr{F}_x$.

若对每一个 $x\in G\subset X$,存在 $F\in\mathscr{F}_x$ 使得 $F\subset G$,则存在 $B\in\mathscr{B}$ 使得 $\alpha\in B$,$F=f(B)$,由于 B 为点 α 的开邻域,则存在 $P_x\in\mathscr{P}_x$ 使得 $P_x\subset f(B)$. 因此对于每一个 $x\in G$,存在 $P_x\in\mathscr{P}_x$ 使得 $P_x\subset G$. 由于 $\mathscr{P}=\bigcup\{\mathscr{P}_x:x\in X\}$ 是 X 的弱基,所以 G 为 X 中的开集. 即 $\mathscr{F}$ 满足定义 1 中的条件(c). 因此,$\mathscr{F}$ 是 X 的弱基. 即 $\mathscr{F}$ 是 X 的 σ-紧有限弱基.

由定理 1 及引理 1 可得如下推论.

推论 1 对于拓扑空间 X,以下各条等价:

(1) X 具有 σ-紧有限弱基;

(2) X 是度量空间的弱开 msk-映射象;

(3) X 是度量空间的 1 序列覆盖商 msk-映射象.

参考文献:

[1] 夏省祥. 一类 g-第一数空间的刻画[J]. 数学进展, 2000,29(1):61-64.

[2] Li Zhaowen, Jiang Shouli. On *msk*-images of metric spaces[J]. Georgian Mathmatical Journal, 2004, 20(1): 1-10.

[3] Arhangel'skii A V. Mappings and spaces[J]. Russian Math Surveys, 1966, 21: 115-162.

[4] Lin S. On sequence-covering s-mappings[J]. Chinese Adv Math, 1996, 25: 548-551.

[5] 林寿. 点可数覆盖与序列覆盖映射[M]. 北京:科学出版社, 2002.

(责任编辑:韦廷宗)