

直径为 $n-4$ 谱半径第二小的连通图*The Connected Graphs of Diameter $n-4$ with the Second Smallest Spectral Radius

姜静静, 吴晓丽, 谭尚旺, 郭继明

JIANG Jing-jing, WU Xiao-li, TAN Shang-wang, GUO Ji-ming

(中国石油大学数学与计算科学学院, 山东东营 257061)

(Department of Mathematics, China University of Petroleum, Dongying, Shandong, 257061, China)

摘要: 采用图形变换和比较图的特征项式等方法, 按照图的最小谱半径对具有固定直径和顶点数的图类定序, 确定了顶点数为 n 直径为 $n-4$ 谱半径是第二小的连通图。

关键词: 连通图 树 谱半径 直径 特征多项式

中图分类号: O157.5 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2011)02-0105-05

Abstract: Using graphical transformation and comparison of the characteristic polynomial of graph and other methods, the graphs with the fixed diameter and the vertices number are ordered according to the minimal spectral radius. The connected graphs with the vertices number and the diameter that have the second smallest spectral radius are determined.

Key words: connected graphs, tree, spectral radius, diameter, characteristic polynomial

设 $G = (V(G), E(G))$ 是一个简单图, 其中 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是 G 的顶点集. G 的特征多项式定义为 $\det(\lambda I - A(G))$, 简记为 $\Phi(G, x)$ 或 $\Phi(x)$, 它的根称为 G 的特征值. 因为 $A(G)$ 是实对称矩阵, 所以它的特征值均为实数. 不妨假设它的特征值按照下降的次序排列为 $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$, $\lambda_1(G)$ 称为 G 的谱半径, 记为 $\rho(G)$. 令 $\Delta(G)$ 表示 G 的最大度, $D(G)$ 表示 G 的直径 (简记为 D). 特别地, 令 P_n 和 C_n 分别表示具有 n 个顶点的路和圈.

设 $vv_1v_2 \dots v_k$ 是图 G 的一条路, 如果满足 $d(v) \geq 3$, $d(v_1) = d(v_2) = \dots = d(v_{k-1}) = 2$, $d(v_k) = 1$, 称它是图 G 在 v 点引出长为 k 的悬挂路.

设 $P_k = v_1v_2 \dots v_k$ 是一条路, $P_{n_1, n_2, \dots, n_t, k}^{m_1, m_2, \dots, m_t}$ 表示在 P_k 的顶点 v_{m_i} ($i = 1, 2, \dots, t$) 上引出一条长为 n_i 的悬挂路而得到的树, 其中 $m_1 \geq 2$, $m_t \leq k-1$, $m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq \dots \leq m_t$. 显然, $P_{n_1, n_2, \dots, n_t, k}^{m_1, m_2, \dots, m_t}$ 的顶点数为 $n_1 +$

$n_2 + n_3 + \dots + n_t + k$.

利用图的谱半径对图进行定序^[1] 一直是图谱研究的热点问题之一, 而且利用图的最大谱半径对特殊图类 (如树、单圈图、双圈图等) 进行定序已经获得了较好的结论^[2~6]. 文献^[7] 得到了直径 $D \in \{1, 2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n-3, n-2, n-1\}$ 的谱半径最小的连通图, 并且他们提出了一个猜想: 对固定的 e 和足够大的 n , $P_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, n-e+1}^{e-1, n-e-\lfloor \frac{e-1}{2} \rfloor}$ 是有 n 个顶点和直径 $D = n-e$ 的所有连通图中谱半径最小的唯一图. 袁西英等^[8] 证明该猜想对 $e = 4$ 成立. 文献^[9] 确定了直径 $D \leq 4$ 的树中谱半径最小的树. 本文进一步确定了顶点数是 n 且直径是 $D = n-4$ 的所有连通图中谱半径第二小的连通图.

1 预备知识

引理 1.1^[10] 令 u 是图 G 的一个顶点, $C(u)$ 是包含 u 的所有圈的集合, 则

$$\Phi(G, x) = x\Phi(G-u, x) - \sum_{v \in N(u)} \Phi(G-u-v, x) - 2 \sum_{Z \in C(u)} \Phi(G-V(Z), x).$$

收稿日期: 2010-09-10

修回日期: 2010-12-13

作者简介: 姜静静 (1985-), 女, 硕士研究生, 主要从事图论的研究。

* 国家自然科学基金项目 (10871204) 资助。

引理 1.2^[10] 设 uv 是图 G 的一条割边, 则

$$\Phi(G, x) = \Phi(G - uv, x) - \Phi(G - u - v, x).$$

令 $P = v_0 v_1 \cdots v_{k+1}$ 是 G 的一条路, 若顶点 $v_0, v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ (除可能 $v_0 = v_{k+1}$ 外) 两两互不相同, $d(v_0) \geq 3, d(v_1) = d(v_2) = \cdots = d(v_k) = 2, d(v_{k+1}) \geq 3$, 则称 P 是 G 的一个内路.

引理 1.3^[10] 设 G' 是连通图 G 的真子图, 则 $\rho(G') < \rho(G)$.

设 uv 是连通图 G 的一条边, G_{uv} 是删除 uv , 然后增加一个新的点 w 与 2 个新的边 uw 和 wv 得到的图. 从 G 到 G_{uv} 的过程称为 G 对边 uv 的一个剖分.

引理 1.4^[11] 设 G 是不同构于 C_n 和 $P_{1,1;n-2}^{2,n-3}$ 的 n 顶点的连通图, G_{uv} 是对 G 的一个内路上的边 uv 剖分一次得到的图, 则 $\rho(G_{uv}) < \rho(G)$.

引理 1.5^[12] 令 u 是非平凡连通图 G 的一个顶点, $G(k, l)$ 表示在 u 上引出两条长分别为 k 和 l 的悬挂路得到的图. 如果 $k \geq l \geq 1$, 则 $\rho(G(k, l)) > \rho(G(k+1, l-1))$.

2 直径为 $n-4$ 谱半径第二小的树

文献[7]已经证明, 直径是 $n-4$ 的 n 阶连通图中, $P_{1,2;n-3}^{2,n-5}$ 具有最小的谱半径. 令 $G_i^n (i = 1, 2, \dots, 6)$ 是图 1 所示的树, $\Gamma(n, n-4)$ 是直径为 $n-4$ 的所有 n 阶树的集合, $\Omega(n, n-4)$ 是 $\Gamma(n, n-4) - \{P_{1,2;n-3}^{2,n-5}\}$ 中谱半径最小的树的集合.

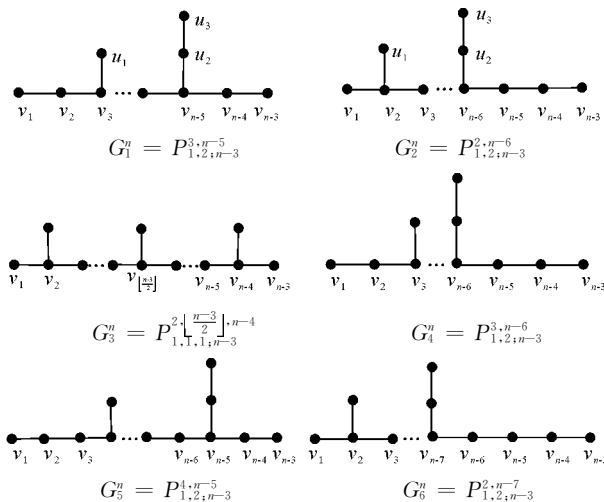


图 1 树 $G_i^n, i = 1, 2, \dots, 6$

Fig. 1 Trees $G_i^n, i = 1, 2, \dots, 6$

引理 2.1^[10] m 个顶点的连通图中谱半径等于 2 的图只能是 $C_m, P_{1,1;m-2}^{2,m-3}, P_{2,5}^3, P_{1,7}^4$ 或 $P_{1,8}^3$ 之一.

引理 2.2 如果 $n \geq 15$, 则 $\min\{\rho(G_4^n), \rho(G_6^n)\} > \rho(G_2^n) > \rho(G_5^n) > \rho(G_1^n)$.

证明 将 G_5^n 删除悬挂点 v_1 后, 再剖分内路一次得到图 G_1^n . 显然, 由引理 1.3 和 1.4 知, $\rho(G_5^n) >$

$\rho(G_1^n)$. 同理, 从 G_4^n 删除悬挂点 v_1 后, 再剖分一次内路可得到图 G_2^n , 从 G_6^n 删除悬挂点 v_{n-3} 后, 再剖分一次内路可得到图 G_6^n . 同样由引理 1.3 和 1.4 知, $\rho(G_4^n) > \rho(G_2^n), \rho(G_6^n) > \rho(G_2^n)$.

下面只需证明 $\rho(G_2^n) > \rho(G_5^n)$. 由引理 1.2 得

$$\Phi(G_2^n, x) = \Phi(G_2^n - v_2 u_1) - \Phi(G_2^n - v_2 - u_1) = x\Phi(P_{2,1;n-3}^4) - x\Phi(P_{2,1;n-5}^4) = x\Phi(P_2)[\Phi(P_{n-3}) - \Phi(P_{n-5})] - x^2\Phi(P_3)[\Phi(P_{n-7}) - \Phi(P_{n-9})], \quad (2.1)$$

$$\Phi(G_5^n, x) = x\Phi(P_2)[\Phi(P_{n-3}) + \Phi(P_3)\Phi(P_{n-10})] - \Phi(P_2)[x^2\Phi(P_{n-6}) + \Phi(P_3)\Phi(P_{n-7})]. \quad (2.2)$$

令 $\Phi(P_0) = 1$, 对正整数 $k \geq 2$, 由引理 1.2 得

$$\Phi(P_k) = x\Phi(P_{k-1}) - \Phi(P_{k-2}). \quad (2.3)$$

由(2.1) ~ (2.3) 式得

$$\begin{aligned} \Phi(G_2^n, x) - \Phi(G_5^n, x) &= -\Phi(P_3)\Phi(P_{n-7}) + x\Phi(P_2)[x\Phi(P_{n-6}) - \Phi(P_{n-5})] + x\Phi(P_3) \cdot \\ &[x\Phi(P_{n-9}) - \Phi(P_2)\Phi(P_{n-10})] = x\Phi(P_{n-7}) - x\Phi(P_3)\Phi(P_{n-12}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

记 $f_n(x) = \Phi(G_2^n, x) - \Phi(G_5^n, x)$, 则由(2.3) 式得到

$$f_n(x) = x f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x). \quad (2.5)$$

容易发现 G_2^n 包含 $P_{1,1;m-2}^{2,m-3} (m \geq 5$ 是某个正整数), $P_{2,5}^3, P_{1,7}^4$ 或 $P_{1,8}^3$ 之一作为其真子图, 于是由引理 1.3 和 2.1 得 $\rho(G_2^n) > 2$, 且 G_2^n 是对 G_2^{15} 内路上一个边连续剖分 $n-15$ 次得到的图. 由(2.1) 式和(2.2) 式易得出

$$\begin{aligned} \Phi(G_2^{15}, x) &= x(x^2 - x - 1)(x^2 + x - 1)(x^{10} - 11x^8 + 42x^6 - 65x^4 + 36x^2 - 2), \Phi(G_5^{15}, x) = x(x + 1)(x - 1)(x^4 - 5x^2 + 3)(x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 1). \end{aligned} \quad (2.6)$$

用 Mathematics 直接计算知 $\rho(G_2^{15}) \approx 2.07816$, $\rho(G_5^{15}) \approx 2.07431$, 于是由引理 1.4 得 $\rho(G_2^n) \leq \rho(G_2^{15}) < 2.079$. 综上知 $2 < \rho(G_2^n) < 2.079$. 同理可证 $2 < \rho(G_5^n) < 2.075$. 因此, $\rho(G_2^n), \rho(G_5^n) \in (2, 2.079)$.

下面约定 $2 < x < 2.079$. 由(2.5) 式可得出函数列 $\{f_n(x)\}$ 的特征方程为 $y^2 - xy + 1 = 0$. 易发现方程的两个实根分别为 $y_1 = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}, y_2 =$

$\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}$. 于是 $f_n(x) = c_1 y_1^n + c_2 y_2^n$. 因此, 得到关于 c_1, c_2 为未知量的线性方程组

$$\begin{cases} c_1 y_1^{15} + c_2 y_2^{15} = f_{15}(x), \\ c_1 y_1^{16} + c_2 y_2^{16} = f_{16}(x). \end{cases}$$

$$\text{解得 } c_1 = \frac{y_2^{16} f_{15} - y_2^{15} f_{16}}{\sqrt{x^2 - 4}}, c_2 = \frac{y_1^{15} f_{16} - y_1^{16} f_{15}}{\sqrt{x^2 - 4}}, y_1 y_2$$

$$= 1, y_2 - y_1 = \sqrt{x^2 - 4}. \text{ 所以, } n \geq 16 \text{ 时, } f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \cdot \frac{1}{y_2^{n-15}} \{ [y_2 f_{15}(x) - f_{16}(x)] + [y_2 f_{16}(x) - f_{15}(x)] y_2^{2n-31} \}.$$

由(2.3)式和(2.4)式得

$$f_{15}(x) = x(x^8 - 8x^6 + 19x^4 - 14x^2 + 1), f_{16}(x) = x^2(x^8 - 9x^6 + 26x^4 - 27x^2 + 7).$$

容易发现 $f_{15}(x)$ 的 8 个非零根分别位于下列 8 个区间

$$(-3, -2), (-2, -1.5), (-1.5, -1), (-1, -0.1), (0.1, 1), (1, 1.5), (1.5, 1.9), (2.09, 3).$$

$f_{16}(x)$ 的 8 个非零根分别位于下列 8 个区间

$$(-3, -2), (-2, -1.5), (-1.5, -1), (-1, -0.5), (0.5, 1), (1, 1.5), (1.5, 1.9), (2.1, 3).$$

上述结论表明, 当 $2 < x < 2.079$ 时, $f_{15}(x)$ 和 $f_{16}(x)$ 都不变号. 由于 $f_{15}(2.01) < 0$ 且 $f_{16}(2.01) < 0$, 于是当 $2 < x < 2.079$ 时, $f_{15}(x) < 0$ 且 $f_{16}(x) < 0$. 因此, 由 $y_2 > 1$ 得

$$f_n(x) < \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \cdot \frac{1}{y_2^{n-15}} (y_2^{2n-31} - 1) [f_{16}(x) - f_{15}(x)].$$

记 $h(x) = f_{16}(x) - f_{15}(x) = x(x^9 - x^8 - 9x^7 + 8x^6 + 26x^5 - 19x^4 - 27x^3 + 14x^2 + 7x - 1)$. 容易发现 $h(x)$ 的 9 个非零根分别位于下列 9 个区间

$$(-3, -2), (-2, -1.5), (-1.5, -1), (-1, -0.1), (0.1, 0.5), (0.5, 1), (1, 1.5), (1.5, 1.9), (2.1, 3).$$

这表明 $2 < x < 2.079$ 时, $h(x)$ 不变号. 因为 $h(2.01) < 0$, 于是当 $2 < x < 2.079$ 时 $h(x) < 0$. 结合 $y_2 > 1$ 可知, 当 $2 < x < 2.079$ 时, 有 $f_n(x) < 0$, 即 $\Phi(G_2^n, x) < \Phi(G_5^n, x)$. 于是 $n \geq 16$ 时, 由 $\rho(G_2^n) > \rho(G_5^n) \in (2, 2.079)$ 知 $\rho(G_2^n) > \rho(G_5^n)$. 由(2.6)式知 $\rho(G_2^{15}) > \rho(G_5^{15})$.

引理 2.3 如果 $n \geq 11$ 且 $T \in \Omega(n, n-4)$, 则 $\Delta(T) = 3, n_3(T) \leq 3$, 其中 $n_3(T)$ 表示 T 中度为 3 的点的个数.

证明 因为 $D(T) = n-4$, 所以 $\Delta(T) \leq 5$. 令 $K_{1,4}^3$ 是由星图 $K_{1,4}$ 的一个悬挂点引出一条长为 3 的悬挂路得到的图. 如果 $4 \leq \Delta(T) \leq 5$, 则 T 必包含真子图 $K_{1,4}^3$.

$$\Phi(K_{1,4}^3) = x^2(x^6 - 7x^4 + 12x^2 - 3), \Phi(G_{11}^1, x) = x(x^2 - 1)^2(x^6 - 8x^4 + 17x^2 - 5). \quad (2.7)$$

用 Mathematics 直接计算得

$$\rho(K_{1,4}^3) \approx 2.11199, \rho(G_{11}^1) \approx 2.09218. \quad (2.8)$$

由引理 1.4 知

$$\rho(G_1^n) < \rho(G_{11}^1). \quad (2.9)$$

再由引理 1.3 和(2.8)式, (2.9)式得

$$\rho(T) > \rho(K_{1,4}^3) > \rho(G_{11}^1) > \rho(G_1^n).$$

这与 T 的假设矛盾. 因此, $\Delta(T) = 3$. 既然 $D(T) = n-4$, 于是 $n_3(T) \leq 3$. 证明完毕

令 $\Gamma_i = \{T: T \in \Gamma(n, n-4), \Delta(T) = 3 \text{ 且 } n_3(T) = i\}, i = 1, 2, 3$. 容易发现

$$\Gamma_1 = \{P_{3;n-3}^i: i = 4, 5, \dots, \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor\}, \Gamma_2 = \{P_{1,2;n-3}^{i,j}: 2 \leq i < j \leq n-5\}, \Gamma_3 = \{P_{1,1,1;n-3}^{i,j,k}: 2 \leq i < j < k \leq n-4\}.$$

由引理 1.5 知, 当 $4 \leq i \leq \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor - 1$ 时,

$$\rho(P_{3;n-3}^i) < \rho(P_{3;n-3}^{i+1}). \text{ 因此, 有以下结论:}$$

定理 2.1 如果 $n \geq 11$, 则 Γ_1 中树的谱半径满足 $\rho(P_{3;n-3}^4) < \rho(P_{3;n-3}^5) < \dots < \rho(P_{3;n-3}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor})$.

引理 2.4 如果 $n \geq 15$ 且 $T \in \Gamma_2 - \{P_{1,2;n-3}^{2,n-5}, G_1^n, G_2^n, G_4^n, G_5^n, G_6^n\}$, 则 $\rho(T) > \rho(G_5^n)$.

证明 存在正整数 $2 \leq i < j \leq n-5$, 使得 $T = P_{1,2;n-3}^{i,j}$. 分 4 种情形来证明.

情形 1 $i = 2$. 由于 $T \notin \{P_{1,2;n-3}^{2,n-5}, G_1^n, G_2^n, G_4^n, G_5^n, G_6^n\}$, 特别 $T \notin \{P_{1,2;n-3}^{2,n-5}, G_2^n, G_6^n\}$, 知 $j \leq n-8$. 将 T 中删除非空点集 $\{v_{j+4}, v_{j+5}, \dots, v_{n-3}\}$ 得到的图记为 T' , 对 T' 的内路上一条边连续剖分 $n-j-6$ 次得到图 G_2^n , 由引理 1.3, 1.4 和 2.2 得 $\rho(T) > \rho(T') > \rho(G_2^n) > \rho(G_5^n)$.

情形 2 $i = 3$. 由于 $T \notin \{P_{1,2;n-3}^{2,n-5}, G_1^n, G_2^n, G_4^n, G_5^n, G_6^n\}$, 特别 $T \notin \{G_1^n, G_4^n\}$, 于是 $j \leq n-7$. 将 T 中删除非空点集 $\{v_{j+4}, v_{j+5}, \dots, v_{n-3}\}$ 再剖分内路 $n-j-6$ 次得到的图记为 $T'' = G_4^n$, 那么可得 $\rho(T) > \rho(T') > \rho(T'') = \rho(G_4^n) > \rho(G_5^n)$.

情形 3 $i = 4$. 由于 $T \notin \{P_{1,2;n-3}^{2,n-5}, G_1^n, G_2^n, G_4^n, G_5^n, G_6^n\}$, 特别 $T \neq G_5^n$, 于是 $j \leq n-6$. 将 T 中删除非空点集 $\{v_{j+3}, v_{j+4}, \dots, v_{n-3}\}$ 再剖分内路 $n-j-5$ 次得到图记为 $T'' = G_5^n$, 由引理 1.3 和 1.4 得 $\rho(T) > \rho(T') > \rho(T'') = \rho(G_5^n)$.

情形 4 $i \geq 5$. 此时, $j \leq n-5$. 记将 T 中删除非空点集 $\{v_1, v_2, \dots, v_{j-4}, v_{j+3}, v_{j+4}, \dots, v_{n-3}\}$ 再剖分内路 $n+i-j-9$ 次得到图 $T'' = G_5^n$, 由引理 1.3 和 1.4 得 $\rho(T) > \rho(T') > \rho(T'') = \rho(G_5^n)$.

综合上面 4 种情形, 得出 $\rho(T) > \rho(G_5^n)$.

定理 2.2 如果 $n \geq 15$ 且 $T \in \Gamma_2 - \{P_{1,2;n-3}^{2,n-5}, G_1^n, G_5^n\}$, 则 $\rho(T) > \rho(G_5^n) > \rho(G_1^n)$, 即 G_1^n 和 G_5^n 分别

是 $\Gamma_2 - \{P_{1,2;n-3}^{2,n-5}\}$ 中谱半径第一小和第二小的图.

定理 2.3 如果 $n \geq 15$, 则 $\Gamma(n, n-4) - \{P_{1,2;n-3}^{2,n-5}\}$ 中谱半径最小的树是 G_1^n 或 G_3^n .

证明 由文献[7]知, 当 $n \geq 11$ 时, Γ_3 中谱半径最小的图是 $G_3^n = P_{1,1,1;n-3}^{2, \frac{n-3}{2}, n-4}$, 于是由定理 2.1 和 2.2 知 $\Gamma(n, n-4) - \{P_{1,2;n-3}^{2,n-5}\}$ 中谱半径最小的图是 $P_{3;n-3}^4, G_1^n$ 或 G_3^n . 因此, 只需证明

$$\rho(P_{3;n-3}^4) > \rho(G_1^n), \rho(P_{3;n-3}^4) > \rho(G_3^n). \quad (2.10)$$

而

$$\Phi(G_1^{15}, x) = x(x+1)(x-1)(x^{12} - 13x^{10} + 63x^8 - 140x^6 + 142x^4 - 58x^2 + 7),$$

$$\Phi(G_3^{15}, x) = x^3(x^{12} - 14x^{10} + 75x^8 - 191x^6 + 232x^4 - 116x^2 + 14),$$

$$\Phi(P_{3;n-3}^4, x) = x(x^2 - 2)(x^4 - 4x^2 + 2)(x^8 - 8x^6 + 19x^4 - 14x^2 + 1).$$

用 Mathematics 计算得

$$\rho(G_1^{15}) \approx 2.06570, \rho(G_3^{15}) \approx 2.07138, \rho(P_{3,12}^4) \approx 2.09282. \quad (2.11)$$

容易发现, $P_{3;n-3}^4$ 包含 $P_{3,12}^4$ 作为一个子图, $G_a^n (a=1, 3)$ 是对 G_a^{15} 的内路上的一个边连续剖分 $n-15$ 次得到的图, 由引理 1.3 和 1.4 得

$$\rho(P_{3;n-3}^4) \geq \rho(P_{3,12}^4), \rho(G_1^{15}) \geq \rho(G_1^n), \rho(G_3^{15}) \geq \rho(G_3^n). \quad (2.12)$$

因此, 由(2.11)式和(2.12)式知(2.10)式成立.

3 直径为 $n-4$ 谱半径第二小的连通图

令 $\mathfrak{R}(n, n-4)$ 表示直径为 $n-4$ 且顶点数为 n 的连通图的集合. 文献[7]已经证明 $P_{1,2;n-3}^{2,n-5}$ 是 $\mathfrak{R}(n, n-4)$ 中谱半径最小的唯一图. 令 $B_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 如 2 所示.

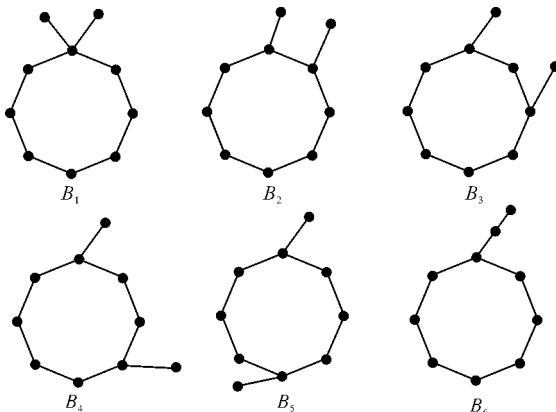


图 2 特殊单圈图

Fig. 2 Special single circles

引理 3.1 若 $n \geq 11$ 且 G 是 $\mathfrak{R}(n, n-4) - \{P_{1,2;n-3}^{2,n-5}\}$ 中谱半径最小的图, 则 G 是树.

证明 假设 G 包含圈, 令 $C(G)$ 是 G 中最大圈的

长度, 则 $D(G) \leq n - \lceil \frac{C(G)}{2} \rceil$. 由于 $G \in \mathfrak{R}(n, n-4)$, 于是 $n-4 \leq n - \lceil \frac{C(G)}{2} \rceil$, 从而 $C(G) \leq 8$. 分 2 种情形证明:

情形 1 $C(G) = 8$. 此时, G 一定包含某个 B_i 作为真子图. 由引理 1.1, 用 Mathematics 计算得

$$\rho(B_1) \approx 2.21432, \rho(B_2) \approx 2.17009, \rho(B_3) \approx 2.1490, \rho(B_4) \approx 2.1388, \rho(B_5) \approx 2.1358, \rho(B_6) \approx 2.11688. \quad (3.1)$$

由引理 1.4 知

$$\rho(G_1^{11}) \geq \rho(G_1^n). \quad (3.2)$$

再由引理 1.3 和公式(3.1), (3.2) 和(2.8) 得

$$\rho(G) > \min\{\rho(B_i); i=1, 2, \dots, 6\} = \rho(B_6) > \rho(G_1^{11}) \geq \rho(G_1^n).$$

注意到 $G_1^n \in \mathfrak{R}(n, n-4) - \{P_{1,2;n-3}^{2,n-5}\}$, 这与 G 的假设矛盾.

情形 2 $C(G) = i, 3 \leq i \leq 7$. 令 H_1^i 表示在圈 C_i 的某个顶点引出一条长为 2 的悬挂路而得到的图, H_2^i 表示在圈 C_i 的某个顶点引出两条悬挂边得到的图, H_3^i 表示在圈 C_i 的某两个邻接顶点分别引出一条悬挂边得到的图. 当 $n \geq 11$ 时, G 一定包含 H_1^i, H_2^i 或 H_3^i 之一作为真子图. 容易发现, 对 $H_j^i (j=1, 2, 3)$ 某个内路上的一个边连续剖分 $8-i$ 次就能得到图集合 $B_k (k=1, 2, \dots, 6)$ 的某一个图形. 因此, 由引理 1.3, 1.4 和 $\min\{\rho(B_i); i=1, 2, \dots, 6\} > \rho(G_1^n)$ (见情形 1) 知

$$\rho(G) > \min\{\rho(H_1^i), \rho(H_2^i), \rho(H_3^i)\} > \min\{\rho(B_k); k=1, 2, \dots, 6\} > \rho(G_1^n).$$

这与 G 的假设矛盾. 综合上面两种情形知 G 不包含圈, 即 G 是树.

定理 3.1 设 $n \geq 15$, 则在 $\mathfrak{R}(n, n-4) - \{P_{1,2;n-3}^{2,n-5}\}$ 中谱半径最小的图是 G_1^n 或 G_3^n .

$$\text{定理 3.2 } \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(G_1^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(G_3^n) = \sqrt{2 + \sqrt{5}}.$$

证明 先证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(G_1^n) = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$. 由于

$$\Phi(G_1^n) = \Phi(P_2)[x\Phi(P_{n-3}) - \Phi(P_2)\Phi(P_{n-6}) - x^2\Phi(P_{n-6}) + x\Phi(P_2)\Phi(P_{n-9})].$$

$$\text{又由文献[13]中引理 3.3 知, } \Phi(P_k) = \frac{\lambda^{k+1} - \lambda^{-k-1}}{\lambda - \lambda^{-1}},$$

$$\text{且 } \lambda = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}. \text{ 代入上式得}$$

$$\Phi(G_1^n) = \frac{(\lambda^6 - 1)\lambda^{2n-12}}{(\lambda^2 - 1)^2\lambda^n} [(\lambda^6 - \lambda^2 - 1)(\lambda^4 - \lambda^2 - 1) - \frac{(\lambda^6 + \lambda^4 - 1)(\lambda^4 + \lambda^2 - 1)}{\lambda^{2n-12}}]. \quad (3.3)$$

用 mathematics 计算得 $\Phi(P_{2;7}^5) = x(x^2 - 1)(x^6 - 7x^4 + 13x^2 - 5)$, $\rho(P_{2;7}^5) \approx 2.04208$. 注意到 $n \geq 9$ 时, $\rho(P_{2;n-2}^{n-4}) \geq \rho(P_{2;7}^5) > 2.042$.

一方面, 由于 G_1^n 包含 $P_{2;n-2}^{n-4}$ 作为真子图, 于是由引理 1.3 知 $\rho(P_{2;n-2}^{n-4}) < \rho(G_1^n)$. 另一方面, G_1^n 是由 G_1^{10} 的剖分内路得到的, 于是由引理 1.4 知 $\rho(G_1^n)$ 单调递减, $\Phi(G_1^{10}) = (x^2 - 1)(x^8 - 8x^6 + 18x^4 - 10x^2 + 1)$, $\rho(G_1^{10}) < \rho(G_1^{10}) \approx 2.1085$. 因此, $2.042 < \rho(P_{2;n-2}^{n-4}) < \rho(G_1^n) < 2.109$. 由上面讨论知, $\{\rho(G_1^n)\}$ 单调收敛.

若记 $\lambda_n = \frac{\rho(G_1^n) + \sqrt{\rho(G_1^n)^2 - 4}}{2}$, 则 λ_n 单调收

敛. 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda_0$, 由

$$\lambda_n > \frac{\rho(P_{2;n-2}^{n-4}) + \sqrt{\rho(P_{2;n-2}^{n-4})^2 - 4}}{2} \geq \frac{\rho(P_{2;7}^5) + \sqrt{\rho(P_{2;7}^5)^2 - 4}}{2} > 1.22, \lambda_n < \frac{\rho(G_1^{10}) + \sqrt{\rho(G_1^{10})^2 - 4}}{2} < 1.3892,$$

知 $1.22 \leq \lambda_n \leq 1.3892$, 从而 $1.22 \leq \lambda_0 \leq 1.3892$. 由 (3.3) 式知 λ_n 是方程的 $(\lambda_n^6 - \lambda_n^2 - 1)(\lambda_n^2 - \lambda_n^2 - 1) - \frac{(\lambda_n^6 + \lambda_n^4 - 1)(\lambda_n^4 + \lambda_n^2 - 1)}{\lambda_n^{2n-12}} = 0$ 的最大根.

令 $n \rightarrow \infty$, 则 $(\lambda_0^6 - \lambda_0^2 - 1)(\lambda_0^4 - \lambda_0^2 - 1) = 0$. 在区间 $(1.22, 1.31)$ 上 $\lambda_0^6 - \lambda_0^2 - 1$ 恒大于 0, 所以 $\lambda_0^4 - \lambda_0^2 - 1 = 0$. 因此, $\lambda_0 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(G_1^n) = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$.

再证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(G_3^n) = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$, 由于

$$\Phi(G_3^{2s+1}) = x^3(P_{2s-2} - 2P_{2s-4} + P_{2s-6}) - x^2(P_{s-1}P_{s-2} - P_{s-1}P_{s-4} - P_{s-2}P_{s-3} + P_{s-3}P_{s-4}) = (\lambda^2 + 1)^2 \lambda^{2s-7} \left[(\lambda^4 - \lambda^2 - 1) - \frac{\lambda^{2s+4}(\lambda^2 + 1) - \lambda^6(\lambda^4 + \lambda^2 - 1)}{\lambda^{4s}} \right]. \quad (3.4)$$

又由于 $\rho(P_{1;2s+1}^{s+1})$ 关于 s 单调递增, 于是 $s \geq 4$ 时 $\rho(P_{1;2s+1}^{s+1}) \geq \rho(P_{1;9}^5) > 2.028$. 因为 G_3^{2s+1} 包含 $P_{1;2s+1}^{s+1}$ 作为真子图, 且 $\rho(G_3^{2s+1})$ 关于 s 单调递减. 因此,

$$2.028 < \rho(P_{1;2s+1}^{s+1}) < \rho(G_3^{2s+1}) < \rho(G_3^{11}) \approx 2.09218.$$

记 $\lambda_s = \frac{\rho(G_3^{2s+1}) + \sqrt{\rho(G_3^{2s+1})^2 - 4}}{2}$, 则 λ_s 单调递

减, 且 $1.18 < \lambda_s < 1.354$. 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda_0$, 则 $1.18 < \lambda_0$

< 1.354 . 注意到 λ_s 是下面方程的最大根:

$$(\lambda^4 - \lambda^2 - 1) - \frac{\lambda^{2s+4}(\lambda^2 + 1) - \lambda^6(\lambda^4 + \lambda^2 - 1)}{\lambda^{4s}} = 0.$$

令 $s \rightarrow \infty$, 则 $\lambda_0^4 - \lambda_0^2 - 1 = 0$, 解得 $\lambda_0 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$,

从而 $\lim_{s \rightarrow \infty} \rho(G_3^{2s+1}) = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$. 又因为数列 $\{\rho(G_3^{2s+1})\}$ 是数列 $\{\rho(G_3^n)\}$ 的子列, 所以得出 $\{\rho(G_3^n)\}$ 收敛且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(G_3^n) = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$.

参考文献:

- [1] Cvetković D M. Some possible directions in further investigations of graph spectrum [M]//Lovász L, Sós V T. Algebra methods in graph theory, North-Holland; Amsterdam, 1981; 47-67.
- [2] Chang A, Huang Q X. Ordering trees by their largest eigenvalues [J]. Linear Algebra Appl, 2003, 370: 175-184.
- [3] 郭曙光. 谱半径前六位的 n 阶单圈图 [J]. 高校应用数学学报 A 辑, 2003, 18(4): 480-486.
- [4] Chang A, Tian F. On the spectral radius of unicyclic graphs with perfect matchings [J]. Linear Algebra Appl, 2003, 370: 237-250.
- [5] 王兴科, 谭尚旺. 双圈图按谱半径的排序 [J]. 数学学报: 中文版, 2010, 53(3): 469-476.
- [6] Cioab S M, Van Dam E R, Koolen J K, et al. Asymptotic results on the spectral radius and the diameter of graphs [J]. Linear Algebra Appl, 2010, 432: 722-737.
- [7] Van Dam E R, Kooij R E. The minimal spectral radius of graphs with a given diameter [J]. Linear Algebra Appl, 2007, 423: 408-419.
- [8] Yuan Xiying, Shao Jiayu, Liu Yue. The minimal spectral radius of graphs of order n with diameter $n - 4$ [J]. Linear Algebra Appl, 2008, 428: 2840-2851.
- [9] Belardo F, E M Li Marzi, Simic S K. Trees with minimal index and diameter at most four [J]. Discrete Math, 2010, 310: 1708-1714.
- [10] Cvetković D M, Doob M, Sachs H. Spectra of graphs [M]. New York: Academic Press, 1980.
- [11] Hoffman A J, Smith J H. On the spectral radii of topologically equivalent graphs. Recent Advances in Graph theory [J]. Academia Prague, 1975: 273-281.
- [12] 吴宝丰, 袁西英, 肖恩利. 关于树的谱半径 [J]. 华东师范大学学报, 2004(3): 22-28.
- [13] Guo S G. On the spectral radius of bicyclic graphs with n vertices and diameter d [J]. Linear Algebra Appl, 2007, 422: 119-132.

(责任编辑: 尹 闯)