广西科学 Guangxi Sciences 2011,18(1):17～21

一类 SEIR 传染病模型周期解的存在性
Periodic Solution of a SEIR Epidemic Model

徐翠翠
XU Cui-cui

(陕西铁路工程职业技术学院基础课部,陕西渭南　714000)
(Shannxi Railway Institute,Weinan,Shaanxi,714000,China)

摘要:通过研究一类传染率为周期函数且具有双线性传染项的 SEIR 模型的等价系统、子系统和其它的一些变换形式,两次利用拓扑度理论和连续性定理证明该模型至少存在一个正周期解,并通过数值模拟验证该结论是正确的.

关键词:传染病模型　周期解　稳定性
中图法分类号:O175.13　**文献标识码**:A　**文章编号**:1005-9164(2011)01-0017-05

Abstract: We obtained the existence of one periodic solution of SEIR model with periodic infectious parameter and bilinear incidence by using the coincidence degree theorem, continuous theorem, and other transformations twice. Meanwhile, numerical simulations verified our theoretical results.

Key words: epidemic model, periodic solution, stability

周期现象是疾病传播过程中的一种常见现象,温度、降雨等季节性变化常会导致一些疾病在每年相同的时间爆发,如流感等呼吸道疾病冬季是高发期.探讨生物模型周期解存在性已成为众多生物数学家的研究方向,过去传统的方法是利用常微分方程以及常微分定性理论中的极限环理论来证明微分方程周期解的存在性,方法相对比较单一.拓扑度理论的引入给周期解存在性证明打开了新天地,周期解理论的研究一度成为生物数学研究的热点,但是对生物模型的研究还基本上局限在生态模型上[1~5].

本文研究一类传染率为周期函数,具有双线性传染项的 SEIR 模型,通过研究其等价系统、子系统和一些变换,两次利用拓扑度理论和连续性定理得出系统至少存在一个正周期解的结论,并且通过数值模拟验证了这一结论,同时对周期解的稳定性也进行了数值模拟.

1　SEIR 模型

SEIR 模型为

$$\begin{cases} S'(t)=\Lambda-\beta(t)S(t)I(t)-dS(t), \\ E'(t)=\beta(t)S(t)I(t)-(d+\alpha)E(t), \\ I'(t)=\alpha E(t)-(d+\gamma+\delta)I(t), \\ R'(t)=\gamma I(t)-dR(t). \end{cases} \tag{1.1}$$

$S(t),I(t),R(t),E(t)$ 分别为易感者、感染者、恢复者、潜伏者的数量,Λ,d,γ 分别为单位时间内外界人口迁入量、自然死亡率、染病者恢复并具有免疫的比率,均为正常数,α,δ 分别为单位时间内潜伏者向感染者的转化率和染病者的因病死亡率.令 $K=\Lambda/d$,易得系统的基本再生数为 $R_0(t)=\dfrac{\beta(t)\alpha K}{(d+\alpha)(d+\gamma+\delta)}$,即感染者在平均病程期间传染率呈周期性变化.设 $f(t)$ 为 R 上有界连续函数,$\beta(t)$ 为 ω - 周期函数.记 $\bar{\beta}:=\dfrac{1}{\omega}\int_0^{\omega}f(t)\mathrm{d}t$.

2　SEIR 模型的理论分析

定理 1　若 $R_0=\dfrac{\bar{\beta}\alpha K}{(d+\alpha)(d+\gamma+\delta)}>1$,则系统(1.1)至少存在一个正的 ω - 周期解.

定理 1 的生物学意义:感染者在平均病程期间传染的病人数,即基本再生数为周期函数,当基本再生数的平均数 R_0 大于 1 时,疾病就会持续,且染病者数量会出现周期性变化.

收稿日期:2010-07-15
修回日期:2010-09-29
作者简介:徐翠翠(1984-),女,助教,主要从事生物数学研究。

证明 系统(1.1)前3个方程与第4个方程独立,仅考虑新系统:

$$\begin{cases}S'(t)=\Lambda-\beta(t)S(t)I(t)-dS(t),\\E'(t)=\beta(t)S(t)I(t)-(d+\alpha)E(t),\\I'(t)=\alpha E(t)-(d+\gamma+\delta)I(t).\end{cases}\tag{2.1}$$

为方便运算,令 $S(t)=\exp\{u(t)\}$,$E(t)=\exp\{v(t)\}$,$I(t)=\exp\{w(t)\}$,不影响正周期解存在性,系统(2.1)化为

$$\begin{cases}u'(t)=\Lambda\exp\{-u(t)\}-\\\qquad\bar{\beta}\exp\{w(t)\}-d,\\v'(t)=\beta\exp\{u(t)-v(t)+w(t)\}-\\\qquad(d+\alpha),\\w'(t)=\alpha\exp\{v(t)-w(t)\}-\\\qquad(d+\gamma+\delta).\end{cases}\tag{2.2}$$

易得,系统(1.1)、(2.1)正 ω-周期解与系统(2.2) ω-周期解的存在性等价.分析系统(2.2),可以令 $x(t)=v(t)-w(t)$,从而能简化计算,减少维数,得 $x'(t)=\beta\exp\{u(t)-x(t)\}-\alpha\exp\{x(t)\}+(\gamma+\delta-\alpha)$,与系统(2.2)第1式组成系统:

$$\begin{cases}u'(t)=\Lambda\exp\{-u(t)\}-\beta\exp\{w(t)\}-d,\\x'(t)=\beta\exp\{u(t)-x(t)\}-\alpha\exp\{x(t)\}+\\\qquad(\gamma+\delta-\alpha).\end{cases}\tag{2.3}$$

研究系统(2.3) ω-周期解存在性.对任意的 $\lambda\in(0,1)$,考虑系统:

$$\begin{cases}u'(t)=\lambda\{\Lambda\exp\{-u(t)\}-\\\qquad\beta\exp\{w(t)\}-d\},\\x'(t)=\lambda\{\beta\exp\{u(t)-x(t)\}-\\\qquad\alpha\exp\{x(t)\}+(\gamma+\delta-\alpha)\}.\end{cases}\tag{2.4}$$

设存在 $\lambda\in(0,1)$ 使得 $(u(t),x(t))^T$ 为系统(2.4)的 ω-周期解.估计系统解的范围.对系统(1.1),令 $N(t)=S(t)+E(t)+I(t)+R(t)$,则有

$$\Lambda-(d+\delta)N(t)<N'(t)=\Lambda-dN(t)-\delta N(t)<\Lambda-dN(t),\Lambda/(d+\delta)<N(t)<\Lambda/d,t\to\infty.$$

令 $K=\Lambda/d$,则存在 T,使得当 $t>T$ 时有 $S(t)=\exp\{u(t)\}<K,I(t)=\exp\{w(t)\}<K$,所以有

$$u(t)<\ln K=\delta_1.\tag{2.5}$$

对系统(2.4)第1式两端从0到 ω 积分得

$$\int_0^\omega\Lambda\exp\{-u(t)\}\mathrm{d}t=\int_0^\omega(d+\beta\exp\{w(t)\})\mathrm{d}t<(d+\bar{\beta}K)\omega,\Lambda\exp\{-u^M\}<d+\bar{\beta}K,u^M>\ln\frac{\Lambda}{d+\bar{\beta}K}>\ln\frac{\Lambda}{d+\beta^MK}.$$

又由于 $\int_0^\omega|u'(t)|\mathrm{d}t<\int_0^\omega\Lambda\exp\{-u(t)\}\mathrm{d}t+\int_0^\omega(d+\beta\exp\{w(t)\})\mathrm{d}t=2\int_0^\omega(d+\beta\exp\{w(t)\})\mathrm{d}t<2(d+\bar{\beta}K)\omega$,得

$$u(t)>u^M-\int_0^\omega|u'(t)|\mathrm{d}t>\ln\frac{\Lambda}{d+\beta^MK}-2(d+\bar{\beta}K)\omega=\delta_2,\delta_2<u(t)<\delta_1.\tag{2.6}$$

对系统(2.4)第2式,取 $\bar{X}\in\{x^M,x^m\}$,可得

$$\alpha\exp\{2\bar{X}\}-(\gamma+\delta-\alpha)\exp\{\bar{X}\}-\bar{\beta}K<0,$$

$$\alpha\exp\{2\bar{X}\}-(\gamma+\delta-\alpha)\exp\{\bar{X}\}-\bar{\beta}\exp\{\delta_2\}>0.$$

即得

$$\begin{cases}\exp\{\bar{X}\}>\\\qquad\dfrac{(\gamma+\delta-\alpha)+\sqrt{(\gamma+\delta-\alpha)^2+4\bar{\beta}\exp\{\delta_2\}\alpha}}{2\alpha},\\\exp\{\bar{X}\}<\dfrac{(\gamma+\delta-\alpha)+\sqrt{(\gamma+\delta-\alpha)^2+4\bar{\beta}K\alpha}}{2\alpha},\end{cases}$$

$$x(t)>\ln\frac{(\gamma+\delta-\alpha)+\sqrt{(\gamma+\delta-\alpha)^2+4\bar{\beta}\exp\{\delta_2\}\alpha}}{2\alpha}=\delta_4,$$

$$x(t)<\ln\frac{(\gamma+\delta-\alpha)+\sqrt{(\gamma+\delta-\alpha)^2+4\bar{\beta}K\alpha}}{2\alpha}=\delta_3,$$

$$\delta_4<x(t)<\delta_3.\tag{2.7}$$

显然 $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4$ 均与 λ 无关.对 $\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\beta(t)\exp\{w(t)\}\mathrm{d}t$,由积分中值定理知存在 $t^*\in[0,\omega]$ 使得

$$\beta(t^*)\exp\{w(t^*)\}=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\beta(t)\exp\{w(t)\}\mathrm{d}t.$$

现在考虑系统:

$$\begin{cases}\Lambda\exp\{-u\}-\beta(t^*)\exp\{w(t^*)\}-d=0,\\\bar{\beta}\exp\{u-x\}-\alpha\exp\{x\}+(\gamma+\delta-\alpha)=0,\end{cases}\tag{2.8}$$

其中 $(u,x)^T$ 为常数向量.设 $(u,x)^T$ 为系统(2.8)的一个常数解.由系统(2.8)第1式及对系统(2.4)解的估计方法得 $\ln\frac{\Lambda}{\beta^MK+d}<\ln\frac{\Lambda}{\beta(t^*)K+d}<u<\ln K$,进而有 $\delta_2<u<\delta_1$,

同理对系统(2.8)第2式有估计:$\delta_4<x<\delta_3$.

再定义空间及算子:

$$X=Z=\{(u(t),x(t))^T\in C(R,R^2)\mid u(t+\omega)=u(t),x(t+\omega)=x(t)\},$$

$$\|(u(t),x(t))^T\|=\max_{t\in(0,\omega)}|u(t)|+\max_{t\in(0,\omega)}|x(t)|.$$

易验证 X, Z 均为巴拿赫空间.令 $L:\mathrm{dom}L\subset X\to Z$,$L(u,x)^T=(u',x')^T$,$N:X\to Z$,$N\begin{pmatrix}u(t)\\x(t)\end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix}\Lambda\exp\{-u(t)\}-\beta\exp\{w(t)\}-d\\ \bar{\beta}\exp\{u(t)-x(t)\}-\alpha\exp\{x(t)\}+(\gamma+\delta-\alpha)\end{pmatrix}.$$

定义投影映射 P 和 Q 如下：

$$P\,(u(t),x(t))^T=\left[\frac{1}{\omega}\int_0^\omega u(t)\mathrm{d}t\quad \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(t)\mathrm{d}t\right]^T,$$

$\begin{pmatrix}u(t)\\x(t)\end{pmatrix}\in X$,

$$Q(u(t),x(t))^T=\left[\frac{1}{\omega}\int_0^\omega u(t)\mathrm{d}t\quad \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(t)dt\right]^T,$$

$\begin{pmatrix}u(t)\\v(t)\end{pmatrix}\in Z$.

显然 $\mathrm{Ker}L=\mathrm{Im}\ P=R^2$，$\mathrm{Im}\ L=\mathrm{Ker}Q=\{(u(t),x(t))^T\in Z:\bar{u}=\bar{x}=0\}$ 为 Z 中闭集，且 $\dim\mathrm{Ker}L=\dim\,(Z/\mathrm{Im}\ L)=2$. 因此 Fredholm 算子 L 指标为零. 定义 L 的广义逆

$$K_P:\mathrm{Im}\ L\to\mathrm{dom}L\cap\mathrm{Ker}P,K_P\begin{pmatrix}u(t)\\x(t)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\int_0^t u(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t u(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\ \int_0^t x(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\end{pmatrix}.$$

定义 $\Omega=\{(u(t),x(t))^T\in X\mid\delta_2<u(t)<\delta_1,\delta_4<x(t)<\delta_3\}$，则 Ω 为 X 中的有界开子集，易证存在 $(u,v)^T\in\Omega$ 为系统(2.8)的解.

由勒贝格收敛定理知 $QN:\bar{\Omega}\to Z$ 和 $K_P(I-Q)N:\bar{\Omega}\to Z$ 为连续算子. 由 Arzela-Ascoli 定理知 $QN(\bar{\Omega})$ 和 $K_P(I-Q)N(\bar{\Omega})$ 为紧空间. 因此，N 在 $\bar{\Omega}$ 上 L-紧. 易知如下结论成立：

(1) $\forall\lambda\in(0,1),x\in\partial\bar{\Omega}\cap\mathrm{dom}L$，有 $Lx\neq\lambda Nx$.

(2) $\forall x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\ L$，有 $QNx\neq 0$.

(3) $\deg\{\mathrm{JQN},\Omega\cap\mathrm{KerL},0\}\neq 0$.

因为，若令 $J=I:\mathrm{Im}\ L\to\mathrm{Ker}L$，$J\,(u(t),x(t))^T=(u(t),x(t))^T$，应用拓扑度理论，可以直接计算得

$$\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}=\deg\cdot\left\{\begin{pmatrix}\Lambda\exp\{-u\}-\beta(t^*)\exp\{w(t^*)\}-d\\ \bar{\beta}\exp\{u-x\}-\alpha\exp\{x\}+(\gamma+\delta-\alpha)\end{pmatrix},\ \Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\right\}=$$

$$\mathrm{sgn}\cdot\left\{\begin{vmatrix}-\Lambda\exp\{-u\} & 0\\ \bar{\beta}\exp\{u-x\} & -\bar{\beta}\exp\{u-x\}-\alpha\exp\{x\}\end{vmatrix}\right\}=$$

$$\mathrm{sgn}\,\{\bar{\beta}\Lambda\exp\{-x\}+\alpha\Lambda\exp\{x-u\}\}\neq 0.$$

由连续性定理知，系统(2.3)至少存在一个 ω-周期解.

下面证明 $v(t),w(t)$ 的有界性. 因为 $v(t),w(t)$ 有上界，只需证其有下界，等价于证明 E,I 为大于零的正数. 由 $E/I=\exp\{v(t)-w(t)\}=\exp\{x(t)\}$，得 $E=\exp\{x(t)\}I$. 令 $L(t)=\alpha E(t)+(d+\alpha)I(t)$，则 $L(t)=(\alpha\exp\{x(t)\}+d+\alpha)I$，令 $f(t)=\alpha\exp\{x(t)\}+d+\alpha$，则 $L(t)=f(t)I(t)$，从而有 $L'(t)=\beta\alpha S(t)I(t)-(d+\alpha)(d+\gamma+\delta)I(t)=[\beta\alpha S(t)-(d+\alpha)(d+\gamma+\delta)]/f(t)L(t)$.

此处用反证法. 若 $E(t),I(t)\to 0,t\to\infty$，则有 $R(t)\to 0,t\to\infty$，因而存在 $T>0$，使得当 $t>T$ 时有

$$\frac{\bar{\beta}\alpha K}{(d+\alpha)(d+\gamma+\delta)}>\frac{\bar{\beta}\alpha S(t)}{(d+\alpha)(d+\gamma+\delta)}>1.$$

从而 $\exists\varepsilon>0$，使得当 $t>T$ 时，有 $\frac{\bar{\beta}\alpha S(t)}{(d+\alpha)(d+\gamma+\delta)}-1>\varepsilon$ 成立，可得

$$L'(t)=\left\{\frac{\bar{\beta}\alpha S(t)}{(d+\alpha)(d+\gamma+\delta)}-1\right\}\frac{(d+\alpha)(d+\gamma+\delta)}{f(t)}L(t)>\varepsilon L(t).$$

从而 $L(t)>L_0\exp\{\varepsilon t\}\to\infty,t\to\infty$. 与 $L(t)=\alpha E(t)+(d+\alpha)I(t)\to 0$ 矛盾，因此得 $E(t)>0,I(t)>0$，从而 $\exists\varepsilon_1>0$，使得 $L(t)>\varepsilon_1$. 由(2.7)式，$E=\exp\{x(t)\}I$ 得

$$E(t)>\frac{\varepsilon_1}{\alpha+(d+\alpha)\exp(-\delta_4)}=\exp\{\delta_6\},$$

$$I(t)>\frac{\varepsilon_1}{\alpha\exp(\delta_3)+(d+\alpha)}=\exp\{\delta_8\}.$$

从而得

$$\delta_6<v(t)<\delta_5=\ln K,\delta_8<w(t)<\delta_7=\ln K.\qquad(2.9)$$

研究系统(2.2) ω-周期解的存在性. 对任意的 $\lambda\in(0,1)$，考虑系统：

$$\begin{cases}u'(t)=\lambda\{\Lambda\exp\{-u(t)\}-\beta\exp\{w(t)\}-d\},\\ v'(t)=\lambda\{\beta\exp\{u(t)-v(t)+w(t)\}-(d+\alpha)\},\\ w'(t)=\lambda\{\alpha\exp\{v(t)-w(t)\}-(d+\gamma+\delta)\}.\end{cases}\qquad(2.10)$$

设 $\exists\lambda\in(0,1)$ 使得 $(u(t),v(t),w(t))^T$ 为系统(2.10)的 ω-周期解. 由上述讨论可得

$$\delta_2<u(t)<\delta_1,\delta_6<v(t)<\delta_5,\delta_8<w(t)<\delta_7.$$

显然 $\delta_1,\delta_2,\delta_5,\delta_6,\delta_7,\delta_8$ 均与 λ 无关.

考虑系统：

$$\begin{cases}\Lambda\exp\{-u\}-\beta\exp\{w\}-d=0,\\ \beta\exp\{u-v+w\}-(d+\alpha)=0,\\ \alpha\exp\{v-w\}-(d+\gamma+\delta)=0,\end{cases}\qquad(2.11)$$

其中 $(u,v,w)^T$ 为常向量. 设 $(u,v,w)^T$ 为系统(2.11)的解,同上有

$$\delta_2 < u < \delta_1, \delta_6 < v < \delta_5, \delta_8 < w < \delta_7. \tag{2.12}$$

定义如下空间和算子:

$X=Z=\{(u(t),v(t),w(t))^T \in C(R,R^3) \mid u(t+\omega)=u(t),v(t+\omega)=v(t),w(t+\omega)=w(t)\}$,

$\|(u(t),v(t),w(t))^T\| = \max_{t\in(0,\omega)}|u(t)| + \max_{t\in(0,\omega)}|v(t)| + \max_{t\in(0,\omega)}|w(t)|$.

易验证 X, Z 均为巴拿赫空间. 令

$L:\mathrm{dom}L \subset X \to Z, L(u(t),v(t),w(t))^T = (u'(t),v'(t),w'(t))^T$,

其中 $\mathrm{dom}L=\{(u(t),v(t),w(t))^T \in X \mid (u(t),v(t),w(t))^T \in C^1(R,R^3)\}$.

定义 $N:X\to Z$,

$$N\begin{pmatrix}u(t)\\v(t)\\w(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Lambda\exp\{-u(t)\}-\beta(t)\exp\{w(t)\}-d\\ \beta(t)\exp\{u(t)-v(t)+w(t)\}-(d+\alpha)\\ \alpha\exp\{v(t)-w(t)\}-(d+\gamma+\delta)\end{pmatrix}.$$

定义投影映射 P 和 Q 如下:

$$P(u(t),v(t),w(t))^T=\left[\frac{1}{\omega}\int_0^\omega u(t)\mathrm{d}t \quad \frac{1}{\omega}\int_0^\omega v(t)\mathrm{d}t \quad \frac{1}{\omega}\int_0^\omega w(t)\mathrm{d}t\right]^T, (u(t),v(t),w(t))^T \in X,$$

$$Q(u(t),v(t),w(t))^T=\left[\frac{1}{\omega}\int_0^\omega u(t)\mathrm{d}t \quad \frac{1}{\omega}\int_0^\omega v(t)\mathrm{d}t \quad \frac{1}{\omega}\int_0^\omega w(t)\mathrm{d}t\right]^T, (u(t),v(t),w(t))^T \in Z.$$

显然 $\mathrm{Ker}L=\mathrm{Im}\,P=R^3$, $\mathrm{Im}\,L=\mathrm{Ker}Q=\{(u(t),v(t),w(t))^T \in Z \mid \bar{u}=\bar{v}=\bar{w}=0\}$ 为 Z 中闭集,且 $\dim\mathrm{Ker}L=\dim(Z/\mathrm{Im}\,L)=3$. 因此 Fredholm 算子 L 指标为零. 定义 L 的广义逆算子

$$K_P:\mathrm{Im}\,L \to \mathrm{dom}L \cap \mathrm{Ker}P,\ K_P\begin{pmatrix}u(t)\\v(t)\\w(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\int_0^t u(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t u(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\ \int_0^t v(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t v(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\ \int_0^t w(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t w(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\end{pmatrix}.$$

定义 $\Omega=\{(u(t),v(t),w(t))^T \in X \mid \delta_2<u(t)<\delta_1, \delta_6<v(t)<\delta_5, \delta_8<v(t)<\delta_7\}$,则 Ω 为 X 中的有界开子集. 由(2.12)式知,存在 $(u,v,w)^T \in \Omega$ 为系统(2.11)的解.

由勒贝格收敛定理知 $QN:\bar{\Omega}\to Z$ 和 $K_P(I-Q)N:\bar{\Omega}\to Z$ 为连续算子,又由 Arzela-Ascoli 定理知 $QN(\bar{\Omega})$ 和 $K_P(I-Q)N(\bar{\Omega})$ 为紧空间. 因此, N 在 $\bar{\Omega}$ 上 L-紧. 易得结论:

(1) $\forall\lambda\in(0,1)$, $(u(t),v(t),w(t)) \in \partial\bar{\Omega}\cap\mathrm{dom}L$, $L(u(t),v(t),w(t)) \neq \lambda N(u(t),v(t),w(t))$,

(2) $\forall(u,v,w)\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L=\partial\Omega\cap R^3$, $QN(u,v,w)^T\neq 0$,

(3) $\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\neq 0$.

因为,令 $J=I:\mathrm{Im}\,L\to\mathrm{Ker}L$, $J(u(t),v(t),w(t))^T=(u(t),v(t),w(t))^T$,应用拓扑度理论,可以直接得

$$\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}=$$

$$\deg\left\{\begin{pmatrix}\Lambda\exp\{-u\}-\bar{\beta}\exp\{w\}-d\\ \bar{\beta}\exp\{u-v+w\}-(d+\alpha)\\ \alpha\exp\{v-w\}-(d+\gamma+\delta)\end{pmatrix},\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\right\}=\mathrm{sgn}\cdot$$

$$\left\{\begin{vmatrix}-\Lambda\exp\{-u\} & 0 & -\bar{\beta}\exp\{w\}\\ \bar{\beta}\exp\{u-v+w\} & -\bar{\beta}\exp\{u-v+w\} & \bar{\beta}\exp\{u-v+w\}\\ 0 & \alpha\exp\{v-w\} & -\alpha\exp\{v-w\}\end{vmatrix}\right\}$$

$$=\mathrm{sgn}\{-\alpha(\bar{\beta})^2\exp\{u+w\}\}\neq 0.$$

由连续性定理,系统(2.2)存在一个 ω-周期解,从而系统(1.1)存在一个正的 ω-周期解.

3 数值模拟

定理 1 给出系统(1.1)正 ω-周期解存在的充分条件,而非充要条件. 当 $R_0=\frac{\bar{\beta}\alpha K}{(d+\alpha)(d+\gamma+\delta)}=1$ 时,系统也可能存在正 ω-周期解.

取参数 $K=10^3$, $d=2\times10^{-2}$, $\Lambda=d\times K=20$, $\beta(t)=(6+\cos(t))\times10^{-4}$, $\gamma=3\times10^{-2}$, $\alpha=\delta=10^{-2}$. 系统(1.1)化为

$$\begin{cases}S(t)=20-(6+\cos(t))\times10^{-4}S(t)I(t)-\\ \quad 2\times10^{-2}S(t),\\ E(t)=(6+\cos(t))\times10^{-4}S(t)I(t)-\\ \quad 3\times10^{-2}E(t),\\ I(t)=10^{-2}E(t)-6\times10^{-2}I(t),\\ R(t)=10^{-2}I(t)-2\times10^{-2}R(t).\end{cases}$$

易验证 $R_0=\frac{\bar{\beta}\alpha K}{(d+\alpha)(d+\gamma+\delta)}=\frac{6\times10^{-3}}{1.8\times10^{-3}}>1$,满足定理 1 的条件,因此该系统存在至少一个正的

2π-周期解（图 1）. 用 MATLAB7.1 调用 ODE45 函数模拟 $S(t), E(t), I(t), R(t)$ 的解曲线（图 1,2）. 其中初值为 $S0=1000, E0=I0=R0=100, R_0>1$, t 代表任何时间单位.

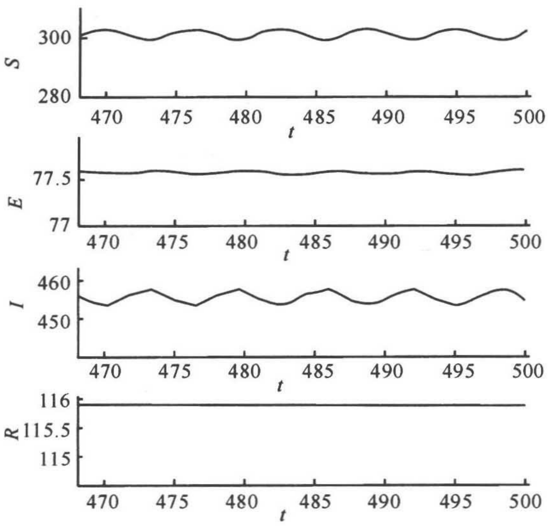

图 1　$S(t), E(t), I(t), R(t)$ 的解曲线

Fig. 1　Solution curves of $S(t), E(t), I(t), R(t)$

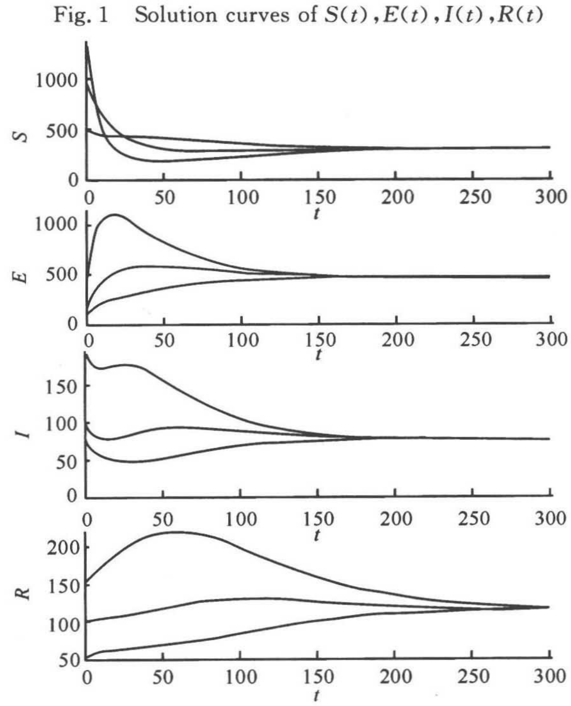

图 2　解曲线 $S(t), E(t), I(t), R(t)$ 的稳定性

Fig. 2　Stability of solution curves of $S(t), E(t), I(t), R(t)$

从图 2 可以看出，系统的周期解 $S(t), E(t), I(t), R(t)$ 是一致渐近稳定的.

取参数 $K=10^3, d=2\times10^{-2}, \Lambda=d\times K=20, \beta(t)=(3+\cos(t))\times10^{-4}, \alpha=\gamma=3\times10^{-2}, \delta=10^{-2}$. 系统(1.1)化为

$$
\begin{cases}
S(t)=20-(3+\cos(t))\times10^{-4}S(t)I(t)-\\
\quad 2\times10^{-2}S(t),\\
E(t)=(2+\cos(t))\times10^{-4}S(t)I(t)-\\
\quad 5\times10^{-2}E(t),\\
I(t)=3\times10^{-2}E(t)-6\times10^{-2}I(t),\\
R(t)=3\times10^{-2}I(t)-2\times10^{-2}R(t).
\end{cases}
$$

在 $R_0=\dfrac{\bar{\beta}\alpha K}{(d+\alpha)(d+\gamma+\delta)}=3\times10^{-3}/3\times10^{-3}=1$，不满足定理 1 的条件时，数值模拟得系统(1.1)仍存在正周期解（图 3）. 用 MATLAB 模拟 $S(t), E(t), I(t), R(t)$ 的解曲线，其中初值为 $S0=1000, E0=I0=R0=100, R_0=1$.

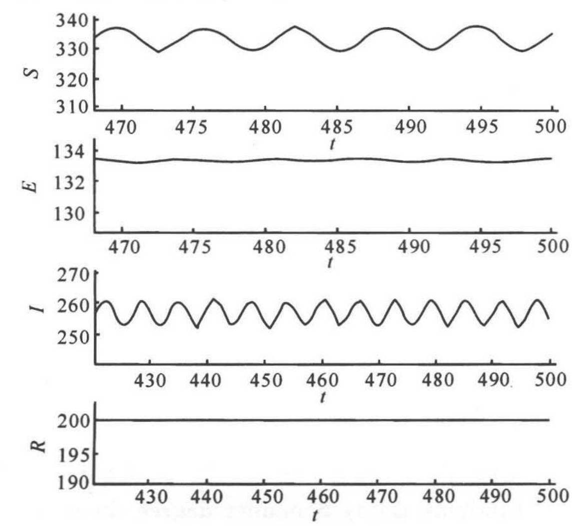

图 3　$S(t), E(t), I(t), R(t)$ 的解曲线

Fig. 3　Solution curves of $S(t), E(t), I(t), R(t)$

参考文献：

[1] Tian D S, Wang M, Zeng X W. Existence of two periodic solutions of a ratio-dependent predator-prey model with exploited term[J]. Acta Mathematicae Applicatee Sinica English Series, 2005, 21(3): 489-494.

[2] Xamxinur A, Teng Z D. On the persistence and extinction for a non-autonomous SIRS epidemic model[J]. 生物数学学报, 2006, 21(2): 167-176.

[3] 胡新利. 具有常数输入的非自治 SIR 流行病模型周期解的存在性[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(3): 372-376.

[4] Doedel E J, Govaerts W, Kuznetsov Y A. Computation of periodic solution bifurcation in ODES using bordered systems[J]. Siam J NUMER ANAL, 2003, 41(2): 401-435.

[5] Li M Y, Graef J R, Wang L, et al. Global dynamics of a SEIR model with varying total population size[J]. Mathematical Biosciences, 1999, 160: 191-213.

（责任编辑：尹　闯）