DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2011.03.022
广西科学 Guangxi Sciences 2011,18(3):185～186,196

PSL(2,11)的最小级连通3度弧传递陪集图表示*

Graphical Representations of Connected Cubic Arc-Transitive Coset Graphs of Minimum Degree on PSL(2,11)

汤利荣
TANG Li-rong

(台州学院数学与信息工程学院,浙江临海 317000)
(School of Mathematics and Information Engineering, Taizhou University, Linhai, Zhejiang, 317000, China)

摘要:利用特殊射影线性群PSL(2,11)的连通3度弧传递陪集图的正规性,得到PSL(2,11)的最小级连通3度弧传递陪集图表示的级是110.
关键词:单群 陪集图 弧传递 正规性
中图法分类号:O157.5 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2011)03-0185-02
Abstract: By using normality of connected cubic arc-transitive coset graphs on PSL(2,11), the paper found that PSL(2,11) has the minimum degree 110 GR of connected cubic arc-transitive coset graphs.
Key words: simple group, coset graph, arc-transitive, normality

群以它高度的抽象性和广泛的应用性在众多自然科学领域中扮演着重要角色,其中尤以群作用最为活跃,而群在图上的作用则是群作用的一个主要方面.在群与图研究中,图的对称性一直是一个热门问题,它主要通过图的自同构群的某些传递性来描述,这些图类的典型代表有Cayley图和Sabidussi陪集图.

寻找给定群G的最小级图表示是一个有趣的问题.王殿军研究了交错群A_5的最小级传递图表示.2003年,徐尚进[1] 证明绝大多数有限非交换单群的连通3度G-弧传递陪集图是正规的,并且利用陪集图的正规性给出有限非交换单群具有连通3度弧传递陪集图表示的充分条件.本文主要讨论有限非交换单群PSL(2,11)的最小级连通3度弧传递陪集图表示,证明了特殊射影线性群PSL(2,11)的最小级连通3度弧传递陪集图表示的级是110.

收稿日期:2011-01-07
作者简介:汤利荣(1977-),女,硕士,讲师,主要从事群与图研究。
*台州学院校立青年基金项目(No.2010QN11)资助。

1 预备知识

定义1.1 设G是一个有限群,T是其真子群,D是若干个形如$TdT\,(d\notin T)$的双陪集的并,满足$D^{-1}=D$.取顶点集$V=[G:T]$为子群T在G中全体右陪集的集合,边集$E=\{\{Tg,Tdg\}\mid g\in G,d\in D\}$.则图$\Gamma=(V,E)$称为$G$关于$T$和$D$的Sabidussi陪集图.记作$\Gamma:=\mathrm{Sab}(G,T,D)$.当$D$是单个双陪集$D=TdT$时,简记$\Gamma:=\mathrm{Sab}(G,T,d)$.对于陪集图$\Gamma:=\mathrm{Sab}(G,T,D)$,当子群$T$无核时,如果$G\trianglelefteq\mathrm{Aut}(\Gamma)$,则称$\Gamma$关于$G$是正规的;如果$\mathrm{Aut}(\Gamma)=G$,则称$\Gamma$是$G$的一个图表示,简称$GR$.

引理1.1[2] 设$\Gamma:=\mathrm{Sab}(G,T,D)$是$G$关于$T$和$D$的Sabidussi陪集图,则

(1) Γ是良定义的度数为$|D:T|$的无向图.

(2) $\mathrm{Aut}(\Gamma)$包含G(依右乘变换),于是Γ是点传递图.顶点Tg在G中的稳定子群是$g^{-1}Tg$.

(3) Γ是连通的当且仅当$G=\langle D\rangle$.

(4) Γ是G-弧传递的当且仅当$D=Tg_iT$是一个单个的双陪集.

引理1.2[3] 设Γ是连通3度(H,s)-传递图,因而$1\leqslant s\leqslant 5$.取$v\in V(\Gamma)$,并记H_v为H的点稳定

子，则

(1) 当 $s=1$ 时，$H_v\cong Z_3$；

(2) 当 $s=2$ 时，$H_v\cong S_3$；

(3) 当 $s=3$ 时，$H_v\cong D_{12}$；

(4) 当 $s=4$ 时，$H_v\cong S_4$；

(5) 当 $s=5$ 时，$H_v\cong S_4\times Z_2$.

引理 1.3[3] 设 Γ 是连通 3 度弧传递图，$A:=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 是图 Γ 的全自同构群. 则对任一顶点 $v\in v(\Gamma)$，v 在 A 中的点稳定子群 A_v 的阶整除 $48=2^4 3$.

设 $\Gamma:=\mathrm{Sab}(G,T,D)$ 是陪集图，陪集 Tg 是其中一个顶点，如果不计较代表元的选取，Tg 在 $A:=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 中的点稳定子简记作 A_g. 于是有

引理 1.4[1] (1) $|V(\Gamma)|=|A:A_g|=|G:T|$；

(2) $A=GA_g$ 及 $G\cap A_g=T^g$，特别 $G\cap A_1=T$；

(3) $|A:G|=|A_1:T|$.

引理 1.5[1] 设 $\Gamma:=\mathrm{Sab}(G,T,D)$ 是 Sabidussi 陪集图，则 Γ 是 G-弧传递图当且仅当 D 是 T 的单个双陪集. 这时存在 $d\notin T$，使 $\Gamma:=\mathrm{Sab}(G,T,d)$.

引理 1.6[2] 设 $G:=\mathrm{PSL}(2,q)$，则 G 中真子群在 G 中的最小指数为 $q+1$，除非 $q=2,3,5,7,9$. 在这些例外情况中，最小指数为 q，若 $q<9$. 当 $q=9$ 时，最小指数为 6.

引理 1.7[1] 设 G 是有限非交换单群，满足 $|G|\nmid|A_8|$ 且 $G\not\cong A_{15}$，则每个连通 3 度 G-弧传递 Sabidussi 陪集图 $\Gamma:=\mathrm{Sab}(G,T,d)$ 都是正规的.

引理 1.8[1] 设 G 是有限非交换单群，满足 $2^5\nmid|G|$ 且 $G\not\cong A_7$，则每个连通 3 度 G-弧传递 Sabidussi 陪集图 $\Gamma:=\mathrm{Sab}(G,T,d)$ 都是正规的.

引理 1.9[1] 设 G 是非交换单群，满足 $|G|\nmid|A_8|$ 且 $G\not\cong A_{15}$，或者 $2^5\nmid|G|$ 且 $G\not\cong A_7$. 设 $T:=\mathrm{Sab}(G,T,d)$ 是 G 的连通 3 度 G-弧传递陪集图. 则下列各项成立：

(1) 如果 $T\cong Z_3$ 或 S_3，则 T 是 $s\leqslant 3$ 的 s-弧传递图；

(2) 如果 $T\cong Z_6$ 或 D_{12}，则 T 是 3-弧传递图.

引理 1.10[3] 设 Γ 是一个度数至少为 3 的 s-传递图，且其围长是 g，则 $s\leqslant\frac{1}{2}(g+2)$.

2 主要结果

定理 2.1 特殊射影线性群 PSL(2, 11) 不存在级为

12, 15, 20, 22, 30, 33, 44, 55, 60, 66, 132, 165

的连通 3 度弧传递陪集图表示.

证明 设 $G:=\mathrm{PSL}(2,11)$，$\Gamma:=\mathrm{Sab}(G,T,D)$ 是 G 的连通 3 度弧传递陪集图表示.

因为 $|V(\Gamma)|=|G:T|$，则 $|V(\Gamma)|$ 必是 G 中子群 T 的指数，有 $|V(\Gamma)|\,|\,|G|$，即 $|V(\Gamma)|\,|\,660$ 且根据引理 1.6，知 $|V(\Gamma)|\geqslant 12$. 这样

$$|V(\Gamma)|\in\{12,15,20,22,30,33,44,55,60,66,110,132,165,220,330,660\}.$$

因为 Γ 的度数 $\mathrm{Val}(\Gamma)=3$ 是奇数，再由正则性知

$$|V(\Gamma)|\in\{12,20,22,30,44,60,66,110,132,220,330,660\}.$$

由引理 1.3，A 的点稳定子的阶 $|A_1|\,|\,48=2^4 3$. 又由引理 1.4 的(2)知 $T=G\cap A_1$，得 $|T|\,|\,48$. 这样

$$|V(\Gamma)|\in\{110,220,330,660\}.$$

即特殊射影线性群 PSL(2, 11) 不存在级为 12, 15, 20, 22, 30, 33, 44, 55, 60, 66, 132, 165 的连通 3 度弧传递陪集图表示.

定理 2.2 特殊射影线性群 PSL(2, 11) 不存在级为 330, 660 的连通 3 度弧传递陪集图表示.

证明 设 $G:=\mathrm{PSL}(2,11)$，$\Gamma:=\mathrm{Sab}(G,T,D)$ 是 G 的连通 3 度弧传递陪集图表示.

由定理 2.1 知

$$|V(\Gamma)|\in\{110,220,330,660\}.$$

如果 $|V(\Gamma)|=330$，则 $|T|=\frac{660}{|V(\Gamma)|}=\frac{660}{330}=2$，即 $T\cong Z_2$. 由引理 1.2 知，A_1 同构于 Z_3,S_3,D_{12},S_4 或 $S_4\times Z_2$. 因此 $|V(\Gamma)|\neq 330$. 显然 $|V(\Gamma)|\neq 660$，这样便有

$$|V(\Gamma)|\in\{110,220\}.$$

即特殊射影线性群 PSL(2, 11) 不存在级为 330, 660 的连通 3 度弧传递陪集图表示.

定理 2.3 特殊射影线性群 PSL(2, 11) 的连通 3 度弧传递陪集图表示的最小级是 110.

证明 设 $G:=\mathrm{PSL}(2,11)$，考虑 G 在其 Sylow 11-子群集 $\mathrm{Syl}_{11}(G)$ 上的共轭作用，显然这个作用是忠实的. 由于 $|\mathrm{Syl}_{11}(G)|=12$，则 $G\lesssim S_{12}$. 这时可取 $G=\langle t,r\rangle$，其中

$t=(1,6,7)(2,3,4)(5,12,8)(9,11,10)$，

$r=(1,3)(2,4)(5,6)(7,9)(8,10)(11,12)$.

选取 G 的一个 3 阶元

$d=(1,5,3)(2,4,12)(6,9,10)(7,8,11)$，

及 $T=\langle a,b\rangle\cong S_3$，其中

$a=(1,8,2)(3,9,7)(4,5,10)(6,11,12)$，

$b=(1,6)(2,11)(3,10)(4,7)(5,9)(8,12)$.

则 G 的 Sabidussi 陪集图 $\Gamma:=\mathrm{Sab}(G,T,d)$ 是连通 3

(下转第 196 页 Continue on page 196)

记 $\omega=\max\{\omega_0+1,\omega_1+1,\cdots,\omega_{m-1}+1\}$，$\Omega=\{x(t)\in X\mid |x^{(i)}|_0<\omega, i=0,1,2,\cdots,m-1\}$. 那么 $\Omega\subset X$ 为一有界开集. 因此, $Lx\neq\lambda Nx$, 对 $\forall c\in \mathrm{Dom}(L)\cap\partial\Omega$ 都成立. 从而引理 3 的条件(1)满足. 又对任意 $x\in \mathrm{Ker}(L)\cap\partial\Omega$, 有 $|x|=\Omega>d$ 是一个常数, 且 $g_1(x)>|q|_0$. 因此

$$QNx=-\frac{1}{T}\int_0^T g_1(\int_{-r}^0 x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s))\mathrm{d}t\neq 0.$$

如果我们令

$$H(x,\mu)=-\mu x-\frac{1-\mu}{T}\int_0^T g_1(\int_{-r}^0 x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s))\mathrm{d}t,\ (x,\mu)\in\overline{\Omega}\times[0,1],$$

那么

$$H(x,\mu)\neq 0,\ \forall(x,\mu)\in(\partial\Omega\cap \mathrm{Ker}(L))\times[0,1].$$

因此

$$\deg\{QN,\Omega\cap \mathrm{Ker}(L),0\}=\deg\{H(x,0),\Omega\cap \mathrm{Ker}(L),0\}=\deg\{H(x,1),\Omega\cap \mathrm{Ker}(L),0\}\neq 0.$$

从而引理 3 的条件(2)和(3)满足. 运用引理 3, 我们得出方程(13)在 $D(L)\cap\overline{\Omega}$ 中至少存在一个 T-周期解 $x(t)$, 即方程(4)至少存在一个 T-周期解 $x(t)$, 再运用引理 1 可以证得方程(1)和(2)至少存在一个 T-周期解 $y(t)$.

类似地, 我们又得到下面结论.

定理 2 假设 $f_1(0)=0$, $\int_0^T q(t)\mathrm{d}t=0$, 如果存在常数 $a\geqslant 0$, $d>0$, 使得

(1) $xg_1(x)<0$, $|g_1(x)|>|q|_0$, $\forall |x|>d$;

(2) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sup\limits_{t\in[0,T]}\frac{|g_1(x)|}{|x|}\leqslant a$.

那么, 当 $aT^2M_1<1$ 时, 方程(4)至少存在一个 T-周期解, 进而方程(1)和(2)至少存在一个 T-周期解, 其中 M_1 与引理 2 中的定义一致.

参考文献:

[1] Zhang S P. Positive periodic solution to a class of nonlinear periodic differential equation with impulses and delay [J]. Ann of Diff Eqs, 2007, 23(1): 104-112.

[2] 燕居让. 高阶非线性脉冲泛函微分方程周期解的存在性 [J]. 山西大学学报: 自然科学版, 2003, 26(1): 1-4.

[3] 王琳琳. 一类高阶脉冲时滞微分方程的周期解[J]. 兰州大学学报: 自然科学版, 2006, 42(4): 114-118.

[4] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations[M]. Berlin: Lecture Notes in Math, 1977.

[5] Meng X Z, Chen L S, Li Q X. The dynamics of an impulsive delay predator-prey model with variable coeffcients [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 198: 361-374.

[6] Li X J, Liu M. On the existence of periodic solutions for a kind of high-order functional differential equation with distributed delay[J]. 数学研究, 2008, 41(1): 13-22.

[7] Bainov D, Simeonov P A. Impulsive differential equations: periodic solutions and applications[M]. New York: Longman Scientific Technical, 1993.

(责任编辑: 尹 闯)

(上接第 186 页 Continue from page 186)

度 (G,s)-传递图. 由引理 1.2 和引理 1.9 得 $2\leqslant s\leqslant 3$. 易知 (T,Td,Td^2,Td^3) 是 Γ 中的一个 3-圈, 则 Γ 的围长 $g(\Gamma)=3$. 由引理 1.10 有 $s\leqslant\frac{1}{2}(3+2)=2.5$, 只能 $s=2$, 所以 Γ 是连通 3 度 $(G,2)$-传递图.

易得 $G=\langle T,d\rangle$, $|V(\Gamma)|=|G:T|=|660:6|=110$ 及 $\mathrm{Val}(\Gamma)=|TdT:T|=|T:T\cap T^d|=3$, 于是 G 的 Sabidussi 陪集图 $\Gamma:=\mathrm{Sab}(G,T,d)$ 是连通 3 度 $(G,2)$-传递图, 并且 Γ 还是 G 的一个级为 110 的最小级 GR.

致谢:

感谢审稿人提出的宝贵修改意见.

参考文献:

[1] Xu S J. On graphs of small valencies admitting transitive action of simple groups[D]. Beijing: Peking University, 2003: 53-58.

[2] 徐明耀. 有限群导引: 下册[M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 1999: 321-370.

[3] Biggs N. Algebraic graph theory[M]. New York: Cambridge University Press, 1964.

(责任编辑: 尹 闯)