DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2011.03.026
广西科学 Guangxi Sciences 2011,18(3):197~200

关于 $fP^n[f^{(k)}]-c$ 的零点*

On Zero of $fP^n[f^{(k)}]-c$

张 毅[1],熊维玲[2]
ZHANG Yi[1], XIONG Wei-ling[2]

(1.柳州城市职业学院,广西柳州 545002;2.广西工学院信息与计算科学系,广西柳州 545006)
(1.Liuzhou City Vocational College, Liuzhou, Guangxi, 545002, China; 2.Department of Information and Computing Science, Guangxi Institute of Technology, Liuzhou, Guangxi, 545006, China)

摘要:讨论 $fP^n[f^{(k)}]$ 的值分布问题,其中 f 为超越亚纯函数,证明了在适当条件下 $fP^n[f^{(k)}]$ 取任意非零有穷复数无穷多次.

关键词:亚纯函数 微分多项式 值分布
中图法分类号:O174.52 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2011)03-0197-04

Abstract: Let f is a transcendental meromorphic function, the value distribution of $fP^n[f^{(k)}]$ is discussed. It is proved that $fp^n[f^{(k)}]$ takes any finite non-zero complex number infinity under appropriate conditions.

Key words: meromorphic function, differential polynomials, value distribution

1959 年,W.K.Hayman[1] 提出著名的 Hayman 问题:设 f 是平面上的超越亚纯函数,则 f^nf'($n\geqslant 1$ 为正整数)取除零以外的任意复数无穷多次.历经 Hayman.E.Mues[2] 和 W.Bergweiler 等[3] 人的努力,该问题最终被陈怀惠等[4] 彻底解决.期间,很多学者对 Hayman 问题进行了推广[5~10],其中文献[5]给出了 Hayman 问题的一种推广形式,得到结果:设 f 是非常数亚纯函数,$L[f]=f^{(k)}+a_1f^{(k-1)}+\cdots+a_kf$,其中 $a_j(j=1,2,\cdots,k)$ 为 f 的小函数,那么当 $n\geqslant 2$ 时,对任意 $c\neq 0,\infty$,设 $F=f^nL[f]-c$,有

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N(r,\frac{1}{F})}{T(r,F)}>0.$$

1998 年,文献[6]则作了另一种形式的推广,得到定理:设 f 是平面上的超越亚纯函数,n,k 是两个正整数.则 $n\geqslant 2$ 时,$f(f^{(k)})^n-a(z)$ 有无穷多个零点.这里 $a(z)$ 是 f 的一个小函数.

2006 年,文献[7]对文献[5]的结果作了进一步的推广,得到定理:设 f 是超越亚纯函数,$a_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为亚纯函数,并且是相对于 f 的小函数,$a_m\neq 0$,设

$$P[f']=a_m(f')^m+a_{m-1}(f')^{m-1}+\cdots+a_1f',$$

则当 $n\geqslant 2,m\geqslant 2$ 时,$fP^n[f']$ 取任意非零有穷复数无穷多次.

本文继续讨论 $fP^n[f^{(k)}]$ 的值分布问题,所得结果推广了文献[7]的结论.

1 相关引理

我们使用亚纯函数理论的标准术语及记号,如 $T(r,f),m(r,f),N(r,f),\overline{N}(r,f),S(r,f),\cdots$.

引理 1[5] 设 f 是亚纯函数,且 $f^{(k)}\not\equiv 0$,则 $N(r,\frac{1}{f^{(k)}})\leqslant N(r,\frac{1}{f})+k\overline{N}(r,f)+S(r,f)$.

引理 2 设 f 是超越亚纯函数,$a_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为 f 的小函数,$a_m\neq 0$.记

$$P[f^{(k)}]=a_m(f^{(k)})^m+a_{m-1}(f^{(k)})^{m-1}+\cdots+a_1f^{(k)},F=fP^n[f^{(k)}]-1,\alpha=\frac{\left(P[f^{(k)}]\right)'}{P[f^{(k)}]},\beta=\frac{f''}{f'}.$$

若 F 仅有有限个零点且 $nm>1$,则 $n\alpha^2-\alpha'+\alpha\beta\not\equiv 0$.

证明 若不然,设 $n\alpha^2-\alpha'+\alpha\beta\equiv 0$.

当 $\alpha\equiv 0$ 时,我们有 $P[f^{(k)}]$ 为常数函数,从而有

收稿日期:2011-01-07
作者简介:张 毅(1959-),男,副教授,主要从事复分析研究。
*广西自然科学基金项目(桂科自 0728041)资助。

$T(r,f^{(k)})=S(r,f^{(k)})$，因此 f 为多项式，这与 f 为超越亚纯条件相矛盾.

当 $\alpha\not\equiv 0$ 时，由于 $n\alpha^2-\alpha'+\alpha\beta\equiv 0$，所以 $n\alpha+\beta=\frac{\alpha'}{\alpha}$，两边积分并注意到 α,β 的定义得到 $P^n[f^{(k)}]f'=A\alpha$，其中 A 为非零常数. 因此

$$P^{n+1}[f^{(k)}]f'=A\left(P[f^{(k)}]\right)'. \qquad (1)$$

再分别对(1)式和 $P^n[f^{(k)}]f'=A\alpha$ 进行讨论.

(I) 由(1)式可得到下面3个结论:

(i) f 的极点一定是某个 a_j 的极点或零点，因此 $N(r,f)=S(r,f)$，所以

$$N(r,f)=N(r,P[f^{(k)}])+S(r,f)=N(r,(P[f^{(k)}])')+S(r,f)=S(r,f). \qquad (2)$$

(ii) $P[f^{(k)}]$ 的零点均为 f 的极点，我们得到

$$N(r,\frac{1}{P[f^{(k)}]})\leqslant N(r,f)=S(r,f). \qquad (3)$$

(iii) $f=-\frac{A}{n}P^{-n}[f^{(k)}]+c$，其中 c 为常数. 因此

$$T(r,f)=nT(r,P[f^{(k)}])+S(r,f)=nmT(r,f^{(k)})+S(r,f). \qquad (4)$$

结合(1)式，(2)式，(3)式和(4)式，我们得到 $N(r,\alpha)=S(r,f)=S(r,P[f^{(k)}])$，而 $m(r,\alpha)=S(r,P[f^{(k)}])$，所以

$$T(r,\alpha)=S(r,f). \qquad (5)$$

(II) 由 $P^n[f^{(k)}]f'=A\alpha$ 并结合(5)式可得下面2个结论:

(i) f' 的零点均为 α 的零点或 $P^n[f^{(k)}]$ 的极点，得到

$$N(r,\frac{1}{f'})\leqslant N(r,P^n[f^{(k)}])+S(r,f)=S(r,f). \qquad (6)$$

(ii) 显然有

$$P^n[f^{(k)}]-A\frac{\alpha}{f'}\equiv 0. \qquad (7)$$

所以得到

$$nmT(r,f^{(k)})=T(r,f')+S(r,f). \qquad (8)$$

结合 $n\alpha^2-\alpha'+\alpha\beta\equiv 0$ 和(5)式，得到 $T(r,\beta)=S(r,f)$. 由 β 的定义有 $f''=\beta f'$，因此 $f^{(k)}=\beta_k f'$，其中 $T(r,\beta_k)=S(r,f)$，所以 $T(r,f^{(k)})=T(r,f')+S(r,f)$. 结合(8)式有 $nm=1$，矛盾.

引理3 $f,P[f^{(k)}],F$ 和 α,β 如引理2所设. 令 $G=\frac{F'}{P^n[f^{(k)}]}$. 若 F 仅有有限个零点，则

$$\overline{N}(r,\frac{1}{f})\leqslant\frac{1}{n}N(r,\frac{1}{F'})+\overline{N}(r,G\beta+n\alpha G-G'=0,f=0)+S(r,f),$$

其中 $\overline{N}(r,G\beta+n\alpha G-G'=0,f=0)$ 为 $G\beta+n\alpha G-G'$ 与 f 的公共零点的精简计数函数.

证明　由引理2，有 $n\alpha^2-\alpha'+\alpha\beta\not\equiv 0$，且

$$f=\frac{1}{n}\times\frac{G\beta+n\alpha G-G'}{n\alpha^2-\alpha'+\alpha\beta}. \qquad (9)$$

记 $n_1=n(r,f=0,P[f^{(k)}]=0)$，$n_2=n(r,f=0,P[f^{(k)}]\neq 0$，存在 j 使得 $a_j=0$ 或 $a_j=$)，$n_3=n(r,f=0,P[f^{(k)}]=0$，对每个 j 使得 $a_j=0$ 和)，$N_1,N_2,N_3(\overline{N}_1,\overline{N}_2,\overline{N}_3)$ 分别为其对应的计数函数(精简计数函数)，则 $\overline{N}(r,\frac{1}{f})=\overline{N}_1+\overline{N}_2+\overline{N}_3$.

显然 $N_2=S(r,f)$.

对于 N_1：设 $f(z_0)=0$ 且 $P[f^{(k)}(z_0)]=0$，因为 $F'=P^{n-1}[f^{(k)}][f'P[f^{(k)}]+nf(P[f^{(k)}])']$，所以 $F'(z_0)=0$，且 z_0 至少是 F' 的 n 级零点. 因此 $\overline{N}_1\leqslant\frac{1}{n}N(r,\frac{1}{F'})$.

对于 N_3：设 $f(z_1)=0$，且 $P[f^{(k)}(z_1)]\neq 0$，及 $a_j(z_1)\neq 0$，　，则 z_1 不是 α 的极点，也不是 f 和 a_j 的极点.

若 $f'(z_1)=0$，则 z_1 不是 β 的极点. 由(9)式，并注意 z_1 为 f 的零点，得到 z_1 是 $G\beta+n\alpha G-G'$ 的零点.

若 $f'(z_1)=0$，则 z_1 至少是 f 的2级零点且为 β 的一级极点. 由(9)式，得到 z_1 是 $G\beta+n\alpha G-G'$ 的零点. 所以 $\overline{N}_3\leqslant\overline{N}(r,G\beta+n\alpha G-G'=0,f=0)$.

由上面对 N_1,N_2,N_3 的讨论，我们得到

$$\overline{N}(r,\frac{1}{f})\leqslant\frac{1}{n}N(r,\frac{1}{F'})+\overline{N}(r,G\beta+n\alpha G-G'=0,f=0)+S(r,f).$$

引理4 $f,P[f^{(k)}],\alpha,\beta,F,G$ 如引理3所设. 则

$$N(r,\frac{1}{G})\leqslant N(r,\frac{1}{F'})-(n-1)N(r,\frac{1}{P[f^{(k)}]})+S(r,f).$$

证明　若 $G(z_0)=0$，$a_j(z_1)\neq 0$，　. 由 G 的定义得到 z_0 不是 f 的极点，从而不是 $P[f^{(k)}]$ 的极点，因此 $P[f^{(k)}]G(z_0)=0$，所以

$$N(r,\frac{1}{G})\leqslant N(r,\frac{1}{P[f^{(k)}]G})+S(r,f). \qquad (10)$$

一方面，由 G 的定义可知，对于 $P[f^{(k)}]$ 的任一零点当它不是 a_j 的极点和零点时至多是 G 的一个简单极点，从而不是 $GP[f^{(k)}]$ 的极点.

另一方面，设 z_1 为 f 的 q 级极点，但不是 $a_j(j=1,2,\cdots,m)$ 的极点，则 z_1 是 $P[f^{(k)}]$ 的 $m(q+k)$ 级极点，是 G 的 $q+1$ 级极点. 从而不是 $GP[f^{(k)}]$ 的零点. 而 $P[f^{(k)}]$ 的极点必为 f 的极点或某个为 a_j 的极点

或零点.

注意到 $F' = P^{n-1}[f^{(k)}]\left(GP[f^{(k)}]\right)$，结合以上两方面的讨论，我们得到

$$(n-1)N(r,\frac{1}{P[f^{(k)}]})+N(r,\frac{1}{GP[f^{(k)}]})=N(r,\frac{1}{F'})+S(r,f).$$

再结合(10)式，有

$$N(r,\frac{1}{G})\leqslant N(r,\frac{1}{F'})-(n-1)N(r,\frac{1}{P[f^{(k)}]})+S(r,f).$$

引理5[11]　设 $Q_1[f]$ 和 $Q_2[f]$ 是 f 的两个拟微分多项式，满足 $f^nQ_1[f]=Q_2[f]$，则当 $n\geqslant r_{Q_2}$ 时，$m(r,Q_1[f])=S(r,f)$，其中 r_{Q_2} 为 $Q_2[f]$ 的次数.

2　主要结论

定理1　设 f 是超越亚纯函数，$a_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为 f 的小函数，$a_m\neq 0$. 记

$$P[f^{(k)}]=a_m(f^{(k)})^m+a_{m-1}(f^{(k)})^{m-1}+\cdots+a_1f^{(k)},$$

则当 $n\geqslant 2$，及 $\varliminf\limits_{r\to\infty}\frac{T(r,f^{(k)})}{T(r,f')}\left[nm-\frac{1+3n}{n(1+k)}\right]>1$ 时，$fP^n[f^{(k)}]$ 取任意非零有穷复数无穷多次.

证明　令 F,α,β 如引理2所设，G 如引理3所设. 不失一般性，不妨设 $c=1$. 若不然，设 F 仅有有限个零点.

因为 $\frac{F'}{F}F=F'$，结合 F 的定义有 $\frac{F'}{F}(fP^n[f^{(k)}-1)=F'$，于是 $\frac{F'}{F}fP^n[f^{(k)}]-F'=\frac{F'}{F}$. 由 G 的定义，有 $F'=GP^n[f^{(k)}]$. 结合 α 的定义，有 $G=f'+nf\alpha$. 于是

$$\frac{F'}{F}fP^n[f^{(k)}]-P^n[f^{(k)}](f'+nf\alpha)=\frac{F'}{F}.$$

所以

$$fP^n[f^{(k)}]H=\frac{F'}{F},\tag{11}$$

其中 $H=\frac{F'}{F}-\frac{f'}{f}-n\alpha$.

显然 $m(r,H)=S(r,f)$.

如果 $H\equiv 0$，由(11)式有 $F'\equiv 0$，于是 F 为常数函数，从而 $fP^n[f^{(k)}]$ 为常数函数，设 $fP^n[f^{(k)}]=A$.

如果 $A=0$，我们有 $P^n[f^{(k)}]\equiv 0$ 为常数，这与已知条件矛盾.

如果 $A\neq 0$，由引理5有 $m(r,P^n[f^{(k)}])=S(r,f^{(k)})$. 由 $fP^n[f^{(k)}]=A$ 还得到 $N(r,P^n[f^{(k)}])=S(r,f^{(k)})$ 和 $T(r,P^n[f^{(k)}])=T(r,f)+O(1)$，因此 $T(r,P^n[f^{(k)}])=S(r,P^n[f^{(k)}])$. 从而得到 $P^n[f^{(k)}]$ 为常数函数，进而 f 为常数函数，这与 f 为超越亚纯相矛盾.

由(11)式知，当 f 的极点不是 $a_j(j=1,2,\cdots,m)$ 的零点与极点时均不是 H 的极点，而是 H 的零点和 $P[f^{(k)}]$ 的极点（否则(7)式左边极点的级数至少是2，而右边的极点的级数为1，矛盾）. 所以

$$N(r,\frac{1}{H})\geqslant N(r,f)+n(r,P[f^{(k)}])-\overline{N}(r,f)+S(r,f)\geqslant nN(r,P[f^{(k)}])+S(r,f).\tag{12}$$

再由 H 的极点来自 $F,f,P[f^{(k)}]$ 的零点及 $a_j(j=1,2,\cdots,m)$ 的零点与极点，且均为一级极点. 于是

$$N(r,H)\leqslant\overline{N}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,\frac{1}{P[f^{(k)}]})+S(r,f).\tag{13}$$

由(11)式，我们还得到 $P^n[f^{(k)}]=\frac{F'}{FfH}$，所以

$$m(r,P[f^{(k)}])\leqslant m(r,\frac{1}{f})+m(r,\frac{1}{H})+m(r,\frac{F'}{F})+S(r,f)\leqslant m(r,\frac{1}{f})+N(r,H)-N(r,\frac{1}{H})+m(r,H)+S(r,f).\tag{14}$$

显然 $G\not\equiv 0$，设 $F_1=\beta+n\alpha-\frac{G'}{G}$，则 F_1 的极点来自 $G,P[f^{(k)}],f'$ 的零点及 f 与 $a_j(j=1,2,\cdots,m)$ 的极点，且 F_1 的每一个极点都是一级的，而 f 的重零点是 G 的零点. 所以

$$N(r,G\beta+n\alpha G-G'=0,f=0)=N(r,\frac{1}{GF_1})+N(r,\frac{1}{F_1})+S(r,f)\leqslant N(r,\frac{1}{G})+T(r,\frac{1}{F_1})-m(r,\frac{1}{F_1})+S(r,f)\leqslant N(r,\frac{1}{G})+T(r,F_1)-m(r,\frac{1}{F_1})+S(r,f)\leqslant N(r,\frac{1}{G})+N(r,F_1)+m(r,F_1)+S(r,f)\leqslant N(r,\frac{1}{G})+N(r,F_1)+S(r,f)\leqslant N(r,\frac{1}{G})+N(r,\frac{1}{G})+\overline{N}(r,\frac{1}{P[f^{(k)}]})+\overline{N}(r,\frac{1}{f'})+\overline{N}(r,f)+S(r,f)=2N(r,\frac{1}{G})+\overline{N}(r,\frac{1}{P[f^{(k)}]})+\overline{N}(r,\frac{1}{f'})+\overline{N}(r,f)+S(r,f).\tag{15}$$

由引理3，有

$$\overline{N}(r,\frac{1}{f})\leqslant\frac{1}{n}N(r,\frac{1}{F'})+\overline{N}(r,G\beta+n\alpha G-G'=0,f=0)+S(r,f).\tag{16}$$

由引理4，有

$$N(r,\frac{1}{G})\leqslant N(r,\frac{1}{F'})-(n-1)N(r,\frac{1}{P[f^{(k)}]})+$$

$S(r,f)$. (17)

结合(12)~(17)式及引理1,我们得到

$$nm(r,P[f^{(k)}])\leqslant m(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,\frac{1}{F})+\frac{1+2n}{n}N(r,\frac{1}{F})+\overline{N}(r,f)+\overline{N}(r,\frac{1}{f'})-nN(r,P[f^{(k)}])+S(r,f)\leqslant m(r,\frac{1}{f})+\frac{1+3n}{n}N(r,\frac{1}{F})+\frac{1+3n}{n}\overline{N}(r,f)+\overline{N}(r,\frac{1}{f'})-nN(r,P[f^{(k)}])+S(r,f).$$

所以

$$nT(r,P[f^{(k)}])\leqslant T(r,\frac{1}{f'})+\frac{1+3n}{n}N(r,\frac{1}{F})+\frac{1+3n}{n}\overline{N}(r,f)+S(r,f)\leqslant T(r,f')+\frac{1+3n}{n}N(r,\frac{1}{F})+\frac{1+3n}{n}\overline{N}(r,f)+S(r,f). \quad (18)$$

又因为 f 的 t 级极点,当它不是 $a_j(j=1,2,\cdots,m)$ 的零点和极点时,即为 $P[f^{(k)}]$ 的 $(t+k)m$ 级极点,所以 $\overline{N}(r,f)\leqslant\frac{1}{(t+k)m}N(r,P[f^{(k)}])+S(r,f)$,代入(18)式,有

$$nT(r,P[f^{(k)}])\leqslant T(r,f')+\frac{1+3n}{n(1+k)m}N(r,P[f^{(k)}])+\frac{1+3n}{n}N(r,\frac{1}{F})+S(r,f)\leqslant T(r,f')+\frac{1+3n}{n(1+k)m}T(r,P[f^{(k)}])+\frac{1+3n}{n}N(r,\frac{1}{F})+S(r,f),$$

因此

$$m\left(n-\frac{1+3n}{n(1+k)m}\right)T(r,P[f^{(k)}])\leqslant T(r,f')+\frac{1+3n}{n}N(r,\frac{1}{F})+S(r,f).$$

因为 F 仅有有限个零点,则 $m\left(n-\frac{1+3n}{n(1+k)m}\right)T(r,P[f^{(k)}])\leqslant T(r,f')+S(r,f)$. 所以

$$\varliminf_{r\to}\frac{T(r,f^{(k)})}{T(r,f')}\left[nm-\frac{1+3n}{n(1+k)}\right]\leqslant 1,$$

这与已知条件相矛盾.

例 设 $P[f^{(k)}]=(f^{(k)})^m$, $f=e^z$,则 $fP[f^{(k)}]=e^{(m+1)z}$. 由于 $fP[f^{(k)}]=e^{(m+1)z}$ 为整函数且取不到零值,因此取非零值无穷多次.

参考文献:

[1] Hayman W K. Picard values of meromorphic function and their derivatives[J]. Ann of Math, 1959, 70: 9-42.

[2] Mues E. Uber ein problem Von Hyaman [J]. Math Z, 1979, 164: 239-259.

[3] Nereiler W, Eremenko A. On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order[J]. Revista Mathematic Iber Oamericana, 1995, 11: 2.

[4] 陈怀惠, 方明亮. 关于 f^nf' 的值分布[J]. 中国科学: A辑, 1995, 25(2): 121-127.

[5] 张占亮, 李伟. 两类微分多项式的 Picard 例外值[J]. 数学学报, 1994, 37(6): 828-835.

[6] 张中发, 宋国栋. 关于 $f\left(f^{(k)}\right)^n$ 的零点[J]. 数学年刊, 1998, 19A(2): 275-282.

[7] 李伟. 关于 $fP^n[f']$ 的零点[J]. 南开大学学报, 2006, 39(2): 29-34.

[8] 张毅, 熊维玲. 关于 $f-P^n[f']$ 的值分布[J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2009, 34(6): 1-5.

[9] 张毅. 关于 $f-P^n[f^{(k)}]$ 的值分布[J]. 福建师范大学学报: 自然科学版, 2010, 26(4): 15-20.

[10] 桑汉英, 卢谦. 关于 $\varphi(z)f(z)f^{(k)}(z)$ 的值分布[J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2003, 28(4): 536-539.

[11] Clunie J. On integral and meromorphic functions[J]. J London Math Soc, 1962, 37: 17-27.

(责任编辑: 尹 闯)

科学家发现癌症肿瘤抗药机理

现在治疗癌症的主要方法之一是化学疗法,但是相关药物对不同的癌症患者效果差异也很大。对此,美国科学家分别从研究紫杉醇等抗癌药物的效果入手和从研究俗称"血癌"的白血病入手,研究癌症肿瘤抗药机理。紫杉醇会使肿瘤细胞无法分裂并最终死亡,这种药物通过降低一种名为 MCL1 的蛋白质含量而起作用。研究人员发现,如果患者 FBW7 基因发生变异或者缺失,这种蛋白质的含量就会居高不下,紫杉醇也就无法起到应有的抗癌作用。研究白血病患者的研究人员也同样发现,携带有已变异的 FBW7 基因的患者体内癌细胞往往更难被消除。这说明 FBW7 的基因发生变异可能是癌症肿瘤具有抗药性的原因。这个 FBW7 基因的变异所导致的抗药性可能出现在多种癌症中,如乳腺癌和肠癌等,但是仍然可以通过其他一些方法来应对这种抗药性。美国科学家的这一发现将有助医生对不同类型的癌症患者对症下药。因此,在癌症治疗中可能需要先进行基因检测,根据患者携带基因的不同,来确定使用哪些药物才会起到更好的治疗效果。

(据科学网)