DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2011.03.029
广西科学 Guangxi Sciences 2011,18(3):211~213

分数次 Black-Scholes 模型下美式期权定价的一种二次近似方法*

A Quadratic Approximation Method for American Option Pricing under the Fractional Black-Scholes Model

林汉燕[1],邓国和[2]
LIN Han-yan[1],DENG Guo-he[2]

(1.桂林航天工业高等专科学校计算机系,广西桂林 541004;2.广西师范大学数学学院,广西桂林 541004)
(1.Department of Computer Science,Guilin College of Aerospace Technology,Guilin,Guangxi,541004,China;2.School of Mathematics,Guangxi Normal University,Guilin,Guangxi,541004,China)

摘要:在分数次 Black-Scholes 模型下,用二次近似定价法推导出支付红利的美式看跌期权价格的近似解析式,然后进行数值计算,并与用显式差分法计算的结果作对比.二次近似定价法可行,但是还有待改进.

关键词:美式期权定价 二次近似 分数次 Black-Scholes 模型
中图法分类号:O241.82 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2011)03-0211-03

Abstract: With the fractional Black-Scholes model, the approximated price formula for an American put option are derived by the quadratic approximation, and then their numerical solutions compared with that of the finite difference method. The results show that the quadratic approximation is feasible but needed to be improved.

Key words: American option pricing, quadratic approximation, fractional Black-Scholes model

美式期权定价是金融衍生产品定价中最困难的问题之一,因为它对应一个偏微分方程的自由边界问题,很难得到显式解析式,所以数值近似方法很重要.二次近似法是美式期权定价的一种近似方法,首先应用于 Black-Scholes 模型下无红利支付股票的期权定价[1],后来 Barone-Adesi G.和 Whaley R.E[2] 将这种方法应用于商品期货的定价.二次近似定价法的特点是方法简单,计算简便,可以获得期权价格的近似解析解,并且计算到期日较短的美式期权的价格准确性很高,有利于风险管理,但是计算到期日较长的美式期权的价格误差较大。很多学者对它进行了研究和改进,如 Woon Kwong Wong[3] 等,吴传生等[4].他们研究的成果都是建立在经典 Black-Scholes 模型基础上,即假设股票价格的波动相互独立,遵循几何布朗运动,其对数收益率服从正态分布.由于 Black-Scholes 模型的假设过于严格,导致在实际应用中误差较大,并且股票市场的大量研究已表明,股价收益率并不符合对数正态分布,而且存在长期相依性,所以经典 Black-Scholes 模型不能很好刻画这些性质.分数次 Black-Scholes 模型[5] 由于具有自相似性和长期相依性,在刻画股价运动规律时更符合股价运动的特征,所以受到很多学者的关注.目前在分数次 Black-Scholes 模型下,有关期权定价的研究主要集中在欧式期权,如刘韶跃等[6],而美式期权定价方面的成果[7~9] 较少.本文在分数次 Black-Scholes 模型下,以支付红利的美式看跌期权为例,用二次近似法推导美式期权价格的近似解析式.我们仅讨论 $1/2 \leqslant H < 1$ 的情形.

1 分数次 Black-Scholes 模型

假定金融市场存在两种资产供投资者自由选择,

收稿日期:2010-12-27
作者简介:林汉燕(1973-),女,讲师,主要从事金融工程研究。
*广西自然科学基金项目(桂科自 0991091),广西教育厅立项项目(201010LX587)资助。

资产交易的时间和额度连续,市场不存在交易费用和税收,交易可以买空卖空,存款和借款的利率相同,交易时间为 $[0, T]$.

设第一种资产为连续支付红利的风险资产(如股价),其价格 $S(t)$ 遵循分数次布朗运动:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (\mu(t) - q(t))dt + \sigma \diamond dB_H(t). \quad (1.1)$$

第二种资产为无风险证券(如债券或银行账户),其价格 $A(t)$ 满足

$$dA(t) = r(t)A(t)\, dt, \quad (1.2)$$

其中 $\mu(t)$ 为股价期望回报率, $q(t)$ 为红利率, $r(t)$ 为无风险利率,它们都是时间 t 的函数, $\sigma \neq 0$ 表示股价瞬时波动率(常数), $B_H(t)$ 表示分数次布朗运动, "$\diamond$"表示 Wick 积分.模型(1.1),(1.2)称为分数次 Black-Scholes 模型,且为无套利的完全市场模型[10] .

文献[7] 证明了分数次 Black-Scholes 模型下衍生证券任意未定权益 $V(S,t)$ 满足方程:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\sigma^2 S^2 t^{2H-1} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r(t) - q(t))S \frac{\partial V}{\partial S} - r(t)V = 0. \quad (1.3)$$

特别地,当 $H = 1/2$ 时,(1.3)式就是 Black-Scholes 偏微分方程.对于到期日为 T,执行价格为 K 的美式看跌期权,其价格函数 $P(S,t)$ 满足自由边界模型:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + H\sigma^2 t^{2H-1} S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + (r-q)S \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0,$$

$$(S, t) \in \Sigma_1, \quad (1.4)$$

且满足边界条件

$$P(S^*, t) = K - S^*, \quad (1.5)$$

$$P(S, T) = (K - S(T))^+, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial P(S^*, t)}{\partial S} = -1, \quad (1.7)$$

其中 S^* 表示最佳实施边界, Σ_1 表示继续持有区域.

2 美式期权定价的二次近似方法

定理 执行价格为 K,到期日为 T,红利率为 q,波动率为 $\sigma \neq 0$,无风险利率 $r > 0$(其中 q、r、σ 均为常数)的美式看跌期权在 $t \in [0, T]$ 时价格为:

$$\begin{cases} P(S,t) \approx p(S,t) + \dfrac{S^*}{\lambda_1}(e^{-q(T-t)} \circ \\ \qquad N(-\overline{d_1}(S^*)) - 1)\left(\dfrac{S}{S^*}\right)^{\lambda_1}, S \geqslant S^*, \\ P(S,t) = K - S, S < S^*. \end{cases}$$

其中 S^* 为最佳实施边界, S^* 满足 $K - S^* = p(S^*, t) + \dfrac{S^*}{\lambda_1}(e^{-q(T-t)} N(-\overline{d_1}(S^*)) - 1)$, $P(S,t)$, $p(S,t)$ 分别为 t 时刻美式和相应欧式看跌期权的价格.

$$\overline{d_1}(x) = \frac{\ln \frac{x}{K} + (r-q)(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} = \overline{d_2}(x) + \sigma\sqrt{T^{2H} - t^{2H}},$$

$$\lambda_1 = -\frac{k_2 - t^{2H-1} + \sqrt{(k_2 - t^{2H-1})^2 + \frac{4k_1 t^{2H-1}}{h}}}{2t^{2H-1}},$$

$$k_1 = \frac{r}{H\sigma^2}, k_2 = \frac{r-q}{H\sigma^2},$$

$$h = h(t) = 1 - e^{-r(T-t)}, N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

.

证明 设 $P(S,t)$, $p(S,t)$, $e(S,t)$ 分别为 t 时刻美式和相应欧式看跌期权的价格及美式看跌期权的提前实施溢价.它们满足 $e(S,t) = P(S,t) - p(S,t)$,代入(1.4)式得

$$\frac{\partial e}{\partial t} + H\sigma^2 t^{2H-1} S^2 \frac{\partial^2 e}{\partial S^2} + (r-q)S \frac{\partial e}{\partial S} - re = 0. \quad (2.1)$$

记 $k_1 = \frac{r}{H\sigma^2}$, $k_2 = \frac{r-q}{H\sigma^2}$, $e(S,t) = f(S, h(\tau))h(\tau)$ 其中 $h(\tau)$, $\tau = \tau(t)$ 待定且 $\tau(T) = 0$.于是(2.1)式变为

$$t^{2H-1}S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + k_2 S \frac{\partial f}{\partial S} - k_1 f\left(1 - \frac{\frac{dh}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}}{rh}\left(1 + \frac{h\frac{\partial f}{\partial h}}{f}\right)\right) = 0. \quad (2.2)$$

选取 $h(\tau) = 1 - e^{-r\tau}$, $\tau = T - t$, $f = f_1 + f_2$,其中 f_1 起决定作用, f_2 影响很小.则(2.2)式变为

$$(T-\tau)^{2H-1}S^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial S^2} + k_2 S \frac{\partial f_1}{\partial S} - \frac{k_1}{h}\left(f_1 + (1-h)h\frac{\partial f_1}{\partial h}\right) + (T-\tau)^{2H-1}S^2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial S^2} + k_2 S \frac{\partial f_2}{\partial S} - \frac{k_1}{h}\left(f_2 + (1-h)h\frac{\partial f_2}{\partial h}\right) = 0. \quad (2.3)$$

令 $(T-\tau)^{2H-1}S^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial S^2} + k_2 S \frac{\partial f_1}{\partial S} - \frac{k_1}{h} f_1 = 0$,

则 $f_1(S) \approx c_1 S^{\lambda_1}$,其中

$$\lambda_1 = -\frac{k_2 - t^{2H-1} + \sqrt{(k_2 - t^{2H-1})^2 + \frac{4k_1 t^{2H-1}}{h}}}{2t^{2H-1}} < 0.$$

令 $f_2 = \varepsilon f_1$,则由(2.3)式得

$$(T-\tau)^{2H-1}S^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial S^2} + \left(\frac{2(T-\tau)^{2H-1}S^2}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial S} + k_2 S\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial S} - k_1(1-h)(1+\varepsilon)\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial h} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial h}\right) = 0,$$

忽略含 $\frac{\partial f_1}{\partial h}$ 及 $\frac{\partial \varepsilon}{\partial h}$ 的项，得

$$(T-\tau)^{2H-1}S^2\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial S^2}+\left(\frac{2(T-\tau)^{2H-1}S^2}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial S}+k_2S\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial S}=0. \quad (2.4)$$

(2.4)式的解形如 $\varepsilon(S)=cS^{\eta}$，解得 $\eta=0$ ($\eta=-\frac{2(T-\tau)^{2H-1}\lambda_1+k_2}{(T-\tau)^{2H-1}}>0$ 不合)，所以 $\varepsilon(S)=c$（常数）. 此时

$$P(S,t)\approx p(S,t)+(1+c)c_1h(\tau)S^{\lambda_1}, \quad (2.5)$$

$$K-S^*=P(S^*,t)=p(S^*,t)+(1+c)c_1h(\tau)(S^*)^{\lambda_1}. \quad (2.6)$$

由(1.7)式得

$$-e^{-q(T-t)}N(-\overline{d_1}(S^*))+(1+c)c_1h(\tau)\lambda_1(S^*)^{\lambda_1-1}=-1. \quad (2.7)$$

联立(2.5)式，(2.6)式，(2.7)式得

$$P(S,t)\approx p(S,t)+\frac{S^*}{\lambda_1}(e^{-q(T-t)}N(-\overline{d_1}(S^*))-1)\left(\frac{S}{S^*}\right)^{\lambda_1}, S\geqslant S^*,$$

$$K-S^*=p(S^*,t)+\frac{S^*}{\lambda_1}(e^{-q(T-t)}N(-\overline{d_1}(S^*))-1).$$

当 $S<S^*$ 时，$P(S,t)=K-S$.

若在 λ_1 中，取 $H=1/2$，其结果与经典 Black-Scholes 模型下用传统二次近似法计算美式看跌期权的价格一致.

3 实例

以 $S_0=40, K=35, r=0.1, q=0.02, \sigma=0.2$ 为例，计算当 H 和 T 取不同值时美式看跌期权的价格，并以显式差分法为参照进行分析和比较（表 1）.

表 1 分数次 Black-scholes 模型下美式看跌期权的近似价格

Table 1 Approximate price of American put option under the Fractional Black-Scholes Model

H	T	二次近似法 Quadratic approximation	显式差分法 Finite difference method
0.5	0.5	0.2883	0.2885
	1.5	0.7081	0.6614
	2.0	0.9293	0.8387
0.6	0.5	0.2218	0.2179
	1.5	0.8617	0.8225
	2.0	1.1959	0.9172
0.8	0.5	0.1237	0.1235
	1.5	1.2967	0.9855
	2.0	1.8813	1.4653

由表 1 可以看出，用二次近似法计算到期日较短的美式期权的价格较准确，但计算到期日较长的美式期权的价格时误差较大，说明算法可行，但有待改进. 另外，还可以看出，H 对美式期权价格的影响很明显. 当到期日较短时，价格随着 H 的增大而减少（如 $T=0.5$），当到期日较长时，价格随着 H 的增大而增大（如 $T=1.5$），这与分数次布朗运动的长期相依性一致.

参考文献：

[1] Macmillan L. Analytic approximation for the American put option[J]. Advances in Futures and Options Research, 1986(1): 119-139.

[2] Barone-Adesi G, Whaley R E. Efficient analytic approximation of American option values[J]. Journal of Finance, 1987, 42: 301-320.

[3] Wong W K, Xu K. Refining the quadratic approximation formula for an American option [J]. International Journal Theoretical and Applied Finance, 2001, 5(4): 773-781.

[4] 吴传生, 周宏艺. 基于 BAW 公式的美式期权解的修正[J]. 武汉理工大学学报, 2006, 28(2): 125-127.

[5] Mandelbrot B. Long-run linearity, locally Gaussian Processes-spectra and infinity variance[J]. International Economic Review, 1969, 10(1): 82-111.

[6] 刘韶跃. 数学金融的分数次 Black-Scholes 模型及应用[D]. 长沙: 湖南师范大学博士学位论文, 2004.

[7] Elliott R J, Chan L L. Perpetual American options with fractional Brownian motion [J]. Quantitative Finance, 2004, 4: 123-128.

[8] Deng G H, Lin H Y. Pricing American put option in a fractional Black-Scholes model via compound option[J]. Advances in Systems Science and Applications, 2008, 8(3): 447-456.

[9] 彭大衡. 具有分数 O-U 过程的永久美式看跌期权的定价[J]. 数学物理学报, 2007, 27(A)(6): 1141-1147.

[10] Hu Y, Φ Kendal B. Fractional white noise calculus and application to finance[J]. Inf Dim Anal Quantum Prob-ab Rel Top, 2003, 6: 1-32.

（责任编辑：尹 闯）