食饵具脉冲扰动与捕食者具连续收获的时滞捕食-食饵模型的动力学行为*

Dynamics of a Delayed Predator-Prey Model with Impulsive Perturbations on Prey and Continuous Harvesting on Predator

肖 琨,唐清干**
XIAO Kun,TANG Qing-gan

(桂林电子科技大学数学与计算科学学院,广西桂林 541004)
(School of Mathematics and Computational Science, Guilin University of Electronic Technology,Guilin,Guangxi,541004, China)

摘要:运用时滞泛函微分方程的基本理论和脉冲微分方程的比较定理、周期解存在定理,研究一个食饵具脉冲扰动与捕食者具连续收获的时滞捕食-食饵模型,得到捕食者灭绝周期解的全局吸引和系统持久的充分条件,证明系统所有解的一致完全有界.所得的结论可以为现实的生物资源管理提供策略依据.

关键词:脉冲扰动 捕食-食饵模型 连续收获 全局吸引 一致持久
中图法分类号:O175.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2011)01-0011-06

Abstract: A delayed predator-prey model with impulsive perturbations on prey and continuous harvesting on predator is studied. By using basic theory of delay differential equation, comparison theorem and periodic solution existing theorem of impulsive differential equations, sufficient conditions which guarantee the global attraction of predator-extinction periodic solution and permanence of the system are obtained. It is also proved that all solutions of the system are uniformly and ultimately bounded. The results provide reliable tactic basis for the practical biological resource management and enrich the theory of impulsive differential equation.

Key words: impulsive perturbation, predator-prey model, continuous harvesting, global attractivity, permanence

在自然界中,种群的增长通常有一个成长发育的过程,而且在其成长的每一个阶段都会表现出不同的特征,即物种在其各个生命阶段的生理机能差别比较显著,如捕食能力、竞争能力、扩散率等等.因此,研究具有阶段结构的种群模型具有现实意义[1,2].另一方面,时滞的出现对生态系统的性质也产生很大的影响,较长的时滞会破坏系统平衡态的稳定性从而出现周期波动.带有时滞和成长阶段的种群模型已有很多研究成果[3,4].利用脉冲微分方程能够充分考虑到瞬间变化对状态的影响,能够更准确,更合理地反映事物的变化规律,因此利用脉冲微分方程模拟生态种群时在某些方面更加接近现实,例如生育脉冲[5,6],脉冲疫苗接种,培养基的脉冲输入[7,8]等.这就要求在用数学模型来模拟生态种群时,必须同时考虑到阶段、时滞和脉冲的作用,这样才能更客观地反应事物的本质.目前,对于带有时滞和成长阶段且具脉冲效应的食饵-捕食者模型研究比较少,但是具有时滞和脉冲的种群在现实社会中广泛存在,所以研究时滞的脉冲捕食系统,具有十分重要的现实意义.

受近年来研究工作的启发,本文建立食饵具脉冲扰动与捕食者具连续收获的时滞捕食-食饵模型:

收稿日期:2009-03-09
修回日期:2010-04-06
作者简介:肖 琨(1985-),女,硕士研究生,主要从事方程定性理论研究。
*国家自然科学基金项目(No.10961011)资助。
**通讯作者。

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}&\dot{x}(t)=x(t)(a-bx(t))-\\&\quad\frac{\beta x^2(t)y_2(t)}{m^2y_2^2(t)+x^2(t)+1},\\&\dot{y}_1(t)=\frac{k\beta x^2(t)y_2(t)}{m^2y_2^2(t)+x^2(t)+1}-\\&\quad\frac{k\beta e^{-rT_1}x^2(t-T_1)y_2(t-T_1)}{m^2y_2^2(t-T_1)+x^2(t-T_1)+1}-\\&\quad ry_1(t),\\&\dot{y}_2(t)=\frac{k\beta e^{-rT_1}x^2(t-T_1)y_2(t-T_1)}{m^2y_2^2(t-T_1)+x^2(t-T_1)+1}-\\&\quad dy_2(t)-Ey_2(t),\end{aligned}\right\}t\neq nT,\\\left.\begin{aligned}&\Delta x(t)=\mu,\\&\Delta y_1(t)=0,\\&\Delta y_2(t)=0,\end{aligned}\right\}t=nT,n=1,2\cdots\end{cases}\tag{1}$$

系统(1)的初始条件是

$$(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)\in C_+=C([-T_1,0],R_+^3),$$
$$\varphi_i(0)>0,i=1,2,3,\tag{2}$$

其中 $x(t)$ 表示食饵种群在时刻 t 的密度，$y_1(t)$，$y_2(t)$ 分别表示捕食者幼体和成体在时刻 t 的密度，T_1 表示捕食者幼体长成成体的时间，β 表示捕食者成体对食饵的捕获率，k 表示营养变为捕食者成体的生育能力的转化率，$a>0$ 表示食饵的内禀增长率，$b>0$ 表示种内竞争系数，r、d 分别表示捕食者幼体和成体的死亡率，$0<E<1$ 表示对捕食者成体的连续捕获率，且 $r<d+E$，$\Delta x(t)=x(t^+)-x(t)$，$\mu\geqslant 0$ 表示在时刻 $t=nT,n\in Z_+$ 的食饵的投放量，T 表示投放食饵的时间间隔.

由于系统(1)的第 1 个和第 3 个方程不含 $y_1(t)$，所以我们把系统(1)简化为

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}&\dot{x}(t)=x(t)(a-bx(t))-\\&\quad\frac{\beta x^2(t)y_2(t)}{m^2y_2^2(t)+x^2(t)+1}\\&\dot{y}_2(t)=\frac{k\beta e^{-rT_1}x^2(t-T_1)y_2(t-T_1)}{m^2y_2^2(t-T_1)+x^2(t-T_1)+1}-\\&\quad dy_2(t)-Ey_2(t),\end{aligned}\right\}t\neq nT,\\\left.\begin{aligned}&\Delta x(t)=\mu\\&\Delta y_2(t)=0\end{aligned}\right\}t=nT,n=1,2\cdots\end{cases}\tag{3}$$

其中系统(3)的初始条件是

$$(\varphi_1,\varphi_3)\in C_+=C([-T_1,0],R_+^2),$$
$$\varphi_i(0)>0,i=1,3.\tag{4}$$

1 基本引理

引理 1[9] 假设函数 $w\in PC(R^+,R)$，考虑如下的脉冲微分不等式

$$\begin{cases}\dot{w}(t)\leqslant f(t)w(t)+g(t),t\neq T_k,\\w(T_k^+)\leqslant f_kw(T_k)+g_k,t=T_k,\\w(0^+)\leqslant w_0,\end{cases}\tag{5}$$

其中 $f,g\in PC(R^+,R)$，$f_k>0$，g_k 和 w_0 是常数，$k\in N$，则对 $t>0$ 有

$$w(t)\leqslant w(0)\prod_{0<T_k<t}f_k\exp\left(\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right)+$$
$$\int_0^t\prod_{s\leqslant T_k<t}f_k\exp\left(\int_s^t f(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)g(s)\mathrm{d}s+$$
$$\sum_{0<T_k<t}\prod_{T_k\leqslant T_j<t}f_j\exp\left(\int_{T_k}^t f(s)\mathrm{d}s\right)g_k.$$

引理 2[10] 考虑时滞微分方程：

$$\dot{x}(t)=a_1x(t-T)-a_2x(t),$$

假设 $a_1,a_2,T>0$；且在 $-T\leqslant t\leqslant 0$ 有 $x(t)>0$. 那么，当 $a_1<a_2$ 时，则 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$.

引理 3[11] 对于脉冲系统

$$\begin{cases}\dot{v}(t)=v(t)(a-bv(t)),t\neq nT,\\v(nT^+)=v(nT)+\mu,t=nT,n=1,2,\cdots\end{cases}\tag{6}$$

其中 $a,b,\mu>0$，那么系统(6)存在唯一的全局渐近稳定的正周期解

$$\overline{v(t)}=\frac{av^*e^{a(t-nT)}}{a-bv^*+bv^*e^{a(t-nT)}},t\in(nT,(n+1)T],n\in Z_+,$$

其中

$$v^*=\frac{(a+b\mu)+\sqrt{(a+b\mu)^2+4ab\mu/(e^{aT}-1)}}{2b},(>\frac{a}{b}).$$

2 主要结果

系统(1)的解 $P(t)=(x(t),y_1(t),y_2(t))^T$ 是一个分段连续函数 $P:R_+\to R_+^3$，$P(t)$ 在区间 $(nT,(n+1)T]$($n\in Z_+$) 上是连续的，并且存在 $P(nT^+)=\lim\limits_{t\to nT^+}P(t)$. 显然，系统(1)解的全局存在与唯一性可以由 f 的光滑性保证，其中 f 是由系统(1)右边函数定义的映射[9,12]. 为了保证初始条件的连续性，需要：

$$\varphi_2(0)=\int_{-T_1}^0 k\beta e^{rs}\frac{\varphi_1^2(s)\varphi_3(s)}{m^2\varphi_3^2(s)+\varphi_1^2(s)+1}\mathrm{d}s\tag{7}$$

成立.

定理 1 假设 $(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))>0$ 对 $-T_1<t<0$，那么系统(1)的所有解是严格正的.

证明 首先，由系统(1)的解的存在唯一性和当 $x(t)=0$，$t\neq nT$ 时有 $\dot{x}(t)=0$，并且 $x(nT^+)=x(nT)+\mu$，$\mu\geqslant 0$，因此对所有的 $t>0$，有 $x(t)>0$.

其次，我们证明对于所有 $t>0$，有 $y_2(t)>0$ 成

立. 否则,存在一个 $t_0>0$,使得 $y_2(t_0)=0$. 假设 t_0 是使得 $y_2(t)=0$ 的第 1 个时刻,即 $t_0=\inf\{t>0:y_2(t)=0\}$,因此

$$\dot{y}_2(t_0)=\frac{k\beta e^{-rT_1}x^2(t_0-T_1)y_2(t_0-T_1)}{m^2y_2^2(t_0-T_1)+x^2(t_0-T_1)+1}>0,$$

所以对充分小的 $\varepsilon>0$,使得 $\dot{y}_2(t_0-\varepsilon)>0$,而由 t_0 的定义,有 $\dot{y}_2(t_0-\varepsilon)\leqslant 0$,矛盾,因此对于所有的 $t>0$,有 $y_2(t)>0$.

最后,将方程

$$\dot{s}(t)=-\frac{k\beta e^{-rT_1}x^2(t-T_1)y_2(t-T_1)}{m^2y_2^2(t-T_1)+x^2(t-T_1)+1}-rs(t) \tag{8}$$

与系统(1)的第 2 个方程相比,如果 $s(t)$ 是(8)式的解,$y_1(t)$ 满足系统(1),那么在 $0<t<T_1$ 上有 $y_1(t)>s(t)$,由(8)式可得

$$s(t)=e^{-rt}[y_1(0)-\int_0^t\frac{k\beta e^{r(u-T_1)}x^2(u-T_1)y_2(u-T_1)}{m^2y_2^2(u-T_1)+x^2(u-T_1)+1}du].$$

又因为

$$\varphi_2(0)=\int_{-T_1}^0 k\beta e^{rs}\frac{\varphi_1^2(s)\varphi_3(s)}{m^2\varphi_3^2(s)+\varphi_1^2(s)+1}ds,$$

于是

$$s(T_1)=e^{-rT_1}[\int_{-T_1}^0 k\beta e^{rs}\frac{\varphi_1^2(s)\varphi_3(s)}{m^2\varphi_3^2(s)+\varphi_1^2(s)+1}ds-\int_0^{T_1}\frac{k\beta e^{r(u-T_1)}x^2(u-T_1)y_2(u-T_1)}{m^2y_2^2(u-T_1)+x^2(u-T_1)+1}du].$$

又因为 $x(t)=\varphi_1(t)$, $y_2(t)=\varphi_3(t)$, $t\in[-T_1,0]$,所以 $s(T_1)=0$,故 $y_1(t)>0$. 由于 $s(t)$ 是严格递减的,所以在 $t\in(0,T_1)$ 上有 $y_1(t)>s(t)\geqslant 0$,即在 $0\leqslant t\leqslant T_1$ 上有 $y_1(t)>0$. 由归纳法与文献[13]中定理 1 的证明方法,可以得到对所有的 $t\geqslant 0$,有 $y_1(t)>0$ 成立. 于是定理 1 得证.

定理 2 存在常数 $M>0$,对于足够大的 t,使得系统(1)的任意解 $(x(t),y_1(t),y_2(t))$,有 $x(t)\leqslant M/k$, $y_1(t)\leqslant M$, $y_2(t)\leqslant M$.

证明 定义 $w(t)=kx(t)+y_1(t)+y_2(t)$,当 $t\neq nT$ 时有

$$D^+w(t)|_{(1)}+rw(t)=k(a+r)x(t)-kbx^2(t)-(d+E-r)y_2(t),$$

因为 $r<d+E$,所以

$$D^+w(t)+rw(t)\leqslant k(a+r)x(t)-kbx^2(t)\leqslant M_0,$$

其中 $M_0=\frac{k(a+r)^2}{4b}$,当 $t=nT$ 时,

$$w(nT^+)=w(nT)+k\mu,$$

根据引理 1 可知,当 $nT<t\leqslant(n+1)T$ 时,有

$$w(t)\leqslant w(0)e^{-rt}+\int_0^t M_0e^{-r(t-s)}ds+\sum_{0<nT<t}k\mu e^{-r(t-nT)}\leqslant w(0)e^{-rt}+\frac{M_0}{r}(1-e^{-rt})+\frac{k\mu e^{-r(t-T)}}{1-e^{rT}}+\frac{k\mu e^{rT}}{e^{rT}-1}\to\frac{M_0}{r}+\frac{k\mu e^{rT}}{e^{rT}-1},t\to\infty,$$

所以 $w(t)$ 是一致完全有界的,由 $w(t)$ 的定义,我们可知对于充分大的 t,存在 1 个常数 $M=\frac{M_0}{r}+\frac{k\mu e^{rT}}{e^{rT}-1}>0$,使得 $x(t)\leqslant M/k$, $y_1(t)\leqslant M$, $y_2(t)\leqslant M$. 定理 2 证明完毕.

定理 3 如果

$$E>\frac{k\beta a^2(x_1^*)^2e^{2aT-rT_1}}{a^2(x_1^*)^2e^{2aT}+(a-bx_1^*+bx_1^*e^{aT})^2}-d$$

成立,那么系统(1)的捕食者灭绝周期解 $(\overline{x(t)},0,0)$ 是全局吸引的. 其中

$$x_1^*=\frac{(a+b\mu)+\sqrt{(a+b\mu)^2+4ab\mu/(e^{aT}-1)}}{2b}(>\frac{a}{b}).$$

证明 显然系统(1)的捕食者灭绝周期解 $(\overline{x(t)},0,0)$ 的全局吸引性与系统(3)的捕食者灭绝周期解 $(\overline{x(t)},0)$ 的全局吸引性是等价的,所以只需讨论系统(3)的捕食者灭绝周期解 $(\overline{x(t)},0)$ 的全局吸引性.

由系统(1)的第 1 个方程可得 $\dot{x}(t)\leqslant x(t)(a-bx(t))$,所以我们考虑脉冲比较系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_1(t)(a-bx_1(t)),t\neq nT,\\ \Delta x_1(t)=\mu,t=nT,\\ x_1(0^+)=x(0^+).\end{cases} \tag{9}$$

由引理 3,可以得到系统(9)的全局渐近稳定的正周期解为

$$\overline{x(t)}=\frac{ax_1^*e^{a(t-nT)}}{a-bx_1^*+bx_1^*e^{a(t-nT)}},t\in(nT,(n+1)T],n\in Z_+,$$

其中

$$x_1^*=\frac{(a+b\mu)+\sqrt{(a+b\mu)^2+4ab\mu/(e^{aT}-1)}}{2b},(>\frac{a}{b}).$$

再根据脉冲比较定理可知,当 $t\to\infty$时,有 $x(t)\leqslant x_1(t)$ 和 $x_1(t)\to\overline{x(t)}$ 成立. 因此,对于任意小的 $\varepsilon_0>0$,存在正整数 $k_1>0$,当 $t>k_1T$ 时,有

$$x(t)\leqslant x_1(t)\leqslant\overline{x(t)}+\varepsilon_0,t\in(nT,(n+1)T];n>k_1,$$

即

$$x(t) < \overline{x(t)} + \varepsilon_0 \leq \frac{ax_1^* e^{aT}}{a - bx_1^* + bx_1^* e^{aT}} + \varepsilon_0 = \rho,$$

$t \in (nT, (n+1)T]; n > k_1$.

由系统(3)的第2个方程可得

$$\dot{y}_2(t) \leqslant \frac{k\beta e^{-rT_1}\rho^2 y_2(t-T_1)}{m^2 y_2^2(t-T_1) + \rho^2 + 1} - (d + E)y_2(t) \leqslant k\beta e^{-rT_1}\frac{\rho^2}{\rho^2+1}y_2(t-T_1) - (d+E)y_2(t),$$

$t > nT + T_1; n > k_1$.

考虑脉冲比较微分系统

$$\dot{y}(t) = k\beta e^{-rT_1}\frac{\rho^2}{\rho^2+1}y(t-T_1) - (d+E)y(t),$$

$$t > nT + T_1; n > k_1, \tag{10}$$

而定理3的条件为

$$E > \frac{k\beta a^2 (x_1^*)^2 e^{2aT-rT_1}}{a^2 (x_1^*)^2 e^{2aT} + (a - bx_1^* + bx_1^* e^{aT})^2} - d,$$

令 ε_0 足够小时，则有

$$\frac{k\beta e^{-rT_1}\left(\frac{ax_1^* e^{aT}}{a - bx_1^* + bx_1^* e^{aT}} + \varepsilon_0\right)^2}{\left(\frac{ax_1^* e^{aT}}{a - bx_1^* + bx_1^* e^{aT}} + \varepsilon_0\right)^2 + 1} < d + E,$$

即 $k\beta e^{-rT_1}\frac{\rho^2}{\rho^2+1} < d+E$，根据引理2，可得 $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

设 $(x(t), y_2(t))$ 是系统(3)满足初值条件 $(\varphi_1, \varphi_3) \in C_+ = C([-T_1, 0], R_+^2)$ 的解，且 $y_2(\delta) = \varphi_3(\delta)(\delta \in [-T_1, 0])$. $y(t)$ 是系统(10)具初值条件 $y(\delta) = \varphi_3(\delta)(\delta \in [-T_1, 0])$ 的解. 再根据脉冲比较定理可得 $\lim\limits_{t\to+\infty} y_2(t) \leqslant \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$. 又因为 $y_2(t)$ 具有正性，于是可得 $\lim\limits_{t\to+\infty} y_2(t) = 0$，因此对充分小的 $\varepsilon_1 > 0$，存在1个正整数 $k_2 > 0(k_2 T > k_1 T + T_1)$，对所有 $t > k_2 T$，有 $y_2(t) < \varepsilon_1$.

再由系统(3)的第1个方程可得：

$$x(t)[a - (b + \beta\varepsilon_1)x(t)] \leqslant \dot{x}(t) \leqslant x(t)(a - bx(t)).$$

于是，考虑如下的2个脉冲比较系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)(a - bx_1(t)), t \neq nT, \\ \Delta x_1(t) = \mu, t = nT, \\ x_1(0^+) = x(0^+) \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = x_2(t)[a - (b + \beta\varepsilon_1)x_2(t)], t \neq nT, \\ \Delta x_2(t) = \mu, t = nT, \\ x_2(0^+) = x(0^+). \end{cases}$$

$x_1(t), x_2(t)$ 分别是这2个系统的解，且 $\overline{x_2(t)} = \frac{ax_2^* e^{a(t-nT)}}{a - (b+\beta\varepsilon_1)x_2^* + (b+\beta\varepsilon_1)x_2^* e^{a(t-nT)}}$，其中：

$x_2^* = \{[a + (b + \beta\varepsilon_1)\mu] + \sqrt{[a + (b+\beta\varepsilon_1)\mu]^2 + 4a(b+\beta\varepsilon_1)\mu/(e^{aT}-1)}\}/[2(b+\beta\varepsilon_1)], (> \frac{a}{b+\beta\varepsilon_1})$.

由脉冲比较定理可得，当 t 充分大时，有 $x_2(t) \leqslant x(t) \leqslant x_1(t)$，再根据引理3得到：当 $t \to \infty$ 时，$x_1(t) \to \overline{x(t)}$，$x_2(t) \to \overline{x_2(t)}$. 故对任意小的 $\varepsilon_2 > 0$，存在正整数 k_3，当 $n > k_3$ 时，

$$\overline{x_2(t)} - \varepsilon_2 \leqslant x(t) \leqslant \overline{x(t)} + \varepsilon_2, nT < t \leqslant (n+1)T,$$

由于 $\varepsilon_1 \to 0$，当 t 足够大时，有

$$\overline{x(t)} - \varepsilon_2 \leqslant x(t) \leqslant \overline{x(t)} + \varepsilon_2.$$

因此当 $t \to \infty$ 时，$x(t) \to \overline{x(t)}$. 定理3证明完毕.

定理4 如果

$E < -d + \{k\beta e^{-rT_1}[a + (b + \beta y_2^*)\mu + \sqrt{[a + (b+\beta y_2^*)\mu]^2 + 4a(b+\beta y_2^*)\mu/(e^{aT}-1)}]^2\}/\{4[1 + m^2 (y_2^*)^2](b+\beta y_2^*)^2 + [a + (b+\beta y_2^*)\mu + \sqrt{[a + (b+\beta y_2^*)\mu]^2 + 4a(b+\beta y_2^*)\mu/(e^{aT}-1)}]^2\}$，

则存在一个正数 q，当 t 充分大时，使得系统(3)的每一个正解 $(x(t), y_2(t))$ 均满足 $y_2(t) \geqslant q$. 其中 y_2^* 是由方程

$E + d < \{k\beta e^{-rT_1}[a + (b + \beta y_2^*)\mu + \sqrt{[a + (b+\beta y_2^*)\mu]^2 + 4a(b+\beta y_2^*)\mu/(e^{aT}-1)}]^2\}/\{4[1 + m^2 (y_2^*)^2](b+\beta y_2^*)^2 + [a + (b+\beta y_2^*)\mu + \sqrt{[a + (b+\beta y_2^*)\mu]^2 + 4a(b+\beta y_2^*)\mu/(e^{aT}-1)}]^2\}$

决定的.

证明 设 $(x(t), y_2(t))$ 是系统(3)的任意正解，对系统(3)的第2个方程作变换：

$$\dot{y}_2(t) = \left(\frac{k\beta e^{-rT_1}x^2(t)}{m^2 y_2^2(t) + x^2(t) + 1} - d - E\right)y_2(t) - k\beta e^{-rT_1}\frac{d}{dt}\int_{t-T_1}^{t}\frac{x^2(\delta)y_2(\delta)}{m^2 y_2^2(\delta) + x^2(\delta) + 1}d\delta, \tag{11}$$

因此定义 $v(t)$ 为

$$v(t) = y_2(t) + k\beta e^{-rT_1}\int_{t-T_1}^{t}\frac{x^2(\delta)y_2(\delta)}{m^2 y_2^2(\delta) + x^2(\delta) + 1}d\delta,$$

则沿系统(3)的解曲线对 $v(t)$ 求导得

$$\dot{v}(t) = \left(\frac{k\beta e^{-rT_1}x^2(t)}{m^2 y_2^2(t) + x^2(t) + 1} - d - E\right)y_2(t).$$

假设存在一个 $t_0 > 0$，当 $t > t_0$ 时，有 $y_2(t) < y_2^*$ 成立. 于是 $t > t_0$ 时，由系统(3)的第一个方程可得

$$\dot{x}(t) > [a - (b + \beta y_2^*)x(t)]x(t).$$

考虑脉冲微分比较系统：

$$\begin{cases}\dot{x}_3(t)=[a-(b+\beta y_2^*)x_3(t)]x_3(t),t\neq nT,\\ \Delta x_3(t)=\mu,t=nT,\\ x_3(0^+)=x(0^+).\end{cases}\tag{12}$$

由引理 3 可得

$$\overline{x_3(t)}=\frac{ax_3^* e^{a(t-nT)}}{a-(b+\beta y_2^*)x_3^*+(b+\beta y_2^*)x_3^* e^{a(t-nT)}},nT<t\leqslant(n+1)T,n\in Z_+,$$

其中

$$x_3^*=\frac{[a+(b+\beta y_2^*)\mu]+\sqrt{A}}{2(b+\beta y_2^*)},(>\frac{a}{b+\beta y_2^*})$$

是系统(12)的唯一正周期解,且其是全局渐近稳定,其中,$A=[a+(b+\beta y_2^*)\mu]^2+4a(b+\beta y_2^*)\mu/(e^{aT}-1)$. 再由脉冲比较定理可知,对任意给定 $\varepsilon>0$,存在 $t_1>t_0+T_1$,当 $t>t_1$ 时,使得不等式

$$x(t)\geqslant\overline{x_3(t)}+\varepsilon,nT<t\leqslant(n+1)T,n\in Z_+$$

成立. 因此,对所有 $t\geqslant t_1$,有

$$x(t)\geqslant x_3^*+\varepsilon\geqslant\frac{[a+(b+\beta y_2^*)\mu]+\sqrt{A}}{2(b+\beta y_2^*)}+\varepsilon=w,$$

故有

$$\dot{v}(t)>[\frac{k\beta e^{-rT_1}w^2}{m^2(y_2^*)^2+w^2+1}-d-E]y_2(t),$$

而由定理 4 可知:

$$E<-d+\{k\beta e^{-rT_1}[a+(b+\beta y_2^*)\mu+\sqrt{A}]^2\}/\{4[1+m^2(y_2^*)^2](b+\beta y_2^*)^2+[a+(b+\beta y_2^*)\mu+\sqrt{A}]^2\},$$

由此可知,有充分小 $\varepsilon>0$,使得

$$E+d<\frac{k\beta e^{-rT_1}(\frac{a+(b+\beta y_2^*)\mu+\sqrt{A}}{2(b+\beta y_2^*)}+\varepsilon)^2}{1+m^2(y_2^*)^2+(\frac{a+(b+\beta y_2^*)\mu+\sqrt{A}}{2(b+\beta y_2^*)}+\varepsilon)^2},$$

于是

$$E+d<\frac{k\beta e^{-rT_1}w^2}{m^2(y_2^*)^2+w^2+1}.$$

设 $y_2^m=\min\limits_{t\in[t_1,t_1+T_1]}y_2(t)$,假设对于 $t\geqslant t_1$,有 $y_2(t)\geqslant y_2^m$. 否则,存在某个 $T_0>0$,当 $t\in[t_1,t_1+T_1+T_0]$ 时,使得 $y_2(t)\geqslant y_2^m$,而 $y_2(t_1+T_1+T_0)=y_2^m$,且 $\dot{y}_2(t_1+T_1+T_0)<0$,因此由系统(3)的第 2 个方程可得

$$\dot{y}_2(t_1+T_1+T_0)=\frac{k\beta e^{-rT_1}x^2(t_1+T_0)y_2(t_1+T_0)}{m^2y_2^2(t_1+T_0)+x^2(t_1+T_0)+1}-(d+E)y_2(t_1+T_1+T_0)\geqslant[\frac{k\beta e^{-rT_1}w^2}{m^2(y_2^*)^2+w^2+1}-d-E]y_2^m>0,$$

这和 $\dot{y}_2(t_1+T_1+T_0)<0$ 矛盾,故对所有 $t\geqslant t_1$,有 $y_2(t)\geqslant y_2^m$. 因此,对于 $t\geqslant t_1$,有

$$\dot{v}(t)\geqslant[\frac{k\beta e^{-rT_1}w^2}{m^2(y_2^*)^2+w^2+1}-d-E]y_2^m>0,$$

这表明当 $t\rightarrow\infty$时,有 $v(t)\rightarrow\infty$. 这与 $v(t)\leqslant M(1+k\beta T_1e^{-rT_1})$ 矛盾,所以假设不成立.

根据假设,我们考虑以下 2 个情形:(i)对所有充分大的 t 有 $y_2(t)\geqslant y_2^*$,则达到证明的目的.(ii)当 t 充分大时,有 $y_2(t)$ 在 y_2^* 周围振动.

令 $q=\min\{y_2^*/2,q_1\}$,这里 $q_1=y_2^*e^{-(d+E)T_1}$. 要证明对充分大的t,有 $y_2(t)\geqslant q$. 第 1 种情形是显然成立的. 而第 2 种情形,对所有的 $t^*<t<t^*+\delta$,设 $t^*>0$ 和 $\delta>0$,并且满足 $y_2(t^*)=y_2(t^*+\delta)=y_2^*$,且 $y_2(t)<y_2^*$,$y_2(t)$ 是一致连续的,系统(3)的正解是一致完全有界,而且 $y_2(t)$ 并没有受到脉冲的影响. 因此,存在某个 $T(0<T<T_1$,且 T 依赖于 $t^*)$,使得 $y_2(t)>y_2^*/2(t^*<t<t^*+T)$,如果 $\delta<T$,结论非常明显. 如果考虑 $T<\delta<T_1$ 的情形,由于 $\dot{y}_2(t)>-(d+E)y_2(t)$,且 $y_2(t^*)=y_2^*$,则对于 $t\in[t^*,t^*+T_1]$,有 $y_2(t)\geqslant q_1$ 成立,因此上述证明可以类似继续做下去. 而对于 $t\in[t^*+T_1,t^*+\delta]$ 仍有 $y_2(t)\geqslant q_1$. 因为此类区间 $t\in[t^*,t^*+\delta]$ 选取的任意性(这里只需要 t^* 很大),所以对于充分大的 t,可得 $y_2(t)\geqslant q$. 由于q的选取与系统(1)的正解无关,因此,对于充分大的 t,可得系统(1) 的任意正解满足 $y_2(t)\geqslant q$. 定理 4 证明完毕.

定理 5 如果

$$E<-d+\{k\beta e^{-rT_1}[a+(b+\beta y_2^*)\mu+\sqrt{A}]^2\}/\{4[1+m^2(y_2^*)^2](b+\beta y_2^*)^2+[a+(b+\beta y_2^*)\mu+\sqrt{A}]^2\},$$

那么系统是持久的.

证明 根据系统(3)的第 1 个方程,有

$$\begin{cases}\dot{x}(t)\geqslant x(t)[a-(b+\beta M)x(t)],t\neq nT,\\ \Delta x(t)=\mu,t=nT.\end{cases}$$

类似于定理 3 的证明,易得

$$\lim_{t\rightarrow\infty}x(t)\geqslant\frac{a+(b+\beta M)\mu+\sqrt{A}}{2(b+\beta M)}-\varepsilon=p_1.$$

参照定理 3 的证明,系统(1)的第 2 个方程变成

$$\dot{y}_1(t)\geqslant\frac{k\beta p_1^2q}{m^2q^2+p_1^2+1}-\frac{k\beta e^{-rT_1}M^3}{k^2m^2M^2+M^2+k^2}-ry_1(t),$$

故

$$\lim_{t\to\infty} y_1(t) \geqslant \Big(\frac{k\beta p_1^2 q}{m^2q^2+p_1^2+1} - \frac{k\beta e^{-rT_1}M^3}{k^2m^2M^2+M^2+k^2}\Big)/r - \varepsilon = p_2,$$

最后，令 $p=\min\{p_1,p_2\}$，则有 $x(t)\geqslant p, y_1(t)\geqslant p$. 而由定理3与定理4的证明可知对于系统(1)的解 $(x(t),y_1(t),y_2(t))$，有 $x(t)\leqslant \frac{M}{k}, y_1(t)\leqslant M, y_2(t)\leqslant M$ 和 $y_2(t)\geqslant q$，因此系统(1)是持久的. 定理5证明完毕.

参考文献:

[1] 刘会民，陈兰荪. 非自治阶段结构捕食系统的持续生存[J]. 纯粹数学与应用数学，2002，18(1)：79-85.

[2] 刘琼. 具阶段结构和第Ⅲ类功能反应的混合模型的持久性与周期解[J]. 广西大学学报，2005，30(1)：85-88.

[3] Aiello W G, Freedman H I. A time-delay model of single-species growth with stage-structured[J]. Math Biosci, 1990, 101: 139-153.

[4] 王建军，仉志余. 具有阶段结构的竞争系统的持久性和稳定性[J]. 数学的实践与认识，2008，38(3)：62-66.

[5] Roberts M G, Kao R R. The dynamics of an infectious disease in a population with birth pulses[J]. Math Biosci, 1998, 149: 23-36.

[6] Tang S Y, Chen L S. Density-dependent birth rate, birth pulses and their population dynamic consequences[J]. J Math Biol, 2002, 44: 185-199.

[7] Sun S L, Chen L S. Dynamic behaviors of monod type chemostat model with impulsive perturbation on the nutrient concentration[J]. Math Chem, 2007, 42: 837-848.

[8] Funasaki E, Kot M. Invasion and chaos in a periodically pulsed mass-action chemostat[J]. Theor Popul Biol, 1993, 44: 203-224.

[9] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of impulsive differential equations[M]. Singapor: World Scientific, 1989.

[10] Kuang Y. Delay differential equations: with applications in population dynamics[M]. NY: Academic Press, 1993: 67-70.

[11] Dong L Z, Chen L S, Sun L H. Extinction and permanence of the predator-prey system with stocking of prey and harvesting of predator impulsively[J]. Math Methods Appl Sci, 2006, 29(4): 415-425.

[12] Bainov D D, Simeonov P S. Impulsive differential equations: periodic solutions and applications[M]. New York: Longman Scientific and Teachnical Press, 1993.

[13] Caltagironel L E, Doutt R L. Global behavior of an SEIRS epidemic model with delays, the history of the vedalia beetle importation to california and its impact on the development of biological control[J]. Ann Rev Entomol, 1989, 34: 1-16.

(责任编辑：韦廷宗)

德国科学家重组人类羊水细胞获得诱导多能干细胞

羊水细胞比其它普通类型的细胞有很多优点，首先，正常情况下羊水细胞在孕妇临产前就能够被提取，并且这些羊水细胞可以被重组建立大量的多能干细胞(iPS细胞)，医生可以通过对这些被重组的羊水细胞进行检查来判断孕妇是否患有疾病；其次，羊水混合物中包含有各种类型胎儿的体内细胞，由于羊水混合物中所包含细胞的“年龄”都比较小，因此这些细胞遭受周围环境引起的诱发突变的可能性就很小，从遗传学角度来说它们会更加稳定。羊水细胞的这些优点使得将羊水细胞重组成iPS细胞的速度要比重组其它细胞快很多，相对也更加容易，甚至可以将羊水细胞中建立的iPS细胞转成类似胚胎的干细胞。

最近德国科学家从人类胚胎的羊水中提取出羊水细胞，并将这些羊水细胞重组建立诱导iPS细胞。他们在羊水细胞重组过程中发现，许多控制细胞发展的基因都表现得很活跃，这就意味着重组而成的iPS细胞可以自发变异，按照将它们重组前的羊水细胞的生长方式发展。iPS细胞的这种特殊“记忆”功能可以使它们清楚地辨别出自己分别经过哪些羊水细胞重组而成，同时这种“记忆”功能还可以用于孕妇的产前检测。医生在孕妇生产前就可以从胎盘中提取羊水细胞进行重组，这样不仅可以利用羊水细胞的iPS细胞来检测孕妇和胎儿的身体健康状况，还可以为孕妇怀孕期间的其他预期用途做准备。以后即使新生婴儿患有疾病，医生也可以利用婴儿所在胎盘内的iPS细胞为新生患病婴儿进行治疗。

(据科学网)