

# 误差向量与 Krylov 子空间对 GMRES(m) 算法收敛速度的影响<sup>\*</sup>

## Influence of Residual Vector and Krylov Subspace on Convergence Velocity of GMRES Algorithm

吴果林<sup>1</sup>, 王 晟<sup>2</sup>

WU Guo-lin<sup>1</sup>, WANG Sheng<sup>2</sup>

(1. 桂林航天工业高等专科学校计算机系, 广西桂林 541004; 2. 桂林电子科技大学数学与计算科学学院, 广西桂林 541004)

(1. Department of Computer, Guilin College of Aerospace Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China; 2. School of Mathematics & Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

**摘要:** 从广义极小残量法 GMRES(m) 的结构出发, 分析其误差向量与 Krylov 子空间对该算法收敛速度的影响, 推导出误差向量与 Krylov 子空间第 1 个向量和第  $m+1$  个向量的方向余弦关系, 并用数值算例验证其合理性. 当误差向量  $r_{k+1}$  在 Krylov 子空间向量  $v_1$  的投影较大而在向量  $v_{m+1}$  的投影较小时, GMRES(m) 算法收敛速度较慢, 反之亦然. 算例结果与理论结果相符.

**关键词:** 线性方程 迭代方法 广义极小残量法 Krylov 子空间

中图分类号: O241.6 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2011)03-0214-04

**Abstract:** By analysing the structure of restarted GMRES algorithm, we discover that residual vector and Krylov subspace have an influence on the convergence velocity of GMRES(m) algorithm, and deduce that the residual vector has a direction cosine relationship with the first vector and  $m+1$  vector in Krylov subspace. A numerical example is used to verify its rationality. Algorithm analysis indicates that the convergence velocity of GMRES(m) method is slower when the project of the residual vector  $r_{k+1}$  is large in the krylov subspace  $v_1$  vector and small in the krylov subspace  $v_{m+1}$  vector, or vice versa.

**Key words:** linear equation, iterative method, GMRES(m), Krylov subspace

事实已证明许多科学计算可以归结为解线性方程组  $AX = b$ , 其中  $A \in R^{n \times n}$  为大型稀疏矩阵且非奇异,  $X, b \in R^n$ . 采用迭代法是求解这类方程组最普遍的选择, 其中广义极小残量法 (GMRES)<sup>[1]</sup> 由于计算的近似解在相应的 Krylov 子空间满足残量范数极小的性质备受大家关注, 是目前最流行的方法之一. GMRES 方法在 Krylov 子空间上进行迭代, 但是其存储量和正交化工作量会随着迭代次数的增加而变

得不可接受, 因此 GMRES 方法对于大规模线性系统问题一般需要重新启动, 即限制最大近似 Krylov 子空间的维数, 或者说限制每次循环的最大迭代步数. 在最大迭代步数之内, 当每次循环算法达到一定的迭代步数后, 把当前所计算的近似解当作下一个循环的初始值并在由新的误差向量所生成的 Krylov 子空间上重新开始. 通常, 重新启动的 GMRES 算法每次循环的迭代步数是固定的, 记作 GMRES(m).

当系数矩阵  $A$  不是对称阵时, GMRES(m) 算法收敛速度较慢甚至出现停滞现象. 在近 20 年里, 许多学者对 GMRES(m) 方法的收敛性做了大量的工作. 然而, 大部分工作都集中在分析系数矩阵  $A$  的谱<sup>[2,3]</sup> 以及 GMRES 多项式的根<sup>[4,5]</sup> 对 GMRES(m) 算法收

收稿日期: 2011-01-30

修回日期: 2011-03-07

作者简介: 吴果林(1977-), 男, 硕士, 讲师, 主要从事数值计算、非参数统计的研究.

\* 2008 年桂林航天工业高等专科学校科研项目资助.

敛速度的影响, 很少分析误差向量与 Krylov 子空间的关系对算法收敛速度的作用.

本文从 GMRES(m) 算法结构出发, 推导出误差向量与 Krylov 子空间第 1 个向量和第  $m+1$  个向量的方向余弦关系. 数值实验进一步表明, 误差向量在 Krylov 子空间中的两个向量的投影直接影响 GMRES(m) 算法的收敛速度.

## 1 GMRES(m) 算法及性质

GMRES 算法是在 Krylov 子空间  $K_m(A, r_0) = \text{span}\{r_0, Ar_0, Ar_0^2, \dots, Ar_0^{m-1}\}$  上进行迭代的一种算法, 其中  $r_0 = b - Ax_0$ ,  $x_0$  为初始近似解. 其主要思想是通过寻找一个近似解  $x_m \in x_0 + K_m(A, r_0)$ , 使得向量最小化范数  $\|b - A(x_0 + z)\|_2$ , 这里  $z \in K_m(A, r_0)$ , 算法的设计如下<sup>[1]</sup>.

**算法 1** GMRES 算法.

- 步骤 1 给定初始近似解  $x_0$ , 得到初始向量  $r_0 = b - Ax_0$ , 令  $\beta = \|r_0\|_2$ , 且  $v_1 = r_0/\beta$ ;
- 步骤 2 For  $j = 1, 2, \dots, m$ ;
- 步骤 3 计算  $w_j = Av_j$ ;
- 步骤 4 For  $i = 1, 2, \dots, j$ ;
- 步骤 5  $h_{ij} = (w_j, v_i)$ ;
- 步骤 6  $w_j = w_j - h_{ij}v_i$ ;
- 步骤 7 结束  $i$  循环;
- 步骤 8  $h_{j+1,j} = \|w_j\|_2$ , 如果  $h_{j+1,j} = 0$ , 令  $m = j$ , 跳到步骤 11;
- 步骤 9  $v_{j+1} = w_j/h_{j+1,j}$ ;
- 步骤 10 结束  $j$  循环;
- 步骤 11 定义一个  $(m+1) \times m$  的 Hessenberg 矩阵  $H_m = (h_{ij})_{(m+1) \times m}$  和  $V_m = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ ;
- 步骤 12 计算  $y$ , 使得  $\|\beta e_1 - H_m y\|_2$  最小, 则  $x_m = x_0 + V_m y$ .

易见, 如果算法 1 在第  $m$  步之前没有停止, 则向量  $v_1, v_2, \dots, v_m$  形成 Krylov 子空间  $K_m(A, r_0)$  的一组正交基<sup>[6]</sup>. 因此, 很容易推导出下列性质.

**性质 1.1** 设  $V_m, H_m$  为算法 1 所定义的矩阵, 记  $\bar{H}_m$  为  $H_m$  删除最后一行所得矩阵, 则有下列关系式成立:

$$AV_m = V_m \bar{H}_m + w_m e_m^T \quad (1.1)$$

$$= V_{m+1} H_m, \quad (1.2)$$

$$V_m^T A V_m = \bar{H}_m. \quad (1.3)$$

**证明** 由算法 1 第 6, 8, 9 步, 我们有

$$Av_j = \sum_{i=1}^{j+1} h_{ij} v_i, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.4)$$

由矩阵  $V_m, H_m$  的定义, (1.4) 式写成矩阵形式便有 (1.1) 式, (1.2) 式成立. 对 (1.1) 式两边同时乘以矩阵  $V_m^T$ , 注意到  $v_1, v_2, \dots, v_m$  是 Krylov 子空间  $K_m(A, r_0)$  的一组正交基, 则 (1.3) 式成立.

显然, 算法 1 随着  $m$  的增加, 其存储量和计算量大大增加, 故对于大  $n$  来说,  $m$  取大的值是不切实际的, 因此一种限制 Krylov 子空间最大维数的算法——GMRES(m) 算法被提出来, 其过程如下.

**算法 2** GMRES(m) 算法.

- 步骤 1 计算  $r_k = b - Ax_k$ ,  $\beta = \|r_k\|_2$  和  $v_1 = r_k/\beta$ ;
- 步骤 2 利用算法 1 计算  $y$ , 并记  $x_{k+1} = x_k + V_m y$ ;
- 步骤 3 如果  $x_{k+1}$  满足给定误差条件, 则停止, 否则令  $x_k = x_{k+1}$ , 返回步骤 1.

**性质 1.2** 设  $r_{k+1} = b - Ax_{k+1}$  表示算法 2 第  $k$  次迭代的误差向量, 则  $r_{k+1}$  可由 Krylov 子空间  $K_{m+1}(A, r_k) = \text{span}\{r_k, Ar_k, Ar_k^2, \dots, Ar_k^{m-1}, Ar_k^m\}$  线性表出, 其中  $K_{m+1}(A, r_k)$  为算法 2 第 2 行所生成的 Krylov 子空间.

**证明** 由于算法 2 第 2 行套用算法 1, 由算法 1 可知  $K_{m+1}(A, r_k) = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_{m+1}\}$ . 于是

$$r_{k+1} = b - Ax_{k+1} = b - A(x_k + V_m y) = b - Ax_k - AV_m y = r_k - V_{m+1} H_m y.$$

上面的等式应用了性质 1.1 中的 (1.2) 式. 令  $z = H_m y$ , 则  $r_{k+1} = \beta v_1 - V_{m+1} z$ . 即  $r_{k+1}$  可由  $v_1, v_2, \dots, v_{m+1}$  线性表出, 从而  $r_{k+1}$  可由  $K_{m+1}(A, r_k)$  线性表出.

## 2 GMRES(m) 算法收敛速度分析

考虑到存储和计算量的原因, 算法 2 限制了  $m$  的大小 ( $m \ll n$ ), 利用重新启动的方法来收敛到方程组的精确解. 由 GMRES(m) 算法可知, 重新启动后算法所迭代的 Krylov 子空间发生了改变, 因此每次重新启动后算法丢失了前面所生成的 Krylov 子空间的信息, 这就使它失去了全局最优性质, 较之 GMRES 算法, 收敛速度一般会下降. Y. Saad 在文献 [1] 中指出, 如果  $m$  足够大, GMRES 算法可确保在  $n$  步之后收敛到方程组的精确解. 这就启发我们, 如果 GMRES(m) 算法重新启动后生成的新 Krylov 子空间近似于 GMRES 算法 Krylov 子空间中第  $m+1$  个向量到第  $2m$  个向量所构成的子空间, GMRES(m) 算法的收敛速度较之 GMRES 算法将不会发生太大的改变. 算法 2 重新启动后, 用误差向量  $r_{k+1}$  构造新的 Krylov 子空间, 即新的迭代子空间为  $K_m(A, r_{k+1}) = \text{span}\{r_{k+1}, Ar_{k+1}, Ar_{k+1}^2, \dots, Ar_{k+1}^{m-1}\} = \text{span}\{v_1, v_2,$

$\dots, v_m$ }. 对比算法 1 迭代  $2m$  步后的 Krylov 子空间  $K_{2m}(A, r^k) = \text{span}\{r^k, Ar^k, \dots, Ar^{2m-1}\} = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_{2m}\}$ , 不难发现, 如果  $r_{k+1} = c_1 v_1$  ( $c_1$  为数), 算法 2 重新启动后所生成的新 Krylov 子空间与之前的子空间相同, 迭代将在同一个子空间上进行, 显然收敛速度会下降甚至出现停滞现象; 如果  $r_{k+1} = c_{m+1} v_{m+1}$  ( $c_{m+1}$  为数), 算法 2 重新启动后所生成的新 Krylov 子空间与算法 1 第  $m+1$  步至第  $2m$  步所生成的 Krylov 子空间相同, 重新启动后算法 2 两次循环所迭代的子空间与算法 1 迭代  $2m$  步的子空间相同, 故算法 2 的收敛速度与算法 1 相比不会发生太大变化. 因此, 误差向量  $r_{k+1}$  在  $v_1, v_{m+1}$  两个向量投影将直接影响 GMRES( $m$ ) 算法的收敛速度.

**性质 2.1** 设  $r_k, r_{k+1}$  分别是算法 2 循环前、循环结束时的误差向量, 那么有下列关系成立:

$$\cos \langle r_k, r_{k+1} \rangle = \frac{\|r_k\|_2}{\|r_{k+1}\|_2}.$$

**证明** 记  $h^T$  表示矩阵  $H_m$  的第一行元素, 由算法 1 第 12 步可得

$$y = \beta (H_m^T H_m)^{-1} H_m^T e_1.$$

由算法 2 得

$$\cos \langle r_k, r_{k+1} \rangle = \cos \langle v_1, r_{k+1} \rangle =$$

$$\frac{v_1^T r_{k+1}}{\|v_1\|_2 \|r_{k+1}\|_2} = \frac{v_1^T r_{k+1}}{\|r_{k+1}\|_2},$$

$$v_1^T r_{k+1} = v_1^T (b - A(x_k + V_m y)) = v_1^T (\beta v_1 - V_{m+1} H_m y) = \beta - e_1^T H_m y = \beta - h^T y,$$

$$\|r_{k+1}\|_2^2 = (\beta v_1 -$$

$$V_{m+1} H_m y)^T (\beta v_1 - V_{m+1} H_m y) = \beta^2 - 2\beta h^T y - \beta y^T H_m^T V_{m+1}^T v_1 + y^T H_m^T V_{m+1}^T V_{m+1} H_m y = \beta^2 - 2\beta h^T y + y^T H_m^T H_m y = \beta^2 - 2\beta h^T y + \beta y^T H_m^T H_m (H_m^T H_m)^{-1} H_m^T e_1 = \beta(\beta - h^T y).$$

于是

$$\cos \langle r_k, r_{k+1} \rangle = \frac{\beta - h^T y}{\sqrt{\beta(\beta - h^T y)}} = \frac{\|r_{k+1}\|_2}{\|r_k\|_2}.$$

性质 2.1 表明, 如果误差向量  $r_{k+1}$  的范数没有减少, 则误差向量  $r_{k+1}$  在向量  $v_1$  的投影很大, 算法 2 重新启动后将产生较少新的信息, 收敛速度会发生下降. 从应用的角度来看, 这意味着可以监测误差向量  $r_{k+1}$  的范数下降程度来决定重新启动向量的选择. 如果误差向量  $r_{k+1}$  的范数在重新启动前没有充分变小, 则可以另外选择一个误差向量作为重新启动向量. 这种误差向量可选择性探索可以参见文献 [7] 中的例 2.

**性质 2.2** 设  $r_{k+1}$  是算法 2 循环结束时的误差向量,  $v_{m+1}$  为 Krylov 子空间的第  $m+1$  个向量, 则有下

列关系成立:

$$\cos \langle r_{k+1}, v_{m+1} \rangle = -\frac{h_{m+1, m} y_m}{\|r_{k+1}\|_2},$$

其中  $y_m$  为向量  $y$  的第  $m$  个分量,  $h_{m+1, m}$  为矩阵  $H_m$  中的元素.

**证明** 
$$\cos \langle r_{k+1}, v_{m+1} \rangle = \frac{v_{m+1}^T r_{k+1}}{\|v_{m+1}\|_2 \|r_{k+1}\|_2} = \frac{v_{m+1}^T r_{k+1}}{\|r_{k+1}\|_2},$$

$$v_{m+1}^T r_{k+1} = v_{m+1}^T (b - A(x_k + V_m y)) = v_{m+1}^T (\beta v_1 - V_{m+1} H_m y) = -e_{m+1}^T H_m y = -h_{m+1, m} e_m^T y = -h_{m+1, m} y_m,$$

故

$$\cos \langle r_{k+1}, v_{m+1} \rangle = -\frac{h_{m+1, m} y_m}{\|r_{k+1}\|_2}.$$

通常情况下  $h_{m+1, m}$  比较小,  $h_{m+1, m} y_m$  与  $\|r_{k+1}\|_2$  的比值也相对较小, 从而  $\|r_{k+1}\|_2$  在  $v_{m+1}$  上的投影也比较小, 重新启动后新生成的 Krylov 子空间含有较少的  $v_{m+1}$  信息, 收敛速度将会出现下降.

综合性质 2.1 和 2.2 可以看出, 当误差向量  $r_{k+1}$  在 Krylov 子空间向量  $v_1$  的投影较大而在向量  $v_{m+1}$  的投影较小时, GMRES( $m$ ) 算法收敛速度较慢; 反之, 当误差向量  $r_{k+1}$  在 Krylov 子空间向量  $v_1$  的投影较小而在向量  $v_{m+1}$  的投影较大时, GMRES( $m$ ) 算法收敛速度较快.

### 3 数值算例

为方便计算, 以下的两个例子初始估计值均设为  $x_0 = (0, 0, \dots, 0)^T$ , 右端向量  $b = (1, 1, \dots, 1)^T$ , Krylov 子空间迭代的最大维数等于 25.

**例 1**<sup>[8]</sup> 令  $A = SDS^{-1}$ ,  $A, S, D \in R^{1000 \times 1000}$ ,  $S = (1, 0.9)$  是双对角矩阵, 1 是主对角元, 0.9 是上对角元,  $D = \text{diag}(-10, -9, \dots, -1, 1, 2, \dots, 990)$ . 从图 1 可以看出, 由于  $A$  有负特征值, 用 GMRES( $m$ ) 算法收敛速度很慢, 甚至出现了停滞现象.

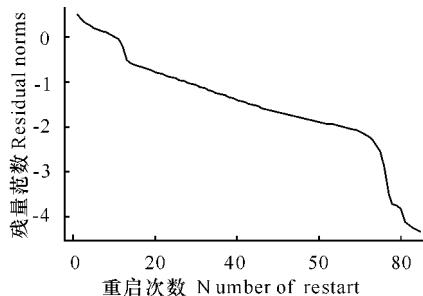


图 1 重新启动次数和残量范数的对数  $\log_{10}(\|r_m\|_2)$  的关系

Fig. 1 Relationship of restart numbers and residual norms  $\log_{10}(\|r_m\|_2)$

为了体现误差向量  $r_{k+1}$  与  $v_1, v_{m+1}$  两个向量的夹角大小与 GMRES (m) 算法收敛速度的关系, 定义  $R_{k+1} = \frac{(r_{k+1} - r_{k+2})}{r_{k+1}}$  为相邻两个误差向量中后一个误差向量较前一个误差向量的下降比例. 显然误差向量的下降率  $R_{k+1}$  反映了 GMRES (m) 算法收敛速度的大小, 当  $R_{k+1}$  越大时, GMRES (m) 算法的收敛速度越快. 从图 2、图 3 可以看出, GMRES (m) 算法收敛速度与误差向量  $r_{k+1}$  和向量  $v_1$  的夹角余弦大致成负线性关系, 而与误差向量  $r_{k+1}$  与向量  $v_{m+1}$  的夹角余弦大致成正线性关系. 值得注意的是, 当误差向量  $r_{k+1}$  与向量  $v_1$  夹角余弦接近于 1 时, GMRES (m) 算法几乎出现停滞, 而当误差向量  $r_{k+1}$  与向量  $v_{m+1}$  夹角余弦超过 0.3 时, 算法的收敛速度显著提高.

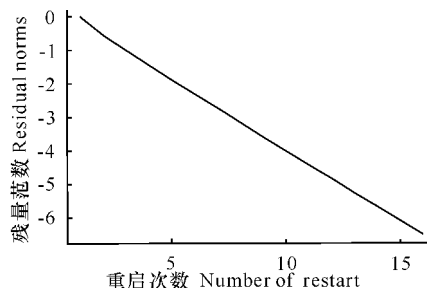


图 4 重新启动次数和残量范数的对数  $\log_{10}(\|r_m\|_2)$  的关系

Fig. 4 Relationship of restart numbers and residual norms  $\log_{10}(\|r_m\|_2)$

表 1 GMRES (m) 算法每次重新启动所产生误差向量范数及所对应的值

Table 1 Error vector norm and it's corresponding value from each restarted of GMRES (m)

重新启动次数 Restart numbers	误差向量范数 Vector norms of $r_{k+1}$	$r_{k+1}$ 与 $v_1$ 夹角余弦 Cosine	$r_{k+1}$ 与 $v_{m+1}$ 夹角余弦 Cosine
1	9.876281e-01	0.03123154	0.3237097
2	2.691332e-01	0.27250459	0.3382714
3	9.421787e-02	0.35007897	0.2608604
4	3.383677e-02	0.35913329	0.2390161
5	1.252233e-02	0.37008055	0.2338973
6	4.687057e-03	0.37429587	0.2269883
7	1.776740e-03	0.37907374	0.2282358
8	6.767735e-04	0.38090738	0.2230957
9	2.592560e-04	0.38307654	0.2261224
10	9.949717e-05	0.38377957	0.2215470
11	3.829447e-05	0.38377957	0.2255797
12	1.475344e-05	0.38526287	0.2212918
13	5.694296e-06	0.38596404	0.2259923
14	2.199562e-06	0.38627458	0.2218386
15	8.508285e-07	0.38681727	0.2270088
16	3.293697e-07	0.38711639	0.2228920

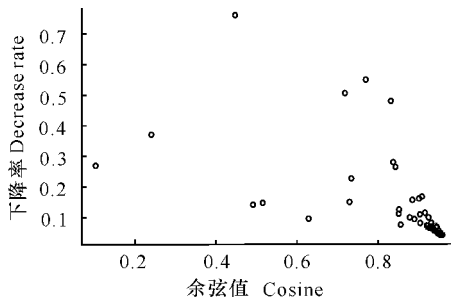


图 2  $R_{k+1}$  与误差向量  $r_{k+1}$  与向量  $v_1$  的夹角余弦散点图

Fig. 2 Scatter diagram of  $R_{k+1}$  and the cosine of vectors

$r_{k+1}$  and  $v_{m+1}$

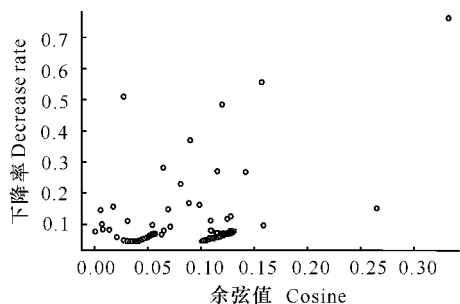


图 3  $R_{k+1}$  与误差向量  $r_{k+1}$  与向量  $v_{m+1}$  的夹角余弦散点

Fig. 3 Scatter diagram of  $R_{k+1}$  and the cosine of vectors

$r_{k+1}$  and  $v_{m+1}$

例 2<sup>[9]</sup> 设  $A \in R^{1000 \times 1000}$  且为双对角矩阵, 其中主对角元为 1, 2, ..., 1000, 上对角元全都是 1.

从图 4 可看出, 例 2 是 GMRES (m) 算法收敛的一个例子, 只需 16 次重启就达到了给定的精确度, 且误差向量的下降率 (即收敛速度) 比较稳定在一个大的值附近. 事实上从表 1 也可以看出  $r_{k+1}$  与  $v_1, v_{m+1}$  夹角余弦的大小正好与例 1 中的数值相反, 因此较快的收敛速度也在情理之中. 另外, 一个值得关注的问题是, 随着重启次数的增加,  $r_{k+1}$  与  $v_1, v_{m+1}$  夹角余弦有朝收敛速度慢的方向移动的趋势.

## 4 结束语

对于 GMRES (m) 算法而言, 误差向量  $r_{k+1}$  在  $v_1, v_{m+1}$  两个向量投影的大小直接影响算法的收敛速度. 由性质 1.2 可知,  $r_{k+1}$  是 Krylov 子空间基向量  $v_1, v_2, \dots, v_{m+1}$  的线性组合, 因此算法每次重新启动时, 可以通过选择适当的  $r_{k+1}$ , 改善  $r_{k+1}$  在  $v_1, v_{m+1}$  两个向量的投影来加快算法的收敛速度.

参考文献:

- [1] Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems [M]. Boston, MA: The PWS Publishing Company, 1996.
- [2] Saad Y, Schultz M H. GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems [J]. SIAM J Sci Stat Comput, 1986, 7: 856-869.

(下转第 221 页 Continue on page 221)

- and Systems, 1986, 20: 87-96.
- [ 2 ] Atanassov K. More on intuitionistic fuzzy sets[ J ] . Fuzzy Sets and Systems, 1989, 33: 37-46.
- [ 3 ] Atanassov K, Gargov G. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets[ J ] . Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31: 343-349.
- [ 4 ] Atanassov K. Operators over interval-valued intuitionistic fuzzy sets[ J ] . Fuzzy Sets and Systems, 1994, 64: 159-174.
- [ 5 ] Wei G W. Maximizing deviation method for multiple attribute decision making in intuitionistic fuzzy setting[ J ] . Knowledge-Based Systems, 2008, 21: 833-836.
- [ 6 ] Ye J. Fuzzy decision-making methods based on the weighted correlation coefficient under intuitionistic fuzzy environment[ J ] . European Journal of Operational Research, 2010, 205: 202-204.
- [ 7 ] Wei G W. GRA method for multiple attribute decision making with incomplete weight information in intuitionistic fuzzy setting[ J ] . Knowledge-Based Systems, 2010, 23: 243-247.
- [ 8 ] Li D F. Multiattribute decision making models and methods using intuitionistic fuzzy sets[ J ] . Journal of Computer and System Sciences, 2005, 70: 73-85.
- [ 9 ] Lin L, Yuan X H, Xia Z Q. Multicriteria fuzzy decision-making methods based on intuitionistic fuzzy sets[ J ] . Journal of Computer and System Sciences, 2007, 73: 84-88.
- [ 10 ] 徐泽水. 区间直觉模糊信息的集成方法及其在决策中的应用[ J ] . 控制与决策, 2007, 22(2): 215-219.
- [ 11 ] 卫贵武. 一种权重信息不完全的区间直觉模糊数多属性决策方法[ J ] . 统计与决策, 2008, 8: 70-71.
- [ 12 ] Ye J. Multicriteria fuzzy decision-making method based on a novel accuracy function under interval-valued intuitionistic fuzzy environment[ J ] . Expert Systems with Applications, 2009, 36: 6899-6902.
- [ 13 ] Ye J. Multicriteria fuzzy decision-making method using entropy weights-based correlation coefficients of interval-valued intuitionistic fuzzy sets[ J ] . Applied Mathematical Modelling, 2010, 34(12): 3864-3870.
- [ 14 ] Ye F. An extended TOPSIS method with interval-valued intuitionistic fuzzy numbers for virtual enterprise partner selection[ J ] . Expert Systems with Applications, 2010, 37: 7050-7055.
- [ 15 ] Lakshmana G N V, Muralikrishnan S, Sivaraman G. Multi-criteria decision-making method based on interval-valued intuitionistic fuzzy sets[ J ] . Expert Systems with Applications, 2011, 38(3): 1464-1467.
- [ 16 ] 刘锋, 袁学海. 模糊数直觉模糊集[ J ] . 模糊系统与数学, 2007, 21(1): 88-91.

(责任编辑: 尹 闯)

(上接第 217 页 Continue from page 217)

- [ 3 ] Joubert W. On the convergence behavior of the restarted GMRES algorithm for solving nonsymmetric linear systems[ J ] . Numer Linear Algebra Appl, 1994, 1: 427-448.
- [ 4 ] Cao Z H. A note on the convergence behavior of GMRES[ J ] . Appl Numer math, 1997, 25: 13-20.
- [ 5 ] Van der Vorst H A, Vuik C. The superlinear convergence behavior of GMRES[ J ] . J Comput Appl Math, 1993, 48: 327-341.
- [ 6 ] Arnoldi W E. The principle of minimized iteration in the solution of the matrix eigenvalue problem[ J ] . Quart Appl Math, 1951, 9: 17-29.
- [ 7 ] Simoncini V. A new variant of restarted GMRES[ J ] . Numer Linear Algebra Appl, 1999, 6: 61-77.
- [ 8 ] 全忠, 向淑晃. 基于 GMRES 的多项式预处理广义极小残差法[ J ] . 计算数学, 2006, 4: 365-376.
- [ 9 ] Morgan R B. A restarted GMRES method augmented with eigenvectors[ J ] . SIAM J Matrix Anal Appl, 1995, 16: 1154-1171.

(责任编辑: 尹 闯)