DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2011.03.024
广西科学 Guangxi Sciences 2011,18(3):189~191

一个广义薄膜方程弱解的唯一性与渐近行为*

Unigueness and Asymptotic Behavior of Weak Solutions for a Generalized Thin Film Equation

郭金勇
GUO Jin-yong

(柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系,广西柳州 545004)
(Department of Mathematics and Computer Science, Liuzhou Teachers College, Liuzhou, Guangxi, 545004, China)

摘要:在一些初值的假定下,使用 Steklov 均值证明一个广义薄膜方程弱解的唯一性,并使用能量等式讨论该方程弱解的渐近行为.
关键词:薄膜方程 弱解 唯一性 渐近行为
中图法分类号:O175.26 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2011)03-0189-03

Abstract: Under some assumptions on the initial value, the uniqueness of weak solutions for a generalized thin film equation was proved by using the Steklov mean. The asymptotic behavior of weak solution was also discussed by using the energy equality.
Key words: thin film equation, weak solution, uniqueness, asymptotic behavior

本文考虑如下广义薄膜方程的初边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\mathrm{div}(|\nabla\Delta u|^{p-2}\nabla\Delta u)-\Delta u=0,\ x\in\Omega,\ t>0,\ p>2, \tag{1}$$

$$u=\Delta u=0,\ x\in\partial\Omega,\ t>0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega. \tag{3}$$

其中 $\Omega\subset R^2$ 为具光滑边界的有界区域.

当 $p=2$ 时,方程(1)为人们熟知的 Cahn-Hilliard 方程[1]

$$u_t+\mathrm{div}[M(u)\nabla(K\Delta u-\frac{\partial f}{\partial u})]=0.$$

它最初描述了在相分离期间集中守恒场的变化.而且方程(1)还是典型的高阶方程,具有很强的物理背景和丰富的理论内涵,它描述了在近似光滑的固体表面上,由表面张力推动的液体薄膜高度 $u(x,t)$ 的演变[2,3]. J. R. King 首先导出方程(1),并利用关于支集度的局部分析方法研究一维情形下的Cauchy问题和特殊闭形解,如行波解、可分离解、瞬时源解等.

本文在二维情形下讨论问题,这是因为在构造整个固体表面上油膜扩散模型[4]时,可以用方程(1)表示.文献[5]已经证明问题(1)~(3)弱解的存在性.我们进一步讨论该问题弱解的其它性质,使用 Steklov 均值,证明其弱解的唯一性,并使用能量等式,讨论其弱解的渐近行为.

1 弱解的唯一性

为证明问题(1)~(3)弱解的唯一性,需要以下引理.

引理1 对 $\varphi\in L^{\infty}(t_1,t_2;W_0^{1,p}(\Omega))$ 及 $\varphi_t\in L^2(\Omega\times(t_1,t_2))$.问题(1)~(3)的弱解 u 在Q_T 上满足

$$\int_\Omega u(x,t_1)\varphi(x,t_1)\mathrm{d}x+\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega(u\frac{\partial\varphi}{\partial t}+|\nabla\Delta u|^{p-2}\nabla\Delta u\nabla\varphi-\nabla u\nabla\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_\Omega u(x,t_2)\varphi(x,t_2)\mathrm{d}x.$$

特别地,对 $\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 有

$$\int_\Omega(u(x,t_1)-u(x,t_2))\varphi\mathrm{d}x-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega(|\nabla\Delta u|^{p-2}\nabla\Delta u\nabla\varphi-\nabla u\nabla\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0. \tag{4}$$

证明 由$\varphi\in L^{\infty}(t_1,t_2;W_0^{1,p}(\Omega))$及$\varphi_t\in L^2(\Omega\times(t_1,t_2))$,选取函数序列$\{\varphi_k\}$,使得 $\varphi(\cdot,t)\in$

收稿日期:2011-01-07
作者简介:郭金勇(1962-),男,副教授,主要从事偏微分方程研究。
*广西教育厅科研项目(200911MS294)资助。

$C_0^\infty(\Omega)$. 当 $k\to\infty$ 时, 有

$\|\varphi_{kt}-\varphi_t\|_{L^\infty(\Omega\times(t_1,t_2))}\to 0$, $\|\varphi_k-\varphi\|_{L^\infty(t_1,t_2;W_0^{1,p}(\Omega))}\to 0$.

选取函数 $j(s)\in C_0^\infty(R)$, 使得

$$j(s)\geqslant 0,\ s\in R;\ j(s)=0,\ \forall\ |s|>1;\ \int_R j(s)\mathrm{d}s=1.$$

对 $h>0$, 定义 $j_h(s)=\frac{1}{h}j(\frac{s}{h})$ 且

$$\eta_h(t)=\int_{t-t_2+2h}^{t-t_1-2h}j_h(s)\mathrm{d}s.$$

显然, 对所有的 $t\in(t_1,t_2)$, $\eta_h(t)\in C_0^\infty(t_1,t_2)$, $\lim\limits_{h\to 0^+}\eta_h(t)=1$.

在弱解定义中选择 $\varphi=\varphi_k(x,t)\eta_h(t)$, 则有

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_1-2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_2+2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\varphi_{kt}\eta_h\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega|\nabla\Delta u|^{p-2}\nabla\Delta u\nabla\varphi_k\eta_h\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\nabla u\nabla\varphi_k\eta_h\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

注意到

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_1-2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_\Omega(u\varphi_k)|_{t=t_1}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{t_1+h}^{t_1+3h}\int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_1-2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_{t_1+h}^{t_1+3h}\int_\Omega(u\varphi_k)|_{t=t_1}j_h(t-t_1-2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\leqslant\sup_{t_1+h<t<t_1+3h}\int_\Omega|(u\varphi_k)|_t-(u\varphi_k)|_{t_1}|\mathrm{d}x,$$

且 $u\in C(0,T;L^2(\Omega))$, 上式右端 $\to 0$(当 $h\to 0$ 时). 类似地

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_2+2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_\Omega(u\varphi_k)|_{t=t_2}\mathrm{d}x\right|\to 0,\ \text{当}\ h\to 0\ \text{时}.$$

令 $h\to 0$, $k\to\infty$, 得

$$\int_\Omega u(x,t_1)\varphi(x,t_1)\mathrm{d}x+\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega(u\frac{\partial\varphi}{\partial t}+|\nabla\Delta u|^{p-2}\nabla\Delta u\nabla\varphi-\nabla u\nabla\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_\Omega u(x,t_2)\varphi(x,t_2)\mathrm{d}x.$$

特别地, 对 $\varphi\in W_0^{2,p}(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega(u(x,t_1)-u(x,t_2))\varphi\mathrm{d}x-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega(|\nabla\Delta u|^{p-2}\nabla\Delta u\nabla\varphi-\nabla u\nabla\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

固定 $\tau\in(0,T)$, 令 h 满足 $0<\tau<\tau+h<T$. 设 $t_1=\tau$, $t_2=\tau+h$, 用 $\frac{1}{h}$ 乘以(4)式, 对 $\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)$, 则有

$$\int_\Omega(u_h(x,\tau))_\tau\varphi\mathrm{d}x+\int_\Omega(|\nabla\Delta u|^{p-2}\nabla\Delta u)_h(x,\tau)\nabla\varphi\mathrm{d}x-\int_\Omega\nabla u_h(x,\tau)\nabla\varphi\mathrm{d}x=0,\qquad(5)$$

其中 u_h 表示 u 的 Steklov 均值, 即

$$u_h(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}u(\cdot,\tau)\mathrm{d}\tau, & t\in(0,T-h),\\ 0, & t>T-h.\end{cases}$$

定理 1 问题(1)~(3)仅有一个弱解.

证明 假定 u_1, u_2 为问题(1)~(3)的两个弱解, 则

$$\int_\Omega(u_1(x,\tau)-u_2(x,\tau))_{h\tau}\varphi\mathrm{d}x+\int_\Omega(|\nabla\Delta u_1|^{p-2}\nabla\Delta u_1-|\nabla\Delta u_2|^{p-2}\nabla\Delta u_2)_h(x,\tau)\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x-\int_\Omega\nabla(u_1-u_2)_h(x,\tau)\nabla\varphi\mathrm{d}x=0.$$

对固定的 τ, 取 $\varphi(x)=[\Delta(u_1-u_2)]_h\in W_0^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega\nabla(u_1(x,\tau)-u_2(x,\tau))_{h\tau}\nabla(u_1-u_2)_h\mathrm{d}x=-\int_\Omega[(|\nabla\Delta u_1|^{p-2}\nabla\Delta u_1-|\nabla\Delta u_2|^{p-2}\nabla\Delta u_2)_h]\cdot(x,\tau)\nabla\Delta(u_1-u_2)_h\mathrm{d}x+\int_\Omega\nabla(u_1-u_2)_h(x,\tau)\nabla\Delta(u_1-u_2)_h\mathrm{d}x.$$

在区间 $(0,t)$ 上, 上式关于 τ 积分, 得

$$\int_\Omega|\nabla(u_1-u_2)_h|^2(x,t)\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

由 Poincaré 不等式, 得

$$\int_\Omega|(u_1-u_2)_h|^2\mathrm{d}x=0.$$

因此 $u_1=u_2$.

2 弱解的渐近行为

定理 2 对任意的 $\rho(x)\geqslant 0$, $\rho(x)\in C^2(\overline{\Omega})$, 问题(1)~(3)的弱解 u 满足

$$\frac{1}{2}\int_\Omega\rho(x)|\nabla u(x,t)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_\Omega\rho(x)|\nabla u_0(x)|^2\mathrm{d}x=-\iint_{Q_t}|\nabla\Delta u|^{p-2}\nabla\Delta u\cdot\nabla\mathrm{div}(\rho(x)\nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-\iint_{Q_t}\Delta u\,\mathrm{div}(\rho(x)\nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau,\qquad(6)$$

这里 $Q_t=\Omega\times(0,t)$.

证明 在文献[5]定理 2.1 的证明中, 有

$$f(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2\mathrm{d}x\in C([0,T]).$$

类似地,可以证明对任意的$\rho(x)\geqslant 0$, $\rho(x)\in C^2(\overline{\Omega})$,

$$f_\rho(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega \rho(x)\,|\nabla u(x,t)|^2\mathrm{d}x\in C([0,T]).$$

考虑泛函

$$\Phi_\rho[v]=\frac{1}{2}\int_\Omega \rho(x)\,|\nabla v(x)|^2\mathrm{d}x.$$

容易看出,$\Phi_\rho[v]$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 上的凸泛函.

对任意的$\tau\in(0,T)$和$h>0$,有

$$\Phi_\rho[u(\tau+h)]-\Phi_\rho[u(\tau)]\geqslant\langle u(\tau+h)-u(\tau),-\mathrm{div}(\rho(x)\nabla u(x,\tau))\rangle.$$

由$\frac{\delta\Phi_\rho[v]}{\delta v}=-\mathrm{div}(\rho(x)\nabla v)$,对任意给定的$t_1,t_2\in[0,T]$,$t_1<t_2$,上式关于$\tau$在$(t_1,t_2)$上积分,有

$$\int_{t_2}^{t_2+h}\Phi_\rho[u(\tau)]\,\mathrm{d}\tau-\int_{t_1}^{t_1+h}\Phi_\rho[u(\tau)]\,\mathrm{d}\tau\geqslant\int_{t_1}^{t_2}\langle u(\tau+h)-u(\tau),-\mathrm{div}(\rho(x)\nabla u)\rangle\,\mathrm{d}\tau.$$

在上式两边乘以$\frac{1}{h}$,并令$h\to 0$,得到

$$\Phi_\rho[u(t_2)]-\Phi_\rho[u(t_1)]\geqslant\int_{t_1}^{t_2}\langle\frac{\partial u}{\partial t},-\mathrm{div}(\rho(x)\nabla u)\rangle\,\mathrm{d}\tau.$$

类似地,有

$$\Phi_\rho[u(\tau)]-\Phi_\rho[u(\tau-h)]\leqslant\langle u(\tau)-u(\tau-h),-\mathrm{div}(\rho(x)\nabla u)\rangle.$$

从而

$$\Phi_\rho[u(t_2)]-\Phi_\rho[u(t_1)]\leqslant\int_{t_1}^{t_2}\langle\frac{\partial u}{\partial t},-\mathrm{div}(\rho(x)\nabla u)\rangle\,\mathrm{d}\tau.$$

因此

$$\Phi_\rho[u(t_2)]-\Phi_\rho[u(t_1)]=\int_{t_1}^{t_2}\langle\frac{\partial u}{\partial t},-\mathrm{div}(\rho(x)\nabla u)\rangle\,\mathrm{d}\tau.$$

取$t_1=0$,$t_2=t$,由弱解的定义,得到

$$\Phi_\rho[u(t)]-\Phi_\rho[u(0)]=\int_0^t\langle-\mathrm{div}(|\nabla\Delta u|^{p-2}\nabla\Delta u)+\Delta u,-\mathrm{div}(\rho(x)\nabla u(\tau))\rangle\,\mathrm{d}\tau=-\int_0^t\langle|\nabla\Delta u|^{p-2}\nabla\Delta u,\nabla[\mathrm{div}(\rho(x)\nabla u(\tau))]\rangle\mathrm{d}\tau-\int_0^t\langle\Delta u,\mathrm{div}(\rho(x)\nabla u(\tau))\rangle\,\mathrm{d}\tau.$$

证明完毕.

定理 3 令u是问题(1)~(3)的弱解,$p>2$.那么

$$\int_\Omega|u(x,t)|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{C_3}{(C_1t+C_2)^\alpha},\ C_i>0,\ i=1,2,\ \alpha=\frac{2}{p-2}.$$

证明　在(6)式中取$\rho(x)=1$,得

$$\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u_0(x)|^2\mathrm{d}x=-\int_0^t\int_\Omega|\nabla\Delta u|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^t\int_\Omega|\Delta u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\tag{7}$$

令$f(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2\mathrm{d}x$.由(7)式,有

$$f'(t)=-\int_\Omega|\nabla\Delta u|^p\mathrm{d}x-\int_\Omega|\Delta u|^2\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

由$u\in W^{3,p}(\Omega)$,$u,\Delta u\in W_0^{1,p}(\Omega)$,有

$$\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_\Omega|\nabla\Delta u|^2\mathrm{d}x\leqslant C(\int_\Omega|\nabla\Delta u|^p\mathrm{d}x)^{2/p}.$$

即$f(t)\leqslant C|f'(t)|^{2/p}$.

再由$f'(t)\leqslant 0$,有$f'(t)\leqslant -Cf(t)^{p/2}$,因此

$$\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{(C_1t+C_2)^\alpha},\ \alpha=\frac{2}{p-2},\ C_i>0,\ i=1,2.$$

由 Poincaré 不等式,有

$$\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x.$$

因此

$$\int_\Omega|u(x,t)|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{(C_1t+C_2)^\alpha},\ \alpha=\frac{2}{p-2},\ C_i>0,\ i=1,2.$$

参考文献:

[1] Cahn J W, Hilliard J E. Free energy of nonuniform system I interfacial free energy[J]. J Chem Phys, 1958(28): 258-367.

[2] Oron A, Davis S H, Bankoff G. Long scale evolution of thin liquid film[J]. Rev Mod Phys, 1997, 69: 931-980.

[3] King J R. Two generalisations of the thin film equation [J]. Math Comput Modelling, 2001, 34(7-8): 737-756.

[4] Tayler A B. Mathematical models in applied mechanics [M]. Clarend, Oxford, 1986.

[5] 郭金勇.一个广义薄膜方程弱解的存在性[J].数学的实践与认识,2008,10:155-161.

(责任编辑:尹　闯)