一类具有两个偏差变元的高阶微分方程反周期解的存在唯一性

Existence and Uniqueness of Anti-Periodic Solutions for a Class of High-order Differential Equation with Two Deviating Arguments

沈柳平,姚晓洁,杨继昌
SHEN Liu-ping,YAO Xiao-jie,YANG Ji-chang

(柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系,广西柳州 545004)
(Department of Mathematics and Computer Science, Liuzhou Teachers College, Liuzhou, Guangxi,545004,China)

摘要:利用 Leray-Schauder 度理论,获得一类具有两个偏差变元的高阶微分方程 $x^{(n)}(t)+f(t,x'(t),x''(t),\cdots,x^{(n-1)}(t))+g_1(t,x(t-\tau_1(t)))+g_2(t,x(t-\tau_2(t)))=e(t)$ 反周期解存在唯一性的充分条件.

关键词:高阶微分方程 偏差变元 反周期解 Leray-Schauder 度
中图法分类号:O175.8 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2011)01-0022-04

Abstract: Some sufficient conditions of the existence and uniqueness of anti-periodic solutions for a class of high-order differential equation with two deviating arguments as follows $x^{(n)}(t)+f(t,x'(t),x''(t),\cdots,x^{(n-1)}(t))+g_1(t,x(t-\tau_1(t)))+g_2(t,x(t-\tau_2(t)))=e(t)$ is obtained by employing Leray-Schauder degree theorem.

Key words: high-order differential equation,deviating argument,anti-periodic solutions,Leray-Schauder degree

著名的 Lienard 方程

$$x''(t)+f(x(t))x'(t)+g(x(t))=p(t)$$

具有较广泛的实际应用背景,其周期解的存在性一直是科研工作者感兴趣的课题,现已取得相当丰富的结果[1~5].而 Lienard 方程反周期现象也广泛存在于各种物理问题中,因此研究其反周期解问题同样具有重要的现实意义.最近,文献[6]研究了 Lienard 方程

$$x''(t)+f(x(t))x'(t)+g(t,x(t))=p(t) \quad (1)$$

反周期解的存在性。文献[7]讨论一类具有两个偏差变元的 Rayleigh 方程

$$x''(t)+f(t,x'(t))+g_1(t,x(t-\tau_1(t)))+g_2(t,x(t-\tau_2(t)))=e(t) \quad (2)$$

反周期解的存在唯一性问题,其中 $\tau_1,\tau_2,p\in C(R,R)$,且 τ_1,τ_2,p 都是 T-周期函数,$f,g_1,g_2\in C(R^2,R)$,且关于第1变量 t 是 T-周期函数,$T>0$.而高阶微分方程反周期解的存在唯一性报道很少见.本文研究一类具有两个偏差变元的高阶微分方程

$$x^{(n)}(t)+f(t,x'(t),x''(t),\cdots,x^{(n-1)}(t))+g_1(t,x(t-\tau_1(t)))+g_2(t,x(t-\tau_2(t)))=e(t) \quad (3)$$

反周期解的存在唯一性问题,其中 $\tau_1,\tau_2,p\in C(R,R)$,且 τ_1,τ_2,p 都是 T-周期函数,$f\in C(R^n,R)$,$g_1,g_2\in C(R^2,R)$,且关于第1变量 t 都是 T-周期函数,$T>0$.

我们利用 Leray-Schauder 度理论,获得了方程(2)反周期解的存在性与唯一性的充分条件.有趣的是当 $n=2$ 时,方程(3)退化为方程(2),因此本文的结论推广了文献[7]的相关结果.

1 预备知识

定义1 假设 $T>0$ 为常数,$u:R\to R$ 连续,若

收稿日期:2010-10-13
修回日期:2011-01-06
作者简介:沈柳平(1968-),女,讲师,主要从事微分方程的研究。

$$u(t+T)=u(t),u\left(t+\frac{T}{2}\right)=-u(t),\forall t\in R,$$

则称 $u(t)$ 是 R 上的反周期解.

引理 1[8] 设 Ω 是线性赋范空间 X 的一个有界开集，$\tilde{f}$ 在 $\bar{\Omega}$ 上是完全连续场，$p\in X\backslash\tilde{f}(\partial\Omega)$，如果 Leray-Schauder 度 $\deg\{\tilde{f},\Omega,p\}\neq 0$，则方程 $\tilde{f}(x)=p$ 在 Ω 上至少存在 1 个解.

引用如下记号：

$C_T^k=\{x\in C^k(R,R),x(t+T)=x(t)\},k\in\{0,1,2,\cdots\}$，

$$|x|_q=\left(\int_0^T|x(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}},|x|_\infty=\max_{t\in[0,T]}|x(t)|,)\ |x^{(k)}|_\infty=\max_{t\in[0,T]}|x^{(k)}(t)|,$$

$$C_T^{k,\frac{1}{2}}=\{x\in C_T^k:x\left(t+\frac{T}{2}\right)=-x(t),\forall t\in R\},$$

$$\|x\|=\max\{|x|_\infty,|x'|_\infty,\cdots,|x^{(k)}|_\infty\},\forall x\in C_T^{k,\frac{1}{2}}.$$

引理 2[9] （Wirtinger 不等式）设 $x\in C(R^2,R)$ 且 $x(t+T)=x(t)$，则 $|x'(t)|_2\leqslant\frac{T}{2\pi}|x''(t)|_2$.

引理 3 如果下面条件满足：

(H_0) 存在非负常数 $C_i,i=1,2,\cdots,n-1$，使得

$$|f(t,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})-f(t,y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})|\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}C_i|x_i-y_i|,\forall t,x_i,y_i\in R;$$

(H_1) 存在非负常数 $b_i,i=1,2$，使得

$$|g_i(t,x_1)-g_i(t,x_2)|\leqslant b_i|x_1-x_2|,i=1,2,\forall t,x_1,x_2\in R;$$

(H_2) $\sum_{i=1}^{n-1}C_i\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{n-i}+\frac{(b_1+b_2)T^n}{2(2\pi)^{n-1}}<1$.

则方程(3)至多存在 1 个反周期解.

证明 假设 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是方程(3)的两个反周期解，令 $z(t)=x_1(t)-x_2(t)$，则

$$z''(t)+f(t,x'_1(t),x''_1(t),\cdots,x_1^{(n-1)}(t))-f(t,x'_2(t),x''_2(t),\cdots,x_2^{(n-1)}(t))+g_1(t,x_1(t-\tau_1(t)))-g_1(t,x_2(t-\tau_1(t)))+g_2(t,x_1(t-\tau_2(t)))-g_2(t,x_2(t-\tau_2(t)))=0.\quad(4)$$

注意到 $z(t)$ 也是方程(3)的反周期解，则

$$\int_0^T z(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{T}{2}}z(t)\mathrm{d}t+\int_{\frac{T}{2}}^T z(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{T}{2}}z(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{T}{2}}z\left(t+\frac{T}{2}\right)\mathrm{d}t=0.$$

于是存在常数 $\xi\in[0,T]$，使得 $z(\xi)=0$，从而有

$$|z(t)|=|z(\xi)+\int_\xi^t z'(s)\mathrm{d}s|\leqslant\int_\xi^t|z'(s)|\mathrm{d}s,t\in[\xi,\xi+T],\quad(5)$$

$$|z(t)|=|z(t-T)|=|z(\xi)+\int_{t-T}^\xi z'(s)\mathrm{d}s|\leqslant\int_{t-T}^\xi|z'(s)|\mathrm{d}s,t\in[\xi,\xi+T].\quad(6)$$

由(5)式和(6)式得

$$|z|_\infty=\max_{t\in[0,T]}|z(t)|=\max_{t\in[\xi,\xi+T]}|z(t)|\leqslant\max_{t\in[\xi,\xi+T]}\left\{\frac{1}{2}\left(\int_\xi^t|z'(s)|\mathrm{d}s+\int_{t-T}^\xi|z'(s)|\mathrm{d}s\right)\right\}\leqslant\frac{1}{2}\int_0^T|z'(s)|\mathrm{d}s\leqslant\frac{\sqrt{T}}{2}|z'|_2.\quad(7)$$

将方程(4)两边同乘以 $z^{(n)}(t)$，并从 0 到 T 积分，并由(7)式、(H_0)、(H_1)和 Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}|z^{(n)}|_2^2\leqslant&\int_0^T|f(t,x'_1(t),x''_1(t),\cdots,x_1^{(n-1)}(t))-f(t,x'_2(t),x''_2(t),\cdots,x_2^{(n-1)}(t))|\cdot|z^{(n)}(t)|\mathrm{d}t+\int_0^T|g_1(t,x_1(t-\tau_1(t)))-g_1(t,x_2(t-\tau_1(t)))||z^{(n)}(t)|\mathrm{d}t+\\&\int_0^T|g_2(t,x_1(t-\tau_2(t)))-g_2(t,x_2(t-\tau_2(t)))||z^{(n)}(t)|\mathrm{d}t\leqslant\\&\sum_{i=1}^{n-1}C_i\int_0^T|x_1^{(i)}(t)-x_2^{(i)}(t)||z^{(n)}(t)|\mathrm{d}t+b_1\int_0^T|x_1(t-\tau_1(t))-x_2(t-\tau_1(t))||z^{(n)}(t)|\mathrm{d}t+\\&b_2\int_0^T|x_1(t-\tau_2(t))-x_2(t-\tau_2(t))||z^{(n)}(t)|\mathrm{d}t\leqslant\\&\sum_{i=1}^{n-1}C_i|z^{(i)}|_2|z^{(n)}|_2+(b_1+b_2)|z|_\infty\cdot\sqrt{T}|z^{(n)}|_2\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{n-i}C_i|z^{(n)}|_2^2+\\&\frac{(b_1+b_2)T}{2}|z'|_2\ |z^{(n)}|_2\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n-1}C_i\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{n-i}+\frac{(b_1+b_2)T^n}{2(2\pi)^{n-1}}\right]|z^{(n)}|_2^2.\end{aligned}\quad(8)$$

结合(8)式和条件(H_2)得

$$z^{(n)}(t)\equiv 0,\forall t\in R.\quad(9)$$

由于 $z^{(n-2)}(0)=z^{(n-2)}(T)$，则存在 $\xi_{n-1}\in[0,T]$，使得 $z^{(n-1)}(\xi_{n-1})=0$. 再结合(9) 式得

$$z^{(n-1)}(t)\equiv 0,\forall t\in R.\quad(10)$$

利用类似的估计方法，我们有 $z(t)\equiv z'(t)\equiv\cdots\equiv z^{(n-2)}(t)\equiv 0,\forall t\in R$. 从而 $x_1(t)\equiv x_2(t)$，即方程(3)至多存在 1 个反周期解.

2 主要结果

定理 1 假设条件(H_0)、(H_1)和(H_2)成立，并且满足：

(H_3)对 $\forall t,x\in R$，有

$$f\left(t+\frac{T}{2},-x_1,-x_2,\cdots,-x_{n-1}\right)=-f(t,$$

$x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}),p\left(t+\frac{T}{2}\right)=-p(t),g_i(t+$

$\frac{T}{2},-x)=-g_i(t,x),\tau_i\left(t+\frac{T}{2}\right)=\tau_i(t),i=1,2.$

则方程(3)存在唯一的个反周期解.

证明 考虑辅助方程

$$x''(t)=-\lambda f(t,x'(t),x''(t),\cdots,x^{(n-1)}(t))-\lambda g_1(t,x(t-\tau_1(t)))-\lambda g_2(t,x(t-\tau_2(t)))+\lambda e(t)\stackrel{\Delta}{=}\lambda Q_1(t,x(t),x'(t),x''(t),\cdots,x^{(n-1)}(t)),\lambda\in(0,1]. \quad (11)$$

显然 $Q_1(t,x(t),x'(t),x''(t),\cdots,x^{(n-1)}(t))$ 连续.

根据引理3,知方程(3)至多有1个反周期解.下面只须证明方程(3)至少存在1个反周期解即可.

为了应用引理1,首先证明方程(11)的所有反周期解有界.

设 $x(t)\in C_T^{n-1,\frac{1}{2}}$ 是方程(11)任一反周期解,利用类似(7)式的估计方法,可得

$$|x|_\infty\leqslant\frac{\sqrt{T}}{2}|x'|_2. \quad (12)$$

将(11)式两边同乘以 $x^{(n)}(t)$,并从0到 T 积分,根据(12)式、(H_0)、(H_1)和 Schwarz 不等式得

$$|x^{(n)}|_2^2\leqslant\int_0^T|f(t,x'(t),x''(t),\cdots,x^{(n-1)}(t))||x^{(n)}(t)|\mathrm{d}t+\int_0^T|g_1(t,x(t-\tau_1(t)))|\cdot|x^{(n)}(t)|\mathrm{d}t+\int_0^T|g_2(t,x(t-\tau_2(t)))|\cdot|x^{(n)}(t)|\mathrm{d}t+\int_0^T|e(t)||x^{(n)}(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^T[|f(t,x'(t),x''(t),\cdots,x^{(n-1)}(t))-f(t,0,0,\cdots,0)|+|f(t,0,0,\cdots,0)|]|x^{(n)}(t)|\mathrm{d}t+\int_0^T[|g_1(t,x(t-\tau_1(t)))-g_1(t,0)|+|g_1(t,0)|]|x^{(n)}(t)|\mathrm{d}t+\int_0^T[|g_2(t,x(t-\tau_2(t)))-g_2(t,0)|+|g_2(t,0)|]|x^{(n)}(t)|\mathrm{d}t+|e|_\infty\sqrt{T}|x^{(n)}|_2\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}C_i\int_0^T|x^{(i)}(t)||x^{(n)}(t)|\mathrm{d}t+(b_1+b_2)|x|_\infty\cdot\sqrt{T}|x^{(n)}|_2+[\max\{|f(t,0,0,\cdots,0)|:0\leqslant t\leqslant T\}+\max\{|g_1(t,0)|:0\leqslant t\leqslant T\}+\max\{|g_2(t,0)|:0\leqslant t\leqslant T\}+|e|_\infty]\sqrt{T}|x^{(n)}|_2\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}C_i|x^{(i)}|_2|x^{(n)}|_2+\frac{(b_1+b_2)T}{2}|x'|_2\cdot|x^{(n)}|_2+[\max\{|f(t,0,0,\cdots,0)|:0\leqslant t\leqslant T\}+\max\{|g_1(t,0)|:0\leqslant t\leqslant T\}+\max\{|g_2(t,0)|:0\leqslant t\leqslant T\}+|e|_\infty]\sqrt{T}|x^{(n)}|_2\leqslant[\sum_{i=1}^{n-1}C_i\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{n-i}+\frac{(b_1+b_2)T^n}{2(2\pi)^{n-1}}]|x^{(n)}|_2^2+[\max\{|f(t,0,0,\cdots,0)|:0\leqslant t\leqslant T\}+\max\{|g_1(t,0)|:0\leqslant t\leqslant T\}+\max\{|g_2(t,0)|:0\leqslant t\leqslant T\}+|e|_\infty]\sqrt{T}|x^{(n)}|_2. \quad (13)$$

结合(13)式和条件(H_2)知,存在正常数 D_1,使得

$$|x^{(j)}|_2\leqslant\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{n-j}|x^{(n)}|_2\leqslant D_1,j=1,2,\cdots,n. \quad (14)$$

由 $x^{(j)}(0)=x^{(j)}(T),j=0,1,2,\cdots,n-1$ 可知,存在常数 $\zeta_j\in[0,T]$ 使得 $x^{(j+1)}(\zeta_j)=0$,于是

$$|x^{(j+1)}(t)|=|x^{(j+1)}(\zeta_j)+\int_{\zeta_j}^t x^{(j+2)}(s)\mathrm{d}s|\leqslant\sqrt{T}|x^{(j+2)}|_2,j=0,1,2\cdots,n-2,\forall t\in[0,T]. \quad (15)$$

结合(12)式、(14)式和(15)式可知,存在正常数 D_2 使

$$|x^{(j)}|_\infty\leqslant\sqrt{T}|x^{(j+1)}|_2\leqslant D_2,j=0,1,2,\cdots,n-1. \quad (16)$$

从而存在正常数 M,使得

$$\max_{0\leqslant j\leqslant n-1}|x^{(j)}|_\infty<M. \quad (17)$$

取 $\Omega=\{x\in C_T^{n-1,\frac{1}{2}}=X:\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n-1}|x^{(j)}|_\infty<M\}$,则对 $\lambda\in(0,1]$,方程(11)在 $\partial\Omega$ 没有反周期解.

其次,证明方程(11)反周期解的存在性。任取 $x(t)\in C_T^{k,\frac{1}{2}}$,则 $x(t)$ 可以展开成 Fourier 级数形式

$$x(t)=\sum_{i=0}^\infty[a_{2i+1}\cos\frac{2\pi(2i+1)t}{T}+b_{2i+1}\sin\frac{2\pi(2i+1)t}{T}].$$

定义算子 $L:C_T^{k,\frac{1}{2}}\to C_T^{k+1,\frac{1}{2}}$ 如下

$$(Lx)(t)=\int_0^t x(s)\mathrm{d}s-\frac{T}{2\pi}\sum_{i=0}^\infty\frac{b_{2i+1}}{2i+1}=\frac{T}{2\pi}\sum_{i=0}^\infty[\frac{a_{2i+1}}{2i+1}\sin\frac{2\pi(2i+1)t}{T}-\frac{b_{2i+1}}{2i+1}\cdot\cos\frac{2\pi(2i+1)t}{T}].$$

显然 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Lx)(t)=x(t)$.由算子 L 的定义知

$$|(Lx)(t)|\leqslant\int_0^T|x(s)|\mathrm{d}s+\frac{T}{2\pi}\sum_{i=0}^\infty\frac{|b_{2i+1}|}{2i+1}\leqslant T\|x\|+\frac{T}{2\pi}\left(\sum_{i=0}^\infty b_{2i+1}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=0}^\infty\frac{1}{(2i+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

注意到

$$\left(\sum_{i=0}^\infty\frac{1}{(2i+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

并利用 Parseval 恒等式 $\int_0^T |x(s)|^2 ds = \frac{T}{2}\sum_{i=0}^{\infty}[a_{2i+1}^2 + b_{2i+1}^2]$,

可得

$$|(Lx)(t)| \leqslant T\|x\| + \frac{T}{4\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{2}{T}\int_0^T |x(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(T + \frac{T}{4}\right)\|x\|, \forall t \in [0, T],$$

即 $\|(Lx)(t)\| \leqslant \left(T+\frac{T}{4}\right)\|x\|$. 因此算子 L 为连续算子.

对任意的 $x(t) \in C_T^{n-1,\frac{1}{2}}$,则由条件($H_3$)知

$$Q_1(t+\frac{T}{2}, x(t+\frac{T}{2}), x'(t+\frac{T}{2}), \cdots, x^{(n-1)}(t+\frac{T}{2})) = -Q_1(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n-1)}(t)).$$

所以,算子 $Q_1 \in C_T^{0,\frac{1}{2}}$. 定义算子 $F_\mu : \overline{\Omega} \to C_T^{n,\frac{1}{2}} \subset X$ 为 $F_\mu(x) = \mu L(\cdots L(L(Q_1(x)))) = \mu L^n(Q_1(x)), \mu \in [0,1]$. 由 Arzela-Ascoli 定理易证, F_μ 为紧同伦. 显然, F_1 在 $\overline{\Omega}$ 上的不动点即为方程(3)的反周期解,为此,我们只须证明 F_1 的不动点的存在性.

定义同伦连续场 $H_\mu(x) : \overline{\Omega} \times [0,1] \to C_T^{n-1,\frac{1}{2}}$ 为 $H_\mu(x) = x - F_\mu(x)$. 由(17)式知 $H_\mu(\partial\Omega) \neq 0, \mu \in [0,1]$. 根据 Leray-Schauder 度的紧同伦不变性知 $\deg\{x - F_1 x, \Omega, 0\} = \deg\{x, \Omega, 0\} \neq 0$. 故由引理 1 知,方程 $x - F_1 x = 0$ 在 Ω 内至少存在一个解,即算子 F_1 在 $\overline{\Omega}$ 内至少存在一个不动点,从而方程 (3)存在唯一反周期解.

注 1 显然文献[7]中的相应结果是本文的特殊情形.

注 2 本文的方法可以应用于方程

$$x^{(n)}(t) + f(t, x'(t), x''(t), \cdots, x^{(n-1)}(t)) + \sum_{i=1}^{n} g_i(t, x(t-\tau_i(t))) = e(t)$$

反周期解的存在唯一性问题.

3 算例

例 1 设 $g_1(t,x) = g_2(t,x) = \frac{1+\sin^4 t}{12\pi}\sin x$,则 Lineard 型方程

$$x^{(3)}(t) + \frac{1}{16}x'(t) + \frac{1}{16}\sin x''(t) + g_1(t, x(t-\sin^2 t)) + g_2(t, x(t-\cos^2 t)) = \frac{1}{40}\cos t \quad (18)$$

存在唯一反 2π-周期解.

证明 由(18)式知, $n=3$, $f(t,x',x'') = \frac{1}{16}x' + \frac{1}{16}\sin x''$, $e(t) = \frac{1}{40}\cos t$,则 $C_1 = C_2 = \frac{1}{16}$, $b_1 = b_2 = \frac{1}{6\pi}$, $T = 2\pi$,且

$$\sum_{i=1}^{2} C_i \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{n-i} + \frac{(b_1+b_2)T^n}{2(2\pi)^{n-1}} = \frac{11}{24} < 1.$$

容易验证定理 1 的条件(H_3)成立. 从而根据定理 1 知,方程(18)存在唯一反 2π-周期解.

参考文献:

[1] Villari G. Periodic solutions of Lienard equation[J]. J Math Anal Appl, 1982, 86:376-386.

[2] Villari G. On the existence of periodic solutions of the Lienard equation[J]. Nonlinear Anal, 1983, 7:71-78.

[3] Mawhin J L, Ward J R. Periodic solutions of some forced Lienard differential equation at resonance[J]. Arch Math, 1983, 41:337-351.

[4] 彭世国. 时滞的 Lienard 型方程的周期解[J]. 工程数学学报, 2004, 21(3):463-466.

[5] 李永昆. 具偏差变元的 Lienard 型方程的周期解[J]. 数学研究与评论, 1998, 18(4):565-570.

[6] 陈太勇,刘文斌,张建军,等. Lienard 方程反周期解的存在性[J]. 数学研究, 2007, 40(2): 187-195.

[7] Liu Bingwen. Anti- periodic solutions for forced Rayleigh-type equations[J]. Nonlinear Analysis: Real Word Applications 2009, 10:2850-2856.

[8] Deimling K. Nonlinear functional analysis[M]. New York: Springer-Verlag, 1985.

[9] Mawhin J. An extension of the theorem of A C Lazer on forced nonlinear Osci-llations[J]. J Math Anal Appl, 1972, 40:20-29.

(责任编辑:尹 闯)