DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2011.03.025
广西科学 Guangxi Sciences 2011, 18(3): 192~196

一类具有分布时滞的高阶脉冲泛函微分方程周期解的存在性*

Existence of Periodic Solutions for a Kind of High-order Impulsive Functional Differential Equations with Distributed Delay

唐祯蔚, 冯春华
TANG Zhen-wei, FENG Chun-hua

(广西师范大学, 广西桂林 541004)
(Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 利用迭合度理论中的延拓定理讨论一类具有分布时滞的高阶脉冲微分方程周期解的存在性, 得到该方程存在周期解的条件.

关键词: 分布时滞 脉冲 周期解 迭合度
中图法分类号: O175.8 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2011)03-0192-05

Abstract: By using the continuation theory of coincidence degree theorem, we study a kind of high-order impulsive functional differential equations with distributed delay. Several conditions are obtained for the existence of periodic solutions of such system.

Key words: distributed delay, impulse, periodic solution, coincidence degree

脉冲微分方程理论有着广泛的应用背景, 近年来许多学者研究了该方程尤其是其周期解的存在性, 但是对高阶脉冲微分方程的定性研究的报道还比较少见[1~5]. 本文利用迭合度理论中的延拓定理研究一类具分布时滞的高阶脉冲微分方程周期解的存在性问题, 所得结论推广了文献[6]关于非脉冲方程的结果.

1 基本定义及引理

引入一些记号: $T>0$ 为常数, $C_T=\{x \mid x\in C(R,R), x(t+T)\equiv x(t)\}$ 且范数 $|\varphi|_0=\max\limits_{[0,T]}|\varphi(t)|$, $\forall\varphi\in C_T$. $C_T^{m-1}=\{x \mid x\in C^{m-1}(R,R), x(t+T)\equiv x(t)\}$ 且范数 $\|\varphi\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m-1}\{|\varphi^{(i)}|_0\}$, $\forall\varphi\in C_T^{m-1}$. 易知, C_T 和 C_T^{m-1} 都是 Banach 空间. 在本文中我们使用通常的约定: 一个乘积符号下, 如果乘积因子的个数都是零, 则乘积定义为 1. 考虑具有分布时滞的高阶脉冲微分方程

$$y^{(m)}(t)+f(y^{(m-1)}(t))+g(\int_{-r}^{0}y(t+s)\mathrm{d}\alpha(s))=p(t), t\neq t_k; \tag{1}$$

$$y^{(i)}(t_k^+)-y^{(i)}(t_k)=b_k y(t_k), i=0,1,2,\cdots,m-1, t=t_k. \tag{2}$$

其中

(A_1) $0=t_0<t_1<\cdots<t_k<\cdots$ 是固定时刻的脉冲点, 且 $\lim\limits_{t\to\infty}t_k=\infty$;

(A_2) $f,g:[0,\infty)\to R$, 对于每一个固定的 y 关于 t 是 Lebesgue 可测的, 对于每一个固定的 t 关于 y 是连续的. p 是定义在 R 上的 T-周期函数, 且 $p(t):[0,\infty)\to R$ 是 Lebesgue 可测函数. $T>0$, $r>0$, $m\geqslant 2$ 是正整数. $\prod\limits_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)$ 关于 t 是 T-周期函数;

(A_3) $b_k>-1$, $k=1,2,\cdots$ 是常数序列;

(A_4) $\alpha:[-r,0]\to R$ 是有界变差函数, 且 $\alpha(s)$ 在 $[-r,0]$ 上的变差之和为 1.

令 Φ 表示 Lebesgue 可测函数 $\phi:[-r,0]\to R$ 的集合.

定义 1 对于 $\phi\in\Phi$, 函数 $y:[-r,\infty)\to R$ 称为 (1) 式和 (2) 式在 $[0,\infty)$ 上满足初始条件

收稿日期: 2011-01-07
作者简介: 唐祯蔚(1984-), 女, 硕士研究生, 主要从事微分方程研究。
*国家自然科学基金项目(10961005)资助。

$$y(t)=\phi(t), t\in[-r,0], \phi(0)>0 \tag{3}$$
的解，如果它还满足

(i) $y(t)$ 在 $[t_{k-1}, t_k)$, $k=1,2,\cdots$ 上有绝对连续的 $m-1$ 阶导数；

(ii) 对任何 t_k, $y^{(i)}(t_k^+)$, $y^{(i)}(t_k^-)$ 存在且 $y^{(i)}(t_k^-)=y^{(i)}(t_k)$ 还满足(2)式；

(iii) 除脉冲点 $t_k, k=1,2,\cdots$ 外，在 $[0,\infty)$ 上 $y(t)$ 几乎处处满足(1)式. 用分步法可以证明在条件 $(A_1)(A_2)$ 下，(1)式(2)式和(3)式在 $[-r,\infty)$ 上存在唯一的解 $y(t)$.

考虑辅助方程

$$x^{(m)}(t)+f_1(x^{(m-1)}(t))+g_1(\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s))=q(t), \tag{4}$$

其中

$$f_1(x^{(m-1)}(t))=\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)^{-1}f(\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)x^{(m-1)}(t)), \tag{5}$$

$$g_1(\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s))=\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)^{-1}\circ g(\int_{-r}^{0}\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)), \tag{6}$$

$$q(t)=\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)^{-1}p(t). \tag{7}$$

方程(4)在 $[0,\infty)$ 上的解，指的是 $x\in([-r,\infty),R)$ 在 $[0,\infty)$ 上有绝对连续的 $m-1$ 阶导数，满足初始条件(3)，并且在 $[0,\infty)$ 上几乎处处满足方程(4).

注 1 由(5)式，(6)式和(7)式容易知道，函数 f_1, g_1 和 q 分别满足 f, g 和 p 在 (A_2) 中满足的那些条件.

引理 1 设 $(A_1)\sim(A_4)$ 成立，则

(i) 如果 $x(t)$ 是方程(4)在 $[0,\infty)$ 上的解，则 $y(t)=\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)x(t)$ 是方程(1)和(2)的解；

(ii) 如果 $y(t)$ 是方程(1)和(2)在 $[0,\infty)$ 上的解，则 $x(t)=\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)^{-1}y(t)$ 是方程(4)的解.

证明 首先证明情形(i). 假设 $x(t)$ 是方程(4)在 $[0,\infty)$ 上的解，则

$$y^{(m)}(t)=\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)x^{(m)}(t)=\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)[q(t)-f_1(x^{(m-1)})-g_1(\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s))]=\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)[\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)^{-1}p(t)-\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)^{-1}f(\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)x^{(m-1)}(t))-\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)^{-1}g(\int_{-r}^{0}\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s))]=p(t)-f(y^{(m-1)})-g(\int_{-r}^{0}y(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)).$$

这意味着 $y(t)=\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)x(t)$ 在 $[0,\infty)\setminus\{t_k\}$ 上满足方程(1)和(2).

又由于对每一个 $t=t_k, k=1,2,\cdots$, 有

$$y^{(i)}(t_k^+)=\lim_{t\to t_k^+}\prod_{0\leqslant t_j<t}(1+b_j)x^{(i)}(t)=\prod_{0\leqslant t_j\leqslant t_k}(1+b_j)x^{(i)}(t_k),$$

$$y^{(i)}(t_k^-)=\prod_{0\leqslant t_j<t_k}(1+b_j)x^{(i)}(t_k^-)=\prod_{0\leqslant t_j<t_k}(1+b_j)x^{(i)}(t_k)=y^{(i)}(t_k),$$

因而，对每一个 $k=1,2,\cdots$, $y^{(i)}(t_k^+)=(1+b_k)y^{(i)}(t_k)$ 成立. 由上述证明可知，$y(t)$ 是方程(1)和(2)的解.

其次证明情形(ii). 假设 $y(t)$ 是方程(1)和(2)在 $[0,\infty)$ 上的解，由定义 1 的条件(i)可知，$y(t)$ 在每一个区间 $[t_{k-1}, t_k]$, $k=1,2,\cdots$ 上有绝对连续的 $m-1$ 阶导数. 另外由情形(i)的证明可知，对每一个 $k=1,2\cdots$, 都有 $y^{(i)}(t_k^+)=(1+b_k)y^{(i)}(t_k)$. 因此，对每一个 $k=1,2\cdots$, 我们有

$$x^{(i)}(t_k^+)=\prod_{0\leqslant t_j\leqslant t_k}(1+b_j)^{-1}y^{(i)}(t_k^+)=\prod_{0\leqslant t_j<t_k}(1+b_j)^{-1}y^{(i)}(t_k)=x^{(i)}(t_k),$$

$$x^{(i)}(t_k^-)=\prod_{0\leqslant t_j\leqslant t_{k-1}}(1+b_j)^{-1}y^{(i)}(t_k^-)=\prod_{0\leqslant t_j\leqslant t_{k-1}}(1+b_j)^{-1}y^{(i)}(t_k)=x^{(i)}(t_k).$$

这就说明 $x^{(i)}(t)$, $i=0,1,\cdots,m-1$, 在 $[0,\infty)$ 上是连续的. 由定义 1 容易证明 $x^{(i)}(t)$, $i=0,1,\cdots,m-1$, 在 $[0,\infty)$ 上是绝对连续的. 另一方面，

$$x^{(m)}(t)+f_1(x^{(m-1)}(t))+g_1(\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s))=\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)^{-1}y^{(m)}+f_1(\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)^{-1}y^{(m-1)}(t))+g_1(\int_{-r}^{0}\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)^{-1}y(t+s)\mathrm{d}\alpha(s))=\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)^{-1}y^{(m)}(t)+\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)^{-1}f(y^{(m-1)})+\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)^{-1}g(\int_{-r}^{0}y(t+s)\mathrm{d}\alpha(s))=\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)^{-1}p(t)=q(t).$$

这就证明 $x(t)=\prod_{0\leqslant t_k<t}(1+b_k)^{-1}y(t)$ 是方程(4)在 $[0,\infty)$ 上的解. 因此，引理 1 成立.

注 2 由引理 1 可知，在条件 $(A_1)\sim(A_4)$ 下，为了证明脉冲方程(1)和(2)有周期解存在，只需证明非脉冲方程(4)有周期解存在.

引理 2[6] 设 $T>0$ 为常数，$x(t)\in C^m(R,R)$,

$m \geqslant 2$，且 $x(t+T) \equiv x(t)$. 则存在与 $x(t)$ 无关的常数 $M_i > 0$，使得

$$|x^{(i)}|_0 \leqslant M_i \int_0^T |x^{(m)}(t)| \mathrm{d}t,\ i = 1, 2, \cdots, m-1. \quad (8)$$

其中，当 m 为偶数时，

$$M_i = \begin{cases} M_{2s-1} = T^{m-2s} \sqrt{-B_{2m-4s} / 12(2m-4s)!}, \\ \quad s = 1, 2, \cdots, \frac{m}{2} - 1, \\ M_{2s} = \frac{(-1)^{\frac{m-2s}{2}+1} T^{m-2s-1} B_{m-2s}}{(m-2s)!}, \\ \quad s = 1, 2, \cdots, \frac{m}{2} - 1, \\ M_{m-1} = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (9)$$

当 m 为奇数时，

$$M_i = \begin{cases} M_{2s+1} = \frac{(-1)^{\frac{m-2s-1}{2}+1} T^{m-2s-2} B_{m-2s-1}}{(m-2s-1)!}, \\ \quad s = 0, 1, \cdots, \frac{m+1}{2} - 2, \\ M_{2s} = T^{m-2s-1} \sqrt{-B_{2m-4s-2} / 12(2m-4s-2)!}, \\ \quad s = 1, 2, \cdots, \frac{m+1}{2} - 2, \\ M_{m-1} = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (10)$$

其中，$B_{m-2s}, B_{2m-4s}, B_{m-2s-1}, B_{2m-4s-2}$ 为伯努利系数，它们可以由下面的递推公式得到：

$$B_0 = 1, B_p = \frac{-\sum_{i=0}^{p-1} C_{p+1}^i B_i}{p+1}.$$

为了使用迭合度定理，引入以下记号及算子：记 $X = C_T^{m-1}, Y = C_T$. 显然 X, Y 是两个Banach 空间. 定义算子 $L: D(L) \subset X \to Y, [Lx](t) = x^{(m)}(t)$，其中，$D(L) = \{x \mid x \in C^m(R, R), x(t+T) \equiv x(t)\}$. 显然，$\mathrm{Ker}(L) = R, \mathrm{Im}(L) = \{x \mid x \in Y, \int_0^T x(s)\mathrm{d}s = 0\}$. 因此，$L$ 是一个指标集为零的 Fredholm 算子. 再定义投影 P 和 Q 如下

$$P: x \to \mathrm{Ker}(L): x \mapsto Px = \frac{1}{T}\int_0^T x(s)\mathrm{d}s;\ Q: Y \to \frac{Y}{\mathrm{Im}(L)}: y \mapsto Qy = \frac{1}{T}\int_0^T y(s)\mathrm{d}s,$$

$L_P = L|_{D(L)\cap \mathrm{Ker}(P)}: D(L) \cap \mathrm{Ker}(P) \to \mathrm{Im}(L)$. 则 $L|_P$ 在 $\mathrm{Im}(L)$ 上存在连续的逆算子 L_P^{-1}，且定义为

$$(L_P^{-1} y)(t) = -\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i!} x^{(i)}(0) t^i + \frac{1}{(m-1)!}\int_0^T (t-s)^{m-1} y(s)\mathrm{d}s. \quad (11)$$

这里的 $x^{(0)}(i = 1, 2, \cdots, m-1)$ 由以下方程

$$\overline{A}\,\overline{X} = \overline{D} \quad (12)$$

定义，其中

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ c_{m-3} & c_{m-4} & c_{m-5} & \cdots & 1 & 0 \\ c_{m-2} & c_{m-3} & c_{m-3} & \cdots & c_1 & 1 \end{bmatrix},$$

$\overline{X} = (x^{(m-1)}(0), (x^{(m-2)}(0), \cdots, x''(0), x'(0))^T$, $\overline{D} = (d_1, d_2, \cdots, d_{m-2}, d_{m-1})^T$, $d_i = -\frac{1}{i!T}\int_0^T (T-s)^i y(s)\mathrm{d}s$, $i = 1, 2, \cdots, m-1$, $c_j = \frac{T^j}{(j+1)!}$, $j = 1, 2, \cdots, m-2$.

引理 3[7] 令 X 和 Y 是两个 Banach 空间，$L: D(L) \subset X \to Y$ 是一个指标集为零的Fredholm 算子，$\Omega \subset X$ 为有界开集，$N: \overline{\Omega} \to Y$ 在$\overline{\Omega}$上为L - 紧. 如果下列条件满足：

(1) 对任意的$\lambda \in (0, 1)$，方程$Lx \neq \lambda Nx$ 的解满足 $x \notin \partial\Omega$;

(2) 对任意的 $x \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}(L)$，$QNx \neq 0$;

(3) $\deg\{JQN, \Omega \cap \mathrm{Ker}(L), 0\} \neq 0$，其中 $J: \mathrm{Im}(Q) \to \mathrm{Ker}(L)$ 是一个同构，

则方程 $Lx = Nx$ 在 $\partial\Omega \cap \mathrm{Dom}(L)$ 内至少有一个解.

2 主要结果

定理 1 假设 $f_1(0) = 0, \int_0^T q(t)\mathrm{d}t = 0$，如果存在常数 $a \geqslant 0, d > 0$，使得

(1) 当 $|x| > d$ 时，$xg_1(x) > 0$，$|g_1(x)| > |q|_0$;

(2) $\lim_{|x| \to +\infty} \sup_{t \in [0,T]} \frac{|g_1(x)|}{|x|} \leqslant a$,

那么，当$aT^2 M_1 < 1$时，方程(4)至少存在一个 T - 周期解，进而方程(1)和(2)至少存在一个 T - 周期解. 其中M_1 的定义与引理 2 一致.

证明　考虑算子方程

$$Lx = \lambda Nx,\ \lambda \in (0, 1). \quad (13)$$

其中，$N: X \to Y, Nx = -f_1(x^{(m-1)}(t)) - g_1(\int_{-r}^0 x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)) + q(t)$. 由(11)式可知，$N$ 在 $\partial\Omega$上L - 紧，其中 Ω是X 的任一有界开集. 令 $x(t)$ 为方程(13)的任意一个 T - 周期解，那么 $x(t)$ 满足

$$x^{(m)}(t)+\lambda f_1(x^{(m-1)}(t))+\lambda g_1(\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)))=\lambda q(t). \quad (14)$$

假设 t_0 为点 $x^{(m-2)}(t)$ 在 $[0,T]$ 上的全局极大值点，那么由极值的第二充分条件有 $x^{(m-1)}(t_0)=0$, $x^{(m)}(t_0)\leqslant 0$. 由 $f_1=0$ 和(14)式，我们有

$$g_1(\int_{-r}^{0}x(t_0+s)\mathrm{d}\alpha(s))\geqslant q(t_0)\geqslant -|q|_0. \quad (15)$$

假设 t_1 为点 $x^{(m-2)}(t)$ 在 $[0,T]$ 上的全局极小值点，那么由极值的第二充分条件有 $x^{(m-1)}(t_1)=0$, $x^{(m)}(t_1)\geqslant 0$. 又由 $f_1=0$ 和(14)式，我们有

$$g_1(\int_{-r}^{0}x(t_1+s)\mathrm{d}\alpha(s))\leqslant q(t_1)\leqslant |q|_0. \quad (16)$$

考虑两种情形：

情形1. 如果 $g_1(\int_{-r}^{0}x(t_0+s)\mathrm{d}\alpha(s))>|q|_0$，那么由(16)式可知存在一点 $\eta\in[0,T]$ 使得 $g_1(\int_{-r}^{0}x(\eta+s)\mathrm{d}\alpha(s))=|q|_0$. 因此，由定理1的条件(2)我们有

$$|\int_{-r}^{0}x(\eta+s)\mathrm{d}\alpha(s)|\leqslant d. \quad (17)$$

情形2. 如果 $g_1(\int_{-r}^{0}x(t_0+s)\mathrm{d}\alpha(s))\leqslant|q|_0$，那么由(15)式可知 $|g_1(\int_{-r}^{0}x(t_0+s)\mathrm{d}\alpha(s))|\leqslant|q|_0$. 再结合定理1的条件(1)，就有

$$|\int_{-r}^{0}x(t_0+s)\mathrm{d}\alpha(s)|\leqslant d. \quad (18)$$

因此，无论是情形1还是情形2，我们总可以由(17)式和(18)式找到一点 $\xi\in[0,T]$，使得

$$|\int_{-r}^{0}x(\xi+s)\mathrm{d}\alpha(s)|\leqslant d.$$

由 Riemann-Stieltjes 积分的性质知，存在一个常数 $\zeta\in(-r,0)$，使得 $|x(\xi+\zeta)|\leqslant d$. 因为 $\xi+\zeta\in R$，所以一定存在正常数 k_0 使得 $\xi+\zeta=k_0+t^*$, $t^*\in[0,T]$，从而有 $|x(t^*)|\leqslant d$. 所以

$$|x(t)|\leqslant d+\int_{t^*}^{t}|x'(s)|\mathrm{d}s\leqslant d+\int_0^T|x'(s)|\mathrm{d}s,\ \forall t\in[0,T].$$

因此，由引理2知，存在与 x 和 λ 无关的常数 $M_1>0$，使得

$$|x|_0\leqslant d+TM_1\int_0^T|x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t. \quad (19)$$

再用 $x^{(m)}(t)$ 乘到方程(14)的两边，并且从0到 T 积分，有

$$\int_0^T|x^{(m)}(t)|^2\mathrm{d}t+\lambda\int_0^T x^{(m)}(t)g_1(\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s))\mathrm{d}t=\lambda\int_0^T x^{(m)}(t)q(t)\mathrm{d}t. \quad (20)$$

对 $\varepsilon=\frac{1-aT^2M_1}{2T^2M_1}>0$，由定理1的条件(2)以及有界变差函数的性质可知，存在一个与 x 和 λ 无关的常数 $\rho>d$，使得对 $\forall t\in R$ 有

$$|g_1(\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s))|\leqslant(a+\varepsilon)|\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)|\leqslant(a+\varepsilon)|x|_0,\ |\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)|>\rho. \quad (21)$$

取 $E_1=\{t\in[0,T]: |\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)|>\rho\}$, $E_2=\{t\in[0,T]: |\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)|\leqslant\rho\}$. 由(19)~(21)式和 hölder 不等式，有

$$\int_0^T|x^{(m)}(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant\int_0^T|x^{(m)}(t)||g_1(\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s))|\mathrm{d}t+\int_0^T|x^{(m)}(t)||q(t)|\mathrm{d}t\leqslant(\int_{E_1}+\int_{E_2})|x^{(m)}(t)||g_1(\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s))|\mathrm{d}t+|q|_0\int_0^T|x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t\leqslant[(a+\varepsilon)d+g_{1\rho}+|q|_0]\int_0^T|x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t+(a+\varepsilon)TM_1\cdot(\int_0^T|x^{(m)}(t)\mathrm{d}t|)^2\leqslant[(a+\varepsilon)d+g_{1\rho}+|q|_0]\sqrt{T}\cdot(\int_0^T|x^{(m)}(t)|^2\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}+(a+\varepsilon)T^2M_1\int_0^T|x^{(m)}(t)|^2\mathrm{d}t. \quad (22)$$

其中 $g_{1\rho}=\max\limits_{t\in E_2}|g_1(\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s))|$.

因为 $\varepsilon=\frac{1-aT^2M_1}{2T^2M_1}>0$，所以 $\frac{1-aT^2M_1}{2}>0$. 因此，由(22)式我们有

$$\frac{1-aT^2M_1}{2}\int_0^T|x^{(m)}(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant[\frac{(1+aT^2M_1)d}{2T^2M_1}+g_{1\rho}+|q|_0]\sqrt{T}\cdot(\int_0^T|x^{(m)}(t)|^2\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}.$$

由于 $\frac{1-aT^2M_1}{2}>0$，因此存在一个与 x 和 λ 无关的常数 $k_0>0$，使得

$$\int_0^T|x^{(m)}(t)|^2\mathrm{d}t<k_0.$$

由(8)式可知，存在与 x 和 λ 无关的常数 $M_i>0$，使得

$$|x^{(i)}(t)|_0<M_i\sqrt{Tk_0}:=\omega_i,\ i=1,2,\cdots,m-1,$$

$$|x(t)|<d+TM_1\sqrt{Tk_0}:=\omega_0.$$

记 $\omega = \max\{\omega_0+1, \omega_1+1, \cdots, \omega_{m-1}+1\}$, $\Omega = \{x(t) \in X \mid |x^{(i)}|_0 < \omega, i = 0, 1, 2, \cdots, m-1\}$. 那么 $\Omega \subset X$ 为一有界开集. 因此, $Lx \neq \lambda Nx$, 对 $\forall c \in \mathrm{Dom}(L) \cap \partial\Omega$ 都成立. 从而引理 3 的条件(1)满足. 又对任意 $x \in \mathrm{Ker}(L) \cap \partial\Omega$, 有 $|x| = \Omega > d$ 是一个常数, 且 $g_1(x) > |q|_0$. 因此

$$QNx = -\frac{1}{T}\int_0^T g_1\left(\int_{-r}^0 x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)\right)\mathrm{d}t \neq 0.$$

如果我们令

$$H(x, \mu) = -\mu x - \frac{1-\mu}{T}\int_0^T g_1\left(\int_{-r}^0 x(t+s)\mathrm{d}\alpha(s)\right)\mathrm{d}t, \ (x, \mu) \in \overline{\Omega} \times [0, 1],$$

那么

$$H(x, \mu) \neq 0, \ \forall (x, \mu) \in (\partial\Omega \cap \mathrm{Ker}(L)) \times [0, 1].$$

因此

$$\deg\{QN, \Omega \cap \mathrm{Ker}(L), 0\} = \deg\{H(x, 0), \Omega \cap \mathrm{Ker}(L), 0\} = \deg\{H(x, 1), \Omega \cap \mathrm{Ker}(L), 0\} \neq 0.$$

从而引理 3 的条件(2)和(3)满足. 运用引理 3, 我们得出方程(13)在 $D(L) \cap \overline{\Omega}$ 中至少存在一个 T-周期解 $x(t)$, 即方程(4)至少存在一个 T-周期解 $x(t)$, 再运用引理 1 可以证得方程(1)和(2)至少存在一个 T-周期解 $y(t)$.

类似地, 我们又得到下面结论.

定理 2 假设 $f_1(0) = 0$, $\int_0^T q(t)\mathrm{d}t = 0$, 如果存在常数 $a \geqslant 0$, $d > 0$, 使得

(1) $xg_1(x) < 0$, $|g_1(x)| > |q|_0$, $\forall |x| > d$;

(2) $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \sup\limits_{t \in [0, T]} \frac{|g_1(x)|}{|x|} \leqslant a$.

那么, 当 $aT^2 M_1 < 1$ 时, 方程(4)至少存在一个 T-周期解, 进而方程(1)和(2)至少存在一个 T-周期解, 其中 M_1 与引理 2 中的定义一致.

参考文献:

[1] Zhang S P. Positive periodic solution to a class of nonlinear periodic differential equation with impulses and delay [J]. Ann of Diff Eqs, 2007, 23(1): 104-112.

[2] 燕居让. 高阶非线性脉冲泛函微分方程周期解的存在性[J]. 山西大学学报: 自然科学版, 2003, 26(1): 1-4.

[3] 王琳琳. 一类高阶脉冲时滞微分方程的周期解[J]. 兰州大学学报: 自然科学版, 2006, 42(4): 114-118.

[4] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations[M]. Berlin: Lecture Notes in Math, 1977.

[5] Meng X Z, Chen L S, Li Q X. The dynamics of an impulsive delay predator-prey model with variable coeffcients [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 198: 361-374.

[6] Li X J, Liu M. On the existence of periodic solutions for a kind of high-order functional differential equation with distributed delay[J]. 数学研究, 2008, 41(1): 13-22.

[7] Bainov D, Simeonov P A. Impulsive differential equations: periodic solutions and applications[M]. New York: Longman Scientific Technical, 1993.

(责任编辑: 尹 闯)

(上接第 186 页 Continue from page 186)

度 (G, s)-传递图. 由引理 1.2 和引理 1.9 得 $2 \leqslant s \leqslant 3$. 易知 (T, Td, Td^2, Td^3) 是 Γ 中的一个 3-圈, 则 Γ 的围长 $g(\Gamma) = 3$. 由引理 1.10 有 $s \leqslant \frac{1}{2}(3+2) = 2.5$, 只能 $s = 2$, 所以 Γ 是连通 3 度 $(G, 2)$-传递图.

易得 $G = \langle T, d \rangle$, $|V(\Gamma)| = |G : T| = |660 : 6| = 110$ 及 $\mathrm{Val}(\Gamma) = |TdT : T| = |T : T \cap T^d| = 3$, 于是 G 的 Sabidussi 陪集图 $\Gamma := \mathrm{Sab}(G, T, d)$ 是连通 3 度 $(G, 2)$-传递图, 并且 Γ 还是 G 的一个级为 110 的最小级 GR.

致谢:

感谢审稿人提出的宝贵修改意见.

参考文献:

[1] Xu S J. On graphs of small valencies admitting transitive action of simple groups[D]. Beijing: Peking University, 2003: 53-58.

[2] 徐明耀. 有限群导引: 下册[M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 1999: 321-370.

[3] Biggs N. Algebraic graph theory[M]. New York: Cambridge University Press, 1964.

(责任编辑: 尹 闯)