广西科学 Guangxi Sciences 2011,18(1):30～33

复合二项风险模型中的 Z 变换

Z Transform in the Compound Binomial Risk Model

方世祖,刘　果,文厚明

FANG Shi-zu,LIU Guo,WENG Hou-ming

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁　530004)

(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004,China)

摘要:讨论 z 变换在风险模型中的应用,先求出复合二项风险模型中一类泛函 $\psi(u;w)$,以及特殊情形下 $\psi(u)$ 和 $f(u,x)$的 Z 变换,再得出 $\psi(0)$和 $f(0,x)$的表达式,然后求出阶梯高度 L_i的 Z 变换,最后在复合二项风险模型索赔个体服从几何分布时,得到其最终生存概率的具体表达式.所得结果与已知结果是相同的.

关键词:复合二项风险模型　Z 变换　破产概率　终值定理

中图法分类号:O211　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2011)01-0030-04

Abstract: This paper considers the application of z transform in the risk model. We firstly derive the Z transform of a type of function $\psi(u;w)$ in the compound binomial risk model. In the two special cases of $w(x)$, we get the Z transform of $\psi(u)$ and $f(u,x)$. Applying the value theorem of the Z transform, the explicit expression for $\psi(0)$ and $f(0,x)$ are obtained. Further we get the Z transform of the ladder height L_i. Finally we obtain the explicit expression of the ultimate survival probability where the individual claim amount distribution is geometric distribution.

Key words: compound binomial risk model, Z transform, ruin probability, value theorem

经典风险模型是指:给定保险公司一定的初始资本,允许它承保具有某种统计分布的风险,并允许它根据风险的特点连续地(或者离散地)收取相应的保费.所以按照收取保费的方式可以分为连续模型和离散模型.对于连续模型有许多论文都用到拉普拉斯变换这一数学工具,如文献[1,2].而 Z 变换具有与拉普拉斯变换相类似的性质,如初值定理、终值定理、卷积定理,是一种有效用于离散时间系统的方法,已经形成一套系统的理论.但是在离散风险模型中大多数人仍然采用母函数这一工具进行研究.本文采用 Z 变换求出文献[3]中的相关量,其中涉及到终值定理,复变函数论等知识.从探讨过程看出,Z 变换在内容上比母函数更加丰富,它是研究离散风险模型的有效工具.Z 变换结合计算软件,如 MATLAB,能很快反演出相应的系数,这也给计算带来了很大的方便.

收稿日期:2010-07-20

修回日期:2010-10-15

作者简介:方世祖(1964-),男,副教授,主要从事随机过程及其在风险理论中的应用。

1　复合二项经典风险模型

记保险公司在时刻 n 的盈余为 $U_n=u+n-S_n$,$n=0,1,\cdots$,其中 $u=U_0$ 表示为初始盈余仅取非负整数.复合二项经典风险模型满足下列条件:

(1)在任意一段单位时间区间$(n-1,n]$中,仅可能出现两种可能:或有一次索赔发生,或没有索赔发生.这样可用 $\xi_n=1$ 表示在该时间区间内有一次索赔发生;以 $\xi_n=0$ 表示在该时间区间内无索赔发生.假定$\{\xi_n:n\geqslant1\}$为独立同分布的随机变量序列,且满足

$$\boldsymbol{P}(\xi_n=1)=p,\boldsymbol{P}(\xi_n=0)=q=1-p,0<p<1.$$

在上述假定下,$N(n)\triangleq\xi_1+\cdots+\xi_n$(约定 $N(0)=0$),$\forall n\geqslant0$,表示至时刻 n 为止所发生的索赔次数.很容易得

$$\boldsymbol{P}(N(n)=k)=C_n^k p^k q^{n-k},0\leqslant k\leqslant n,$$

所以$\{N(n):n\geqslant0\}$是以 p 为参数的二项序列.

(2)如果在单位时间区间$(n-1,n]$内有索赔发生,则以 X_n 表示保险公司的第 n 个索赔额.当取定

一钱币单位后，我们总假定 X_n 是仅取正整数值的随机变量. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立同分布，都与 X 的分布相同. 记

$$p(n)=\boldsymbol{P}(X=n), P(n)=\sum_{k=1}^{n} p(k),\ n\geqslant 1, \mu \triangleq \boldsymbol{E}[X]<\infty.$$

还约定 $p(0)=0$. 而至时刻 n 为止保险公司所支付的索赔总额 $S_n \triangleq \xi_1 X_1+\cdots+\xi_n X_n$（约定 $S_0=0$），$\forall\ n\geqslant 0$. 再进一步假定 $\{\xi_n: n\geqslant 1\}$ 与 $\{X_n: n\geqslant 1\}$ 独立. 则索赔总序列 $\{S_n: n\geqslant 0\}$ 便是复合二项序列.

(3) 每单位时间内收取一钱币单位，在收取保费时考虑保证保险公司正常运作，总假定 $\boldsymbol{E}[S_1]=p\mu<1$. 记 $\theta=\frac{1}{p\mu}-1$ 为安全负荷.

我们令 $T \triangleq \inf\{n\geqslant 1: U_n\leqslant 0\}$，$\inf\varnothing=\infty$，并称 T 为破产时刻. U_{T-1} 为保险公司在破产前一时刻的盈余，$|U_T|$ 为破产时刻的赤字. 具体探讨的风险量的有关规律如下：

$$\phi(u;w) \triangleq \boldsymbol{E}[w(U_{T-1})\boldsymbol{I}_{\{T<\infty\}} \mid U_0=u],$$

$$\psi(u) \triangleq \boldsymbol{P}(T<\infty \mid U_0=u),$$

$$f(u,x) \triangleq \boldsymbol{P}(T<\infty, U_{T-1}=x \mid U_0=u).$$

在上述定义中，$\phi(u;w)$ 为一类泛函，$w(x)$ 为任一非负有界函数，$\boldsymbol{I}_A$ 为示性函数，$\psi(u)$ 为在初始资本为 u 的条件下，保险公司最终破产概率；$f(u,x)$ 为在初始资本为 u 的条件下，保险公司在破产的前一刻的盈余为 x 的概率. 数列 $X(i)$，$Y(i)$，Z 变换由下式定义：

$$\hat{X}(z)=Z[X(k)]=\sum_{k=0}^{\infty} X(k) z^{-k}.$$

该定义是文献[5]中的定义中时间间隔 $T=1$ 的特殊情形. 进一步记 $X(i)$ 与 $Y(i)$ 的卷积为 $X*Y(k)=\sum_{i=0}^{k} X(k-i)Y(i)$.

注 1 为方便与文献[3]的结论比较，文中大部分记号与文献[3]保持一致.

注 2 根据文献[5]的定义，关于 Z 变换的定义实际上称作单边 Z 变换. 文中在保证不引起混淆的情况下，简称为 Z 变换.

注 3 对于索赔额 X，称 $\hat{p}(z)=\sum_{k=0}^{\infty} p(k) z^{-k}$，$z\geqslant 1$ 为关于随机变量 X 的 Z 变换. 这里 z 相当于哑变量，如果令 $z=e^s$，则 $\hat{p}(e^s)=\boldsymbol{E}[e^{-sX}]$，就为 X 的拉普拉斯变化，如果令 $r=1/z$，则 $\hat{p}(1/r)=\boldsymbol{E}[r^X]$ 为 X 的母函数.

引理 1 $F(z)=1-zq-zp\hat{p}(z)$ 在 $z\geqslant 1$ 时只有 $z=1$ 一个零点.

证明 根据 Z 变换的定义，可知 $\hat{p}(z)=\boldsymbol{E}[Z^{-X}]$. 当 $z\geqslant 1$ 时，

$$F'(z)=-q+p\boldsymbol{E}[(X-1)Z^{-X}]\leqslant -1+p\mu<0,$$

所以 $F(z)$ 在 $z\geqslant 1$ 中严格递减. 又因为 $F(1)=1-q-p=0$，所以当 $z>1$，$F(z)<F(1)=0$. 引理 1 成立.

方程 $zq+zp\hat{p}(z)=1$ 称为复合二项风险模型的 Lundberg 基本方程.

2 相关结论

由文献[3]得

$$\phi(u;w)=q\phi(u+1;w)+p\sum_{k=1}^{u}\phi(u+1-k;w)\cdot p(k)+pw(u)[1-P(u)]. \tag{2.1}$$

为了计算方便，先将(2.1)式化为

$$\phi(u;w)=p\phi_w * p(u+1)+pw(u)[1-P(u)]+q\phi(u+1;w)-\phi(0;w)p(u+1), \tag{2.2}$$

其中 $\phi_w * p(u+1)=\sum_{k=1}^{u+1}\phi(u+1-k;w)p(k)$. 在(2.2)式两边同时取关于 u 取 Z 变换，则

$$\hat{\phi}(z;w)=qz[\hat{\phi}(u+1;w)]+pz[\phi_w * p(u+1)]-p\phi(0;w)z[p(u+1)]+p\sum_{u=0}^{\infty}w(u)[1-P(u)]z^{-u}\hat{\phi}(z;w)=qz[\hat{\phi}(z;w)-\phi(0;w)]+pz\,\phi_w * p(z)-pz\phi(0;w)\hat{p}(z)+p\sum_{u=0}^{\infty}w(u)[1-P(u)]z^{-u}=qz[\hat{\phi}(z;w)-\phi(0;w)]+pz\hat{\phi}(z;w)\cdot\hat{p}(z)-pz\phi(0;w)\hat{p}(z)+p\sum_{u=0}^{\infty}w(u)[1-P(u)]z^{-u}.$$

上面推导运用了 Z 变换的一些基本性质，其中 $z>1$. 再由引理 1，上式可继续化简为

$$\hat{\phi}(z;w)=\frac{-qz\phi(0;w)+p\sum_{u=0}^{\infty}w(u)[1-P(u)]z^{-u}}{1-zq-zp\hat{p}(z)}-\frac{pz\phi(0;w)\hat{p}(z)}{1-zq-zp\hat{p}(z)}. \tag{2.3}$$

至此得出 $\phi(u;w)$ 的 Z 变换.

2.1 关于 $\psi(u)$ 的 Z 变换与 $\psi(0)$ 的表达式

在这一小节总令

$$w(x)=\begin{cases}1, x\geqslant 0,\\ 0, x<0.\end{cases}$$

因为 $U_{T-1}\geqslant 0$ 恒成立，所以 $\phi(u;w)=\psi(u)$. 再由(2.3)式可得

$$\hat{\psi}(z)=\frac{-qz\psi(0)-pz\psi(0)\hat{p}(z)+p\sum_{u=0}^{\infty}[1-P(u)]z^{-u}}{1-zq-zp\hat{p}(z)}. \tag{2.4}$$

由(2.4)式知，要利用 Z 反变换，必须先确定 $\psi(0)$ 的表达式.

定理 1 在复合二项风险模型中，$\psi(0)=p\mu$.

证明 因为 $F'(1)=-1+p\mu\neq 0$，由引理 1，知 $\hat{\psi}$

(z)在 $z\geqslant 1$ 中只有 $z=1$ 这个单极点. 又$\lim\limits_{u\to\infty}\psi(u)=0$所以利用 Z 变换的终值定理得

$$\lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})\hat{\psi}(z)]=\lim_{u\to\infty}\psi(u)=0. \qquad (2.5)$$

将(2.4)式代入(2.5)式,利用洛毕塔法则得

$$\lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})\hat{\psi}(z)]=\frac{-\psi(0)+p\mu}{-1+p\mu}=0,$$

即 $\psi(0)=p\mu$.

这与文献[3]的结论相同,再根据(2.4)式和定理1,就可以利用 Z 反变换来求相应的系数. 对于 Z 反变换,通常有直接除法、计算机程序法、部分分式展开法、反演积分法. 下面利用计算机程序法求解例1.

例 1 在复合二项风险模型中,令 $q=0.75$,$p=1-q=0.25$,X 的分布律 $p(k)(k=1,2,3)$分别为0.5,0.25,0.25. 则利用(2.4)式和定理1得

$$\hat{\psi}(z)=\frac{-21z^3+12.5z^2+6.25z+2.25}{-48z^3+56z^2-4z-4}.$$

把文献[5]第二章中的 MATLAB 程序模版具体数据代入上式,可得表1.

表 1 具体数据

Table 1 Specific data

u	$\psi(u)$	u	$\psi(u)$
0	0.4375	5	0.0064
1	0.2500	6	0.0025
2	0.1250	7	0.0009
3	0.0417	…	…
4	0.0174		

2.2 关于 $f(u,x)$的 Z 变换与 $f(0,x)$的表达式

在这一小节总令

$$w_x(t)=\begin{cases}1,t=x,\\0,t\neq x.\end{cases}$$

则

$$\psi(u;w_x)=\boldsymbol{E}[w_x(U_{T-1})\boldsymbol{I}_{\{T<\infty\}}\mid U_0=u]=\boldsymbol{P}(T<\infty,U_{T-1}=x\mid U_0=u)=f(u,x).$$

由(2.3)式可得

$$\hat{f}(z,x)=\frac{-qzf(0,x)-pzf(0,x)\hat{p}(z)+p[1-P(x)]z^{-x}}{1-zq-zp\hat{p}(z)}. \qquad (2.6)$$

同样要先确定 $f(0,x)$,才能运用 Z 反变换.

定理 2 在复合二项风险模型中,$f(0,x)=p[1-P(x)]$.

证明 因为 $F'(1)=-1+p\mu\neq 0$,由引理1,知 $\hat{f}(z,x)$在 $z\geqslant 1$ 中只有 $z=1$ 这个单极点. 又$\lim\limits_{u\to\infty}\psi(u)=0$,所以利用 Z 变换的终值定理得$\lim\limits_{u\to\infty}f(u,x)=0$,即

$$\lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})\hat{f}(z,x)]=\lim_{u\to\infty}f(u,x)=0. \qquad (2.7)$$

将(2.6)式代入(2.7)式,利用洛毕塔法则得

$$\lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})\hat{f}(z,x)]=\frac{-f(0,x)+p[1-P(x)]}{-1+p\mu}=0.$$

再由上式可得 $f(0,x)=p[1-P(x)]$.

下面对文献[3]中例1用反演积分法来求 $f(u,x)$.

例 2 设所有的索赔服从单点分布 $p(2)=1$,由定理2可得

$$f(0,x)=\begin{cases}p,x=0\text{ 或 }1,\\0,x\geqslant 2.\end{cases}$$

再由(2.6)式,分3种情形来讨论:

(1)当 $u\geqslant 1,x\geqslant 2$ 时,$\hat{f}(z,x)=0$. 所以在情形(1)中,$f(u,x)=0$.

(2)当 $u\geqslant 1,x=0$ 时,

$$\hat{f}(z,x)=\frac{-qzp-z^{-1}p^2+p}{1-qz-pz^{-1}}=p.$$

所以在情形(2)中,$f(u,x)=0$.

(3)当 $u\geqslant 1,x=1$ 时,

$$\hat{f}(z,x)=\frac{-zqp-z^{-1}p^2+pz^{-1}}{1-zq-pz^{-1}}=\frac{p(z+1)}{z-pq^{-1}}.$$

所以在情形(3)中,由反演积分法可得

$$f(u,x)=\operatorname*{Res}_{z=pq^{-1}}[\hat{f}(z,x)z^{u-1}]=\lim_{z\to pq^{-1}}\frac{p(z+1)z^{u-1}(z-pq^{-1})}{z-pq^{-1}}=\lim_{z\to pq^{-1}}p(z^u+z^{u-1})=(\frac{p}{q})^u.$$

上述结果与文献[3]中例1的结果是相同的.

2.3 阶梯高度 L_i的 Z 变换

与连续型经典风险模型类似,在复合二项模型中,定义 $L=\max\{S_n-n:n\geqslant 0\}$为最大聚合损失,所以$\boldsymbol{P}\{L\leqslant u\}=1-\psi(u)=\delta(u)$. 而 L 是服从复合几何分布的,即 $L=L_1+L_2+\cdots+L_N$,其中$\{L_i:i\geqslant 1\}$为独立同分布的随机序列. 称 L_i为阶梯高度分布,N服从几何分布,其中$\boldsymbol{P}\{N=k\}=(\psi(0))^k\delta(0),k=0,1,\cdots$,且随机序列$\{L_i:i\geqslant 1\}$也与 N 相互独立. 所以由此特性可得

$$\boldsymbol{E}[Z^{-L}]=\frac{\delta(0)}{1-\psi(0)\boldsymbol{E}[Z^{-L_i}]}. \qquad (2.8)$$

为保证收敛性,都约定上述的哑变量 $z>1$,而由$\boldsymbol{P}\{L\leqslant u\}=\delta(u)$可得

$$\boldsymbol{E}[Z^{-L}]=\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k}(\delta(k)-\delta(k-1))=(1-z^{-1})\hat{\delta}(z). \qquad (2.9)$$

按第一次索赔时刻和第一次索赔大小来分,

$$\delta(u)=\sum_{i=1}^{\infty}q^{i-1}p\sum_{k=0}^{u+i-1}\delta(u+i-k)p(k).$$

令 $s=u+i$，上式继续可化为

$$\delta(u)=\sum_{s=u+1}^{\infty}q^{s-u-1}p\sum_{k=0}^{s-1}\delta(s-k)p(k). \qquad (2.10)$$

由(2.10)式可得

$$\delta(u+1)=\sum_{s=u+2}^{\infty}q^{s-u-2}p\sum_{k=0}^{s-1}\delta(s-k)p(k)=$$

$$q^{-1}\sum_{s=u+2}^{\infty}q^{s-u-1}p\sum_{k=0}^{s-1}\delta(s-k)p(k)=q^{-1}\delta(u)-$$

$$q^{-1}p\sum_{k=0}^{u}\delta(u+1-k)p(k)=q^{-1}p\delta(0)p(u+1)-$$

$$q^{-1}p\delta * p(u+1)+q^{-1}\delta(u). \qquad (2.11)$$

也可以按第一个时间间隔里是否和第一次索赔大小来分，也会得出类似于(2.11)式的差分方程. 再在(2.11)式中关于 u 取 Z 变化可得

$$\hat{\delta}(z)=\frac{qz\delta(0)+pz\delta(0)\hat{p}(z)}{qz+pz\hat{p}(z)-1}. \qquad (2.12)$$

关于 $\hat{\delta}(z)$ 也可利用 $\delta(u)=1-\psi(u)$ 和(2.4)式来求解. 为检验定理 1，对(2.12)式中的 $\delta(0)$，利用终值定理得 $\delta(0)=1-p\mu=1-\psi(0)$. 最后，利用(2.8)式、(2.9)式和(2.12)式化简可得

$$\boldsymbol{E}[Z^{-L_i}]=\frac{1-\hat{p}(z)}{\mu(z-1)(q+p\hat{p}(z))}.$$

由于几何分布与指数分布都具有无记忆性，在经典连续型模型中，当个体索赔服从指数分布时，能得一个关于最终生存概率的显示解. 在此也可以断言，当复合二项模型中索赔个体服从几何分布时，也会得到最终生存概率的一个显示解. 若记 $p(k)=\alpha^{k-1}(1-\alpha)$，$k=1,2,\cdots$，那么 $\mu=1/(1-\alpha)$，$\hat{p}(z)=(1-\alpha)/(z-\alpha)$，$\delta(0)=(q-\alpha)(1-\alpha)$. 注意 $\theta>0$，所以 $\alpha<q$，代入(2.12)式可得

$$\hat{\delta}(z)=\frac{(q-\alpha)[qz^2+(p-\alpha)z]}{q(1-\alpha)(z-\alpha/q)(z-1)}.$$

由于更一般的形式 $\hat{X}(z)=(az^2+bz)/(z-x_1)(z-x_2)$，$x_1\neq x_2$ 的反演已由文献[4]给出. 直接利用该例子的结论可得

$$\delta(u)=\frac{q-\alpha}{q(1-\alpha)}\frac{1-\alpha-p(\frac{\alpha}{q})^u}{1-\frac{\alpha}{q}}=1-$$

$$\frac{1}{1+\theta}(\frac{\alpha(1+\theta)}{\alpha+\theta})^u,$$

其中 $u=0,1,\cdots$. 这个结果与经典连续模型的相应结果类似.

参考文献：

[1] Dickson D C M. On a class of renewal risk process[J]. North American Actuarial Journal, 1998, 2(3): 60-73.

[2] Dickson D C M, Hipp C. Ruin probabilities for Erlang (2) risk process[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1998(22): 251-256.

[3] 成世学，伍彪. 完全离散的经典风险模型[J]. 运筹学学报，1998(2): 43-54.

[4] 王泽汉，龙文庭. Z 变换与差分方程[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1985.

[5] 尾形克彦. 离散时间控制系统[M]. 北京：机械工业出版社，2006.

（责任编辑：尹　闯）

以色列科学家研发出放射性治疗癌症新方法

传统放射性治疗是目前治疗癌症的主要方法，但是这种方法在杀死癌细胞的同时，也会使健康细胞受损，患者接受治疗后常常会产生恶心、头发脱落、疲惫等副作用。最近以色列科学家研发出一种放射性治疗癌症新方法。他们用一种特殊混合的纳米粒子和抗体来确定肿瘤的位置，当纳米粒子到达肿瘤后，直接附着在肿瘤上面；此时，通过外部磁场使其在特定部位发热即可以定向杀死癌细胞。治疗结束后，纳米粒子会随人体新陈代谢自然排出体外。这种特殊混合的纳米粒子可局部注射或静脉注射，使用安全、简便，整个疗程约持续 6h，患者可以在医院接受治疗，也可在家中治疗和恢复。从理论上讲，新方法对治疗癌症是有效的，只要能找到特定的生物标记和抗体，即可以用于治疗各种癌症。通过反馈程序，医生还可以根据不同患者确定个性化治疗方案。新方法比传统放射性疗法副作用小，不会对周围健康组织造成损害，如果临床试验取得成功，有可能成为治疗癌症的主流方法之一。

（据科学网）