DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2011.04.013

广西科学 Guangxi Sciences 2011,18(4):329～332

具非线性脉冲时滞的 Lasota-Wazewska 模型概周期解的存在性与稳定性*

Existence and Stability of Almost Periodic Solutions for Nonlinear Impulsive Lasota-Wazewska Model

柏　琼,冯春华

BAI Qiong, FENG Chun-hua

(广西师范大学,广西桂林　541004)

(Guangxi Normal University,Guilin,Guangxi,541004,China)

摘要:利用压缩映射原理,研究具有非线性脉冲的 Lasota-Wazewska 模型的概周期解,获得该系统概周期解存在与指数稳定的充分条件.

关键词:Lasota-Wazewska 模型　非线性脉冲　概周期解　指数稳定性　压缩映射原理

中图法分类号:O175.8　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2011)04-0329-04

Abstract:The nonlinear impulsive Lasota-Wazewska model was analyzed according to the fixed point theorem of contraction mapping principle. Some sufficient conditions for the existence and exponential stability of almost periodic solutions were obtained.

Key words:Lasota-Wazewska model,nonlinear impulsive,almost periodic solution,exponential stability,fixed point theorem

近几年,脉冲微分方程的研究引起了学者们的极大关注.关于脉冲效应的一些有趣的结果已经在稳定性,振动性中出现[1,2].众所周知,脉冲微分方程概周期系统的理论比周期系统的理论要丰富得多.特别是在经济领域,生物领域中,概周期系统的研究比周期系统的研究更具有现实意义[3~5].

文献[6]运用压缩映射的不动点定理考虑具有线性脉冲时滞效应的 Lasota-Wazewska 模型

$$\begin{cases} x'(t) = -\alpha(t)x(t) + \sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)e^{-\gamma_i(t)x(t-h)}, \\ \quad i=1,2,\cdots n, t\neq\tau_k \\ \Delta x(\tau_k) = x(\tau_k+0) - x(\tau_k-0) = \\ \quad \alpha_k x(\tau_k) + \upsilon_k \end{cases}$$

概周期解的存在性.同时获得了系统概周期解存在的充分条件,但是此充分条件并不能保证当系统是非线性脉冲时也成立.因此我们仍然运用压缩映射的不动点定理考虑非线性脉冲时滞效应的 Lasota-Wazewska 模型

$$\begin{cases} x'(t) = -\alpha(t)x(t) + \sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)e^{-\gamma_i(t)x(t-h)}, \\ \quad i=1,2,\cdots,n, t\neq\tau_k, \\ \Delta x(\tau_k) = I_k(x(\tau_k)), t=\tau_k \end{cases} \quad (1)$$

概周期解的存在性,并且讨论了此概周期解的指数稳定性.

1　预备知识

设 $B=\{\{\tau_k\}:\tau_k\in R,\tau_k<\tau_{k+1},k\in Z,\lim_{k\to\pm\infty}\tau_k=\pm\infty\}$ 是所有无界的严格递增的实数序列构成的集合.$PC(R,R)=\{x(t):R\to R$ 具有第一类间断点的分段连续函数$\}$.再设 $x_0\in PC(R,R)$,定义系统(1)的解 $x(t)=x(t;t_0,x_{t_0})$ 满足初值条件:

$$x(s;t_0,x_{t_0})=x_{t_0}(s), x'(s;t_0,x_{t_0})=x'_{t_0}(s), s\in(-\infty,t_0]; x(t_0^+;t_0,x_{t_0})=x(t_0), x'(t_0^+;t_0,x_{t_0})=x'(t_0). \quad (2)$$

既然方程(1)和(2)的解是具有第一类间断点的分段连续函数,因此我们有如下概周期的定义.

定义 1[7]　称序列$\{\tau_k^j\}$($\tau_k^j=\tau_{k+j}-\tau_k,k\in Z,j\in$

收稿日期:2011-03-14

修回日期:2011-05-12

作者简介:柏　琼(1985-),女,硕士研究生,主要从事微分方程研究。

*国家自然科学基金项目(10961005)资助。

$Z,\{\tau_k\} \in B$) 的集合是一致概周期的,如果对任意的 $\varepsilon > 0$,每个序列都存在共同的 ε-概周期的相对紧集.

定义 2[7] 若函数 $\phi(t) \in PC(R,R)$ 满足下列条件:

(1) 序列 $\{\tau_k\}$ 是一致概周期的,即对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $j \in Z$,使得 $|\tau_{k+j} - \tau_k| < \varepsilon$;

(2) 对任意的 $\varepsilon > 0$,存在一个实数 $\delta > 0$,使得 t_1 和 t_2 属于 $\phi(t)$ 的同一个连续区间,当 $|t_1 - t_2| < \delta$ 时,有 $|\phi(t_1) - \phi(t_2)| < \varepsilon$;

(3) 对任意 $\varepsilon > 0$,存在一个相对紧集 T,对 $\tau \in T$ 有 $|\phi(t+\tau) - \phi(t)| < \varepsilon$,对 $t \in R$ 满足条件 $|t - \tau_k| > \varepsilon, k \in Z$.

则函数 $\phi(t)$ 称为概周期函数.

为了证明方便,我们先考虑系统:

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t), t \neq \tau_k, \\ \Delta x(t) = B_k x(t), t = \tau_k. \end{cases} \tag{3}$$

由文献[8]知,如果 $U_k(t,s)$ 是系统

$$x'(t) = A(t)x(t), \tau_{k-1} < t < \tau_k, \{\tau_k\} \in B \tag{4}$$

的柯西矩阵.

则系统(3)的柯西矩阵

$$W(t,s) = \begin{cases} U_k(t,s), \tau_{k-1} < s \leqslant t < \tau_k, \\ U_{k+1}(t,\tau_k+0)(E+B_k)U_k(t,s), \\ \qquad \tau_{k-1} < s \leqslant \tau_k < t \leqslant \tau_{k+1}, \\ U_{k+1}(t,\tau_k+0)(E+B_k)U_k(\tau_k,\tau_k+ \\ \qquad 0)\cdots(E+B_i)U_i(\tau_i,s), \tau_{i-1} < s \leqslant \\ \qquad \tau_i < \tau_k < t \leqslant \tau_{k+1}. \end{cases} \tag{5}$$

以及系统(3)的解可以表示为 $x(t;t_0,x_0) = W(t,t_0)x_0$.

对系统(1),假设下面条件成立:

(H_1) $\alpha(t) \in C[R,R^+]$ 是不恒为常数的 Bohr 概周期函数;

(H_2) $\beta_i(t), \gamma_i(t) \in C[R,R^+]$ 是 Bohr 概周期函数,且 $0 < \sup\limits_{t\in R}|\beta_i(t)| < U_i, U_i > 0, \beta_i(0) = 0; 0 < \sup\limits_{t\in R}|\gamma_i(t)| < V_i, V_i > 0, \gamma_i(0) = 0, i = 1,2,\cdots,n$;

(H_3) 序列 $\{\tau_k^i\}, \tau_k^i = \tau_{k+i} - \tau_k, k \in Z, i \in Z, \{\tau_k\} \in B$ 的集合是一致概周期的,即对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $q \in Z$,使得 $|\tau_{k+q} - \tau_k| < \varepsilon$,且存在 $\theta > 0$,使得 $\inf\limits_{k\in Z}\{\tau_{k+1} - \tau_k\} = \theta > 0$;

(H_4) $I_k \in PC(R,R)$ 是概周期的,即对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $q \in Z$,对 $x \in R$,使得 $|I_{k+q}(x) - I_k(x)| < \varepsilon$,且 I_k 满足 Lipschitz 条件,即对任意的 $x,y \in R$,存在一个函数 $L(t) > 0$,使得 $|I_k(x) - I_k(y)| \leqslant L(t)|x-y|$.

其次考虑齐次线性脉冲系统:

$$\begin{cases} x'(t) = -\alpha(t)x(t), t \neq \tau_k, \tau_{k-1} < t < \tau_k, \\ \Delta x(\tau_k) = 0, t = \tau_k. \end{cases} \tag{6}$$

由系统(3)~(5)可得系统(6)解的表达式为

$$x(t;t_0,x_0) = W(t,t_0)x_0, t_0, x_0 \in R. \tag{7}$$

其中,$W(t,s) = \exp\{-\int_s^t a(\delta)\mathrm{d}\delta\}, t \geqslant s, t, s \in R$.

引理 1[6] 如果条件(H_1),(H_2)成立,则

(1) 对于系统(6)的柯西矩阵 $W(t,s)$ 存在一个正常数 α,使得 $|W(t,s)| \leqslant e^{-\alpha(t-s)}, t \geqslant s, t,s \in R$.

(2) 对任意的 $\varepsilon > 0, t,s \in R, t \geqslant s, |t - \tau_k| > \varepsilon, |s - \tau_k| > \varepsilon, k \in Z$,且存在一个与函数 $\alpha(t)$ 的 ε-概周期相关的稠密集 T 和一个正常数 Γ,使得对 $\tau \in T$,有 $|W(t+\tau,s+\tau) - W(t,s)| \leqslant \varepsilon\Gamma e^{-\frac{\alpha}{2}(t-s)}$.

引理 2[9] (压缩映射原理)假设 E 是 Banach 空间 D 的闭子集,$T: E \longrightarrow E$ 是压缩算子,即对任意的 $x,y \in E$,有

$$|Tx - Ty| \leqslant \alpha|x-y|, \alpha \in (0,1).$$

则 T 在 E 中有唯一不动点.

2 主要结果

定理 1 假设下述条件满足:

(1) 条件(H_1)~(H_4)成立;

(2) 对任意的 $k \in Z$,都有 $I_k(0) \equiv 0$;

(3) $\lim\limits_{t\to+\infty}\sum\limits_{\tau_k<t}L(\tau_k) \leqslant c$;

(4) 若 $0 < K = \dfrac{1}{\alpha}\sum\limits_{i=1}^{n}U_i + \dfrac{c}{1-e^{-\alpha\theta}} < 1$.

则系统(1)存在唯一的指数稳定的概周期解.

证明 首先定义 $X = \{x(t): x(t) \in PC(R,R)$ 且 $x(t)$ 为概周期函数$\}$,其范数 $\|x\| = \sup\limits_{t\in R}|x(t)|$,则 X 是一个 Banach 空间.

然后在 X 中定义一个算子 ϕ:

$$\phi x(t) = \int_{-\infty}^{t} W(t,s)\sum_{i=1}^{n}\beta_i(s)e^{-\gamma_i(s)x(s-h)}\mathrm{d}s + \sum_{\tau_k<t}W(t,\tau_k)I_k(x(\tau_k)), \tag{8}$$

其中 $W(t,s) = e^{\int_t^s a(\delta)\mathrm{d}\delta}$ 是系统(6)的柯西矩阵.

设 $E = \{x \mid x \in X, \|x\| \leqslant \rho\}$,其中 $\rho \geqslant \dfrac{1}{\alpha}\sum\limits_{i=1}^{n}U_i/(1-\dfrac{c}{1-e^{-\alpha\theta}}) > 0$,则 E 是 X 的一个有界闭子集.

为了应用压缩映射原理,我们分两步来证明.

第 1 步 证明 ϕ 是 E 到 E 的算子.

一方面,对任意的 $x \in E$,由定理 1 的条件(1),(2),(3)和引理 1 有

$$\|\phi x(t)\| = \sup_{t\in R}\left|\int_{-\infty}^{t} W(t,s)\sum_{i=1}^{n}\beta_i(s)e^{-\gamma_i(s)x(s-h)}\mathrm{d}s + \sum_{\tau_k<t} W(t,\tau_k)I_k(x(\tau_k))\right| \leqslant$$

$$\sup_{t\in R}\Big[\int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\sum_{i=1}^{n}|\beta_i(s)|\, e^{-\gamma_i(s)x(s-h)}\mathrm{d}s + \sum_{\tau_k<t} e^{-\alpha(t-\tau_k)}\,|I_k(x(\tau_k)) - I_k(0)|\Big] \leqslant$$

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}U_i + \frac{1}{1-e^{-\alpha\theta}}\sum_{\tau_k<t}L(\tau_k)\|x(\tau_k)\| \leqslant$$

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}U_i + \frac{c\|x\|}{1-e^{-\alpha\theta}}.$$

因为 $x\in E$,**由** E **的定义,可得**

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}U_i + \frac{c\|x\|}{1-e^{-\alpha\theta}} \leqslant \rho,$$

即

$$\|\phi x(t)\| \leqslant \rho. \tag{9}$$

另一方面,对任意 $\varepsilon>0$,**再由定理** 1 **条件**(1),(2),(3) **和引理** 1 **有**

$$\|\phi x(t+\tau) - \phi x(t)\| = \sup_{t\in R}\Big|\int_{-\infty}^{t+\tau} W(t+\tau,s)\sum_{i=1}^{n}\beta_i(s)e^{-\gamma_i(s)x(s-h)}\mathrm{d}s + \sum_{\tau_k<t+\tau} W(t+\tau,\tau_k)I_k(x(\tau_k)) - \int_{-\infty}^{t} W(t,s)\sum_{i=1}^{n}\beta_i(s)e^{-\gamma_i(s)x(s-h)}\mathrm{d}s -$$

$$\sum_{\tau_k<t} W(t,\tau_k)I_k(x(\tau_k))\Big| = \sup_{t\in R}\Big|\int_{-\infty}^{t} W(t+\tau,s+\tau)\sum_{i=1}^{n}\beta_i(s+\tau)e^{-\gamma_i(s+\tau)x(s+\tau-h)}\mathrm{d}s + \sum_{\tau_k<t} W(t+\tau,\tau_{k+q})I_{k+q}(x(\tau_{k+q})) - \int_{-\infty}^{t} W(t,s)\sum_{i=1}^{n}\beta_i(s)e^{-\gamma_i(s)x(s-h)}\mathrm{d}s -$$

$$\sum_{\tau_k<t} W(t,\tau_k)I_k(x(\tau_k))\Big| \leqslant \sup_{t\in R}\int_{-\infty}^{t}|W(t+\tau,s+\tau) - W(t,s)\|\sum_{i=1}^{n}\beta_i(s+\tau)e^{-\gamma_i(s+\tau)x(s+\tau-h)}|\,\mathrm{d}s +$$

$$\sup_{t\in R}\int_{-\infty}^{t}|W(t,s)\|\sum_{i=1}^{n}\beta_i(s+\tau)e^{-\gamma_i(s+\tau)x(s+\tau-h)} - \sum_{i=1}^{n}\beta_i(s)e^{-\gamma_i(s)x(s-h)}|\,\mathrm{d}s + \sup_{t\in R}\Big[\sum_{\tau_k<t}|W(t+\tau,\tau_{k+q}) - W(t,\tau_k)\|I_{k+q}(x(\tau_{k+q}))|\Big] + \sup_{t\in R}\Big[\sum_{\tau_k<t}|W(t,\tau_k)\|I_{k+q}(x(\tau_{k+q})) - I_k(x(\tau_k))|\Big] \leqslant$$

$$\sup_{t\in R}\int_{-\infty}^{t}\varepsilon\Gamma e^{-\frac{\alpha}{2}(t-s)}\,|\sum_{i=1}^{n}\beta_i(s+\tau)e^{-\gamma_i(s+\tau)x(s+\tau-h)}|\,\mathrm{d}s + \sup_{t\in R}\int_{-\infty}^{t}e^{-\alpha(t-s)}\,|\sum_{i=1}^{n}\beta_i(s+\tau)e^{-\gamma_i(s+\tau)x(s+\tau-h)} - \sum_{i=1}^{n}\beta_i(s)e^{-\gamma_i(s)x(s-h)}|\,\mathrm{d}s +$$

$$\sup_{t\in R}\sum_{\tau_k<t}\varepsilon\Gamma e^{-\frac{\alpha}{2}(t-\tau_k)}\,|I_{k+q}(x(\tau_{k+q})) - I_{k+q}(0)| + \sup_{t\in R}\sum_{\tau_k<t}e^{-\alpha(t-\tau_k)}\,\|I_{k+q}(x(\tau_{k+q})) - I_k(x(\tau_k))| \leqslant \sup_{t\in R}\int_{-\infty}^{t}\varepsilon\Gamma e^{-\frac{\alpha}{2}(t-s)}\,|\sum_{i=1}^{n}\beta_i(s+\tau)e^{-\gamma_i(s+\tau)x(s+\tau-h)}|\,\mathrm{d}s + \sup_{t\in R}\int_{-\infty}^{t}e^{-\alpha(t-s)}\,|\sum_{i=1}^{n}\beta_i(s+\tau)e^{-\gamma_i(s+\tau)x(s+\tau-h)} - \sum_{i=1}^{n}\beta_i(s)e^{-\gamma_i(s)x(s-h)}|\,\mathrm{d}s +$$

$$\sup_{t\in R}\sum_{\tau_k<t}\varepsilon\Gamma e^{-\frac{\alpha}{2}(t-\tau_k)}\,|I_{k+q}(x(\tau_{k+q})) - I_{k+q}(0)| + \sup_{t\in R}\sum_{\tau_k<t}e^{-\alpha(t-\tau_k)}\big[|I_{k+q}(x(\tau_{k+q})) - I_k(x(\tau_{k+q}))| + |I_k(x(\tau_{k+q})) - I_k(x(\tau_k))|\big] \leqslant \varepsilon\Gamma\frac{2}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}U_i +$$

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}\Big[n + \sum_{i=1}^{n}U_i(\rho+V_i)\Big] + \frac{\varepsilon\Gamma c\rho}{1-e^{-\frac{\alpha\theta}{2}}} + \frac{\varepsilon(1+c)}{1-e^{-\alpha\theta}} = \varepsilon K_1, \tag{10}$$

其中

$$K_1 = \Gamma\frac{2}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}U_i + \frac{1}{\alpha}\Big[n + \sum_{i=1}^{n}U_i(\rho+V_i)\Big] + \frac{\Gamma c\rho}{1-e^{-\frac{\alpha\theta}{2}}} + \frac{(1+c)}{1-e^{-\alpha\theta}}.$$

因 ε **充分小,则** $K_1\varepsilon$ **也充分小,所以由**(9) **式和**(10) **式可知** $\phi(x)\in E$. **即** ϕ **是** E **到** E **的算子.**

第 2 步　证明算子 ϕ **是一个压缩映射.**

对任意的 $x,y\in E$ **由定理** 1 **条件和引理** 1 **有**

$$\|\phi x(t) - \phi y(t)\| = \sup_{t\in R}\Big|\int_{-\infty}^{t} W(t,s)\sum_{i=1}^{n}\beta_i(s)e^{-\gamma_i(s)x(s-h)}\mathrm{d}s + \sum_{\tau_k<t}W(t,\tau_k)I_k(x(\tau_k)) - \int_{-\infty}^{t} W(t,s)\sum_{i=1}^{n}\beta_i(s)e^{-\gamma_i(s)y(s-h)}\mathrm{d}s - \sum_{\tau_k<t}W(t,\tau_k)I_k(y(\tau_k))\Big| \leqslant \sup_{t\in R}\Big[\int_{-\infty}^{t}e^{-\alpha(t-s)}\sum_{i=1}^{n}|\beta_i(s)|\cdot$$

$$(e^{-\gamma_i(s)x(s-h)} - e^{-\gamma_i(s)y(s-h)})\mathrm{d}s + \sum_{\tau_k<t}e^{-\alpha(t-\tau_k)}L(\tau_k)\cdot|x(\tau_k) - y(\tau_k)|\Big] \leqslant \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}U_i\|x-y\| +$$

$$\frac{c}{1-e^{-\alpha\theta}}\|x-y\| \leqslant \Big(\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}U_i + \frac{c}{1-e^{-\alpha\theta}}\Big)\|x-y\| = K\|x-y\|. \tag{11}$$

因此,由(11) **式知道,存在** $K = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}U_i + \frac{c}{1-e^{-\alpha\theta}} < 1$,**使得** $\|\phi x(t) - \phi y(t)\| \leqslant K\|x-y\|$ **成立,故** $\phi: E \longrightarrow E$ **是一个压缩映射.**

综上所述,算子 ϕ **满足引理**2 **所有的条件,所以** ϕ **在** E **上存在唯一不动点. 这个不动点就是系统**(1) **的概周期解.**

设 $y(t)$ **是系统**(1) **满足以下初值条件的任意一个解**

$$y(s;t_0,y_{t_0}) = y_{t_0}(s),\ y'(s;t_0,y_{t_0}) = y'_{t_0}(s),\ s\in(-\infty,t_0];\ y(t_0^+;t_0,y_{t_0}) = y(t_0),\ y'(t_0^+;t_0,y_{t_0}) = y'(t_0). \tag{12}$$

我们有

$$x(t)-y(t)=W(t,t_0)(x_0-y_0)+\int_{t_0}^{t}W(t,s)\sum_{i=1}^{n}\beta_i(s)(e^{-\gamma_i(s)x(s-h)}-e^{-\gamma_i(s)y(s-h)})\mathrm{d}s+\sum_{\tau_k<t}W(t,\tau_k)(I_k(x(\tau_k))-I_k(y(\tau_k))). \tag{13}$$

则

$$\|x(t)-y(t)\|\leqslant e^{-\alpha(t-t_0)}\|x_0-y_0\|+\int_{t_0}^{t}e^{-\alpha(t-t_0)}\sum_{i=1}^{n}U_i\|x(s)-y(s)\|\mathrm{d}s+\frac{c}{1-e^{-\alpha\theta}}\|x-y\|. \tag{14}$$

由 Gronwall-Bellman 引理[10]，可得

$$\|x(t)-y(t)\|\leqslant|x_0-y_0|\exp(-\alpha+\sum_{i=1}^{n}U_i+\frac{cK}{1-e^{-\alpha\theta}})(t-t_0).$$

即系统(1)的解是指数稳定的.

例 1 考虑如下非线性脉冲时滞微分方程：

$$\begin{cases} x'(t)=-(20-\sin\sqrt{2}t)x(t)+ \\ \qquad |\sin\sqrt{3}t|\exp(-|\sin\sqrt{2}\,t|x(t-\frac{1}{6})), \\ \qquad t\neq\tau_k=k^2+1,k\in Z, \\ \triangle x(\tau_k)=-\frac{1}{48}+\frac{1}{144}\exp(\sin\frac{1}{2k^2+1}x(\tau_k)), \\ \qquad \tau_k=k^2+1,k\in Z. \end{cases} \tag{15}$$

其中，$\alpha(t)=20-\sin\sqrt{2}t>0$，容易验证系统(15)满足条件 $H_1\sim H_3$，对于条件 H_4 有

$$|I_k(x)-I_k(y)|<\frac{1}{48}\sin\frac{1}{2k^2+1}|x-y|.$$

其中，令 $L(t)=\frac{1}{48}\sin\frac{1}{2k^2+1}$，即条件 H_4 也满足.

由

$$\lim_{t\to+\infty}\sum_{\tau_k<t}L(\tau_k)=\lim_{t\to+\infty}\sum_{\tau_k<t}\frac{1}{48}\sin\frac{1}{2k^2+1}\leqslant c \tag{16}$$

容易得 $0<K=\frac{1}{\alpha}+\frac{c}{1-e^{-\alpha\theta}}<1$ 成立.

显然系统(15)满足定理 1 的条件，因此系统(15)存在唯一的指数稳定的概周期解 $x(t)$.

注 例 1 是非线性脉冲时滞微分方程，如果利用文献[6]中定理 1 的条件是不能保证系统(15)存在唯一的指数稳定的概周期解，也就是说线性脉冲的条件并不能保证非线性脉冲也成立. 显然文献[6]中关于线性脉冲的情形可以作为本文结果的推论.

参考文献：

[1] Yang Z, Xu D. Existence and exponential stability of periodic solution for impulsive delay differential equations and applications[J]. Nonlinear Anal(TMA), 2006, 64(1): 130-145.

[2] Liu X, Li G, Luo G. Positive periodic solution for a two-species ratio-dependent predator-prey system with time delay and impulse[J]. J Math Anal Appl, 2007, 325(1): 715-723.

[3] Stamov G T, Alzabut J O, Atanasov P, et al. Almost periodic solutions for an impulsive delay model of price fluctuations in commodity markets[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2011, 12(6): 3170-3176.

[4] Xia Y H, Cao J D, Huang Z K. Existence and exponential stability of almost periodic solution for shunting inhibitory cellular neural networks with impulses[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2007, 34(5): 1599-1607.

[5] Zhang H Y, Xia Y H. Existence and exponential stability of almost periodic solution for Hopfield-type neural networks with impulse[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008, 37(4): 1076-1082.

[6] Stamov G T. On the existence of almost periodic solutions for the impulsive Lasota-Wazewska model[J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(4): 516-520.

[7] Samoilenko A M, Perestyuk N A. Differential equations with impulse effect[M]. Kiev: Visca Skola, 1987.

[8] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of impulsive differential equations[M]. Singapore N J, London: World Scientific, 1989.

[9] 时宝，张德存，盖明久. 微分方程理论及其应用[M]. 北京：国防工业出版社，2005: 1-5.

[10] Samoilenko A M, Perestyuk N A. Differential equations with impulsive effect[M]. Singapore: World Scientific, 1995.

(责任编辑：尹 闯)