DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2011.04.016

广西科学 Guangxi Sciences 2011,18(4):339～341,344

广义线性模型中极大拟似然估计的弱相合性*

Weak Consistency of Quasi-Maximum Likelihood Estimate in Generalized Linear Models

肖泽青,王健发

XIAO Ze-qing,WANG Jian-fa

(**广西大学数学与信息科学学院,广西南宁** 530004)

(School of Mathematics and Information Sciences, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004,China)

摘要:在 $\bar{\lambda}_n = O(\underline{\lambda}_n)$ 及其它正则条件满足时,用压缩映射原理证明一般联系函数多维广义线性模型的极大拟似然估计(MQLE)的弱相合性,将误差为独立序列的情形推广到相依序列,其中 $\bar{\lambda}_n(\underline{\lambda}_n)$ 为矩阵 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i X_i^T$ 的最大(最小)特征根.

关键词:广义线性模型　拟似然估计　弱相合性

中图法分类号:O212.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2011)04-0339-03

Abstract: Under the assumption of $\bar{\lambda}_n = O(\underline{\lambda}_n)$ or some other regular conditions, the weak consistency of quasi-likelihood equation was proven in a generalized linear model with $q\times 1$ responses, bounded and fixed $p\times q$ regressors X_i and general link function by means of the contractive mappings, and the error was extended to the dependent sequence from the independent sequence. Thereinto, $\bar{\lambda}_n(\underline{\lambda}_n)$ denotes the largest (smallest) eigenvalue of the matrix $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i X_i^T$.

Key words: generalized linear model, maximum quasi-likelihood estimator, weak consistency

广义线性模型(GLM)的理论是经典线性模型理论的重要推广,自从 Nelder 等[1]引入此模型以来,它已应用于许多领域,如分类数据模型,随机效应模型,生存空间模型等.

假设 $q\times 1$ 响应变量 y_i 是相互独立的,协变量 X_i 是已知的 $p\times q$ 矩阵,y_i 服从指数分布

$$f(y_i \mid \theta_i) = c(y_i)\exp(\theta_i^T y_i - b(\theta_i)),\ i = 1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

还假设 y_i 的期望 μ_i 与线性预测因子 $X_i^T\beta$ 有下列关系:

$$\mu_i = h(X_i^T\beta), \tag{2}$$

其中 $h: R^q \to R^q$ 是充分光滑的一一映射,$\beta \in R^p$ 是未知的回归参数,β_0 是它的真值. 函数 h 的逆称为联系函数. 对数似然方程

$$\sum_{i=1}^{n} X_i H(X_i^T\beta)\left[\sum(X_i^T\beta)\right]^{-1}(y_i - h(X_i^T\beta)) = 0 \tag{3}$$

的根称为 β_0 的极大似然估计(MLE),其中

$$H(t) = \partial h^T(t)/\partial t,\ \sum(X_i^T\beta) = \mathrm{COV}(y_i).$$

由 $b(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 可求得 $\Sigma(\cdot)$. 在许多情形下假定 y_i 服从指数分布(1)是不切实际的,而且 $\Sigma(\cdot)$ 的确切表达式不知道. 但如果期望(2)假定是正确的,我们仍可用 Wedderburn[2] 引入的拟似然方法,用拟似然方程

$$\mathrm{Ln}(\beta) = \sum_{i=1}^{n} X_i H(X_i^T\beta)\Lambda(X_i^T\beta)(y_i - h(X_i^T\beta)) = 0 \tag{4}$$

的根估计 β_0,并称它为极大拟似然估计(MQLE),其中 $\Lambda(\cdot)$ 是适当选择的 $q\times q$ 矩阵值函数.

关于 GLM 的极大似然估计(MLE)或极大拟似然估计的渐近理论,已有不少讨论[3~8]. 当误差独立时,Fahrmeir 等[3] 证明:若 $\sup_{i\geqslant 1}\|X_i\| < \infty$,对自然联系函数情形有 $\underline{\lambda}_n > c\bar{\lambda}^{\alpha}$ (其中 $\alpha > 1/2$),对一般联系函数情形有 $\underline{\lambda}_n > c\bar{\lambda}_n$,且其它一些正则条件满足

收稿日期:2011-04-30

作者简介:肖泽青(1983-),男,硕士研究生,主要从事广义线性模型研究。

*国家自然科学基金项目(11061002)资助。

时，则 MLE 是强相合的；对 $q\times 1$ 响应变量和一般的联系函数，岳丽等[4]证明：若 $\sup_{i\geqslant 1}\|X_i\|<\infty$，对某个 $\alpha\in(3/4,1]$ 有 $\underline{\lambda}_n>c\bar{\lambda}_n^{\alpha}$，$\sup_{i\geqslant 1}\mathrm{E}\|y_i\|^{7/3}<\infty$，且其它一些正则条件满足时，则以概率 1，当 n 充分大时，拟似然方程有一解 $\hat{\beta}_n$，且 $\hat{\beta}_n-\beta_0=O(n^{-(\alpha-1/2)}(\log\log n)^{1/2})$；Chang[5]研究了 $q=1$，且设计阵是自适应的情形，在 $\sup_{i\geqslant 1}\|X_i\|<\infty$ a.s.，$\underline{\lambda}_n>cn^{\alpha}$ a.s.（对某个 $\alpha\in(1/2,1]$），并在其他一些正则条件下，得到了 β_0 的 MQLE 的强收敛速度；尹长明等[6]证明了若 $\lim\inf_{n\to\infty}\underline{\lambda}_n/\bar{\lambda}_n^{1/2}(\log\bar{\lambda}_n)^{1/2+\alpha}>0(\alpha>0$，响应变量是多维），则 MQLE 是强相合的；张三国等[7]在假定误差方差有界，分别在误差不相关和独立的情形下就自然联系函数证明了拟似然估计的弱相合性；邓春亮等[8]将文献[7]的结论推广到了非自然联系函数情形.

本文讨论了相依样本情形广义线性模型极大拟似然估计的弱相合性，将独立样本推广到相依样本.

1 相关引理

设文中所用到的 c 在不同的地方代表不同的正常数且独立于 n，定义 T 为一个矩阵或向量的转置. 记 $\{e_i=y_i-h(X_i^T\beta_0),i=1,2,\cdots,n\}$ 为残差，$\mathrm{E}(e_i)=0$. $\|\cdot\|$ 表示 Frobenius 范数，即矩阵 $A=(a_{i,j})_{p\times p}$，$\|A\|=(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}a_{i,j}^2)^{\frac{1}{2}}$. $\bar{\lambda}_n$，$\underline{\lambda}_n$ 表示方阵 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_iX_i^T$ 的最大，最小特征根. 定义：A 为正定矩阵，则 $A^{1/2}$ 为其平方根，满足 $(A^{1/2})^2=A$，$A^{-1/2}=(A^{1/2})^{-1}$.

引入下列假设：

(A1) 对每个 $t\in R^q$，有 $\Lambda(t)>0$ 和 $\det H(t)\neq 0$，其中 $H(t)=\partial h^T(t)/\partial t$，$h(t)$ 是列向量，$\Lambda(t)$ 的每一个元素的一阶导函数连续，$h(t)$ 的每个元素的二阶导函数连续.

(A2) $\sup_{i\geqslant 1}\|X_i\|<\infty$ 且 $\bar{\lambda}_n=O(\underline{\lambda}_n)$，$\underline{\lambda}_n\to\infty$ 其中 X_i 是设计阵.

(A3) $y_1,y_2,\cdots$ 是相关的 q 维响应变量序列，满足对任意的 j，$\rho_{i'-i,j}$ 为 $e_{i',j}$ 与 $e_{i,j}$ 的相关系数，$\sum_{k=1}^{+\infty}|\rho_{k,j}|<+\infty$，且对某个 $r\geqslant 2$ 有 $\sup_{i\geqslant 1}E\|e_i\|^r<\infty$，其中 $e_{i,j}$ 表示 e_i 的第 j 个分量.

引理 1.1[9] 设 X 是距离空间，F 是 X 到它自身的一个映射，如果存在 k，$0\leqslant k<1$，对一切 $x,y\in \mathrm{X}$，$\|F(x)-F(y)\|\leqslant k\|x-y\|$，则存在唯一的不动点 x^*，使得 $F(x^*)=x^*$.

引理 1.2[6] 设 $A(t)$ 是定义在 R^q 的一个子集 T 上的 $q\times q$ 对称矩阵值的连续函数，且 $\lambda_1(t)\leqslant\lambda_2(t)\leqslant\cdots\leqslant\lambda_q(t)$ 为 $A(t)$ 的特征根，则每个 $\lambda_i(t)$ 都是 t 的连续函数. 进一步，若 T 为紧集，且对每个 $t\in T$，有 $\Lambda(t)>0$，则

$$\inf_{t\in T}\lambda_1(t)>0,\sup_{t\in T}\lambda_q(t)<\infty.$$

引理 1.3[10] 令 $X=(x_1,\cdots,x_q)^T$，$F=(f_1,\cdots,f_q)^T$. 若 $f_i=f_i(x_1,\cdots,x_q)(i=1,\cdots,q)$ 在凸集 $G\subset R^p$ 中是连续可微的，而 $\alpha,\beta\in G$ 则

$$F(\beta)-F(\alpha)=\left(\int_0^1\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_{X=\alpha+t(\beta-\alpha)}\mathrm{d}t\right)_{q\times q}(\beta-\alpha),$$

$0<t<1$.

2 主要结果

定理 1 假定条件(A1)～(A3)成立，那么存在一个随机变量序列 $\hat{\beta}_n$，使得 $P(L_n(\hat{\beta}_n)=0)\to 1$，且当 $n\to\infty$，

$$\hat{\beta}_n\xrightarrow{P}\beta_0. \tag{5}$$

证明 记 $G_n=\sum_{i=1}^{n}X_iH_i\Lambda_iH_i^TX_i^T$，其中 $H_i=H(X_i^T\beta_0)$，$\Lambda_i=\Lambda(X_i^T\beta_0)$，任取 $\delta>0$，并设 $N_n(\beta)=\{\beta:\|G_n^{1/2}(\beta-\beta_0)\|\leqslant\delta\}$. 构造 $F_n(\beta)=G_n^{-1}L_n(\beta)+\beta$，$\forall\beta_1,\beta_2\in N_n(\beta)$.

由引理 1.3 知

$$F_n(\beta_1)-F_n(\beta_2)=G_n^{-1}(L_n(\beta_1)-L_n(\beta_2))+(\beta_1-\beta_2)=-G_n^{-1}Q_n^*(\beta_1)(\beta_1-\beta_2)+(\beta_1-\beta_2)=(I-G_n^{-1}Q_n^*(\beta_1))(\beta_1-\beta_2),$$

其中

$$Q_n^*(\beta)=\int_0^1Q_n(\beta_0+t(\beta-\beta_0))\mathrm{d}t,Q_n(\beta)=-\partial L_n(\beta)/\partial\beta^T.$$

因此

$$\|F_n(\beta_1)-F_n(\beta_2)\|\leqslant\|I-G_n^{-\frac{1}{2}}Q_n^*(\beta_1)G_n^{-\frac{1}{2}}\|\|G_n^{-\frac{1}{2}}\|\|G_n^{\frac{1}{2}}\|\|\beta_1-\beta_2\|. \tag{6}$$

从而由引理 1.1 知，只需证依概率有下式成立则命题得证.

$$\|I-G_n^{-\frac{1}{2}}Q_n^*(\beta_1)G_n^{-\frac{1}{2}}\|\|G_n^{-\frac{1}{2}}\|\|G_n^{\frac{1}{2}}\|<1. \tag{7}$$

由假定(A1)，(A2)及引理 1.2 知，存在正常数 $c_1,c_2(c_1<c_2)$ 使得

$$\lambda_{\min}(H_i\Lambda_iH_i^T)>c_1,\lambda_{\max}(H_i\Lambda_iH_i^T)<c_2, \tag{8}$$

从而可得

$$\lambda_{\min}(G_n)=O(\underline{\lambda}_n),\lambda_{\max}(G_n)=O(\bar{\lambda}_n). \tag{9}$$

又由于 δ 是任意正的常数，$\bar{\lambda}_n=O(\underline{\lambda}_n)$，从而欲证(7)式，只需证

$$\sup_{\beta\in N_n(\beta)}\|I-G_n^{-\frac{1}{2}}Q_n(\beta)G_n^{-\frac{1}{2}}\|\xrightarrow{p}0. \tag{10}$$

记 $H(t)\Lambda(t)$ 的第 j 列为 $w_j(t)$，$y_{i,j}$ 和 $h_{i,j}(\beta)$ 分别为 y_i 和 $h_i(\beta)$ 的第 j 个元素．令

$W_j(t)=\partial w_j(t)/\partial t^T, W_{i,j}(\beta)=W_j(X_i^T\beta)$,
$H_i(\beta)=H(X_i^T\beta), \Lambda_i(\beta)=\Lambda(X_i^T\beta), G_n(\beta)=\sum_{i=1}^n X_i H_i(\beta)\Lambda_i(\beta)H_i^T(\beta)X_i^T, W_{i,j}=W_{i,j}(\beta_0), h_{i,j}=h_{i,j}(\beta_0), e_{i,j}=y_{i,j}-h_{i,j}$.

记

$$G_n^{-\frac{1}{2}}Q_n(\beta)G_n^{-\frac{1}{2}}-I_p=A_n(\beta)-B_n-C_n(\beta)-D_n(\beta), \tag{11}$$

其中

$A_n(\beta)=G_n^{-\frac{1}{2}}G_n(\beta)G_n^{-\frac{1}{2}}-I_p$,

$B_n=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^q G_n^{-\frac{1}{2}}X_iW_{i,j}X_i^TG_n^{-\frac{1}{2}}e_{i,j}$,

$C_n(\beta)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^q G_n^{-\frac{1}{2}}X_i(W_{i,j}(\beta)-W_{i,j})X_i^TG_n^{-\frac{1}{2}}e_{i,j}$,

$D_n(\beta)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^q G_n^{-\frac{1}{2}}X_iW_{i,j}X_i^TG_n^{-\frac{1}{2}}(h_{i,j}-h_{i,j}(\beta))$.

先证明当 $n\to\infty$ 时，$A_n(\beta)\to 0$．注意到 $\lambda_{\min}(G_n)\to\infty$ 以及对任意给定的 $\delta>0$，从而当 $n\to\infty$ 时，有

$$\sum_{i=1}^n\|G_n^{-\frac{1}{2}}X_i\|^2\leqslant \mathrm{tr}\sum_{i=1}^n G_n^{-\frac{1}{2}}X_iX_i^TG_n^{-\frac{1}{2}}\leqslant cp,$$

$$\sup_{\beta\in N_n(\beta),i\geqslant 1}\|X_i^T\beta-X_i^T\beta_0\|\to 0. \tag{12}$$

由假定(A1)知，矩阵 $T(t):=H_i(t)\Lambda_i(t)H_i^T(t)$ 为连续、取值为正、对称且定义在紧集内的矩阵函数，从而由引理1.2及(12)式得

$$\max_{\beta\in N_n(\beta)}\|A_n(\beta)\|\leqslant\max_{\beta\in N_n(\beta)}\sup_{i\geqslant 1}\|T(X_i^T\beta)-T(X_i^T\beta_0)\|\sum_{i=1}^n\|G_n^{-\frac{1}{2}}X_i\|^2\to 0. \tag{13}$$

再证明当 $n\to\infty$ 时，$\|B_n\|\xrightarrow{p}0$．考虑到 B_n 为 q 个矩阵之和，记第 j 个矩阵为

$$B_{n,j}:=\sum_{i=1}^n G_n^{-\frac{1}{2}}X_iW_{i,j}X_i^TG_n^{-\frac{1}{2}}e_{i,j}, j=1,2,\cdots,q,$$

显然只需要证明当 $n\to\infty$ 时，

$$\|B_{n,j}\|\xrightarrow{p}0. \tag{14}$$

又注意到 $E\lambda_t^TB_{n,j}\lambda_s=0$，由 Markov 不等式，只要证对任意的 $s,t=1,2,\cdots,p$，有

$$\mathrm{Var}(\lambda_t^TB_{n,j}\lambda_s)\to 0, \tag{15}$$

其中 λ_s 是第 s 个元素为1，其余元素为0的 $p\times 1$ 向量.

令 $\mathrm{Var}(e_{i,j})=\sigma_{i,j}^2$，根据条件(A3)，存在一个常数 c，使得

$$\sup_{i,j}\sigma_{i,j}^2<c. \tag{16}$$

又由于误差为相依序列，从而

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}(\lambda_t^TB_{n,j}\lambda_s)=\\&\mathrm{Var}(\lambda_t^T\sum_{i=1}^n G_n^{-\frac{1}{2}}X_iW_{i,j}X_i^TG_n^{-\frac{1}{2}}\lambda_se_{i,j})=\\&\sum_{i=1}^n(\lambda_t^TG_n^{-\frac{1}{2}}X_iW_{i,j}X_i^TG_n^{-\frac{1}{2}}\lambda_s)^2\sigma_{i,j}^2+\\&2\sum_{i<i'}\lambda_t^TG_n^{-\frac{1}{2}}X_iW_{i,j}X_i^TG_n^{-\frac{1}{2}}\lambda_s\lambda_t^TG_n^{-\frac{1}{2}}X_{i'}W_{i,j}X_i^TG_n^{-\frac{1}{2}}\lambda_s\cdot\\&\mathrm{Cov}(e_{i,j},e_{i',j})=\mathrm{I}+\mathrm{II}.\end{aligned}$$

由条件(A2)及(12)式和(16)式可得，

$$\begin{aligned}&\mathrm{I}=\sum_{i=1}^n(\lambda_t^TG_n^{-\frac{1}{2}}X_iW_{i,j}X_i^TG_n^{-\frac{1}{2}}\lambda_s)^2\sigma_{i,j}^2\leqslant\\&c\sup_{i,j}\|W_{i,j}\|^2\max_i\|\lambda_t^TG_n^{-\frac{1}{2}}X_i\|^2\cdot\\&\sum_{i=1}^n\|X_i^TG_n^{-\frac{1}{2}}\lambda_s\|^2\to 0.\end{aligned} \tag{17}$$

由条件(A3)及(17)式可得，

$$\begin{aligned}&\mathrm{II}=\\&2\sum_{i<i'}\lambda_t^TG_n^{-\frac{1}{2}}X_iW_{i,j}X_i^TG_n^{-\frac{1}{2}}\lambda_s\lambda_t^TG_n^{-\frac{1}{2}}X_{i'}W_{i,j}X_i^TG_n^{-\frac{1}{2}}\lambda_s\cdot\\&\mathrm{Cov}(e_{i,j},e_{i',j})\leqslant 2\sum_{i<i'}|\sigma_{i,j}\sigma_{i',j}\lambda_t^TG_n^{-\frac{1}{2}}X_iW_{i,j}\cdot\\&X_i^TG_n^{-\frac{1}{2}}\lambda_s\lambda_t^TG_n^{-\frac{1}{2}}X_{i'}W_{i,j}X_i^TG_n^{-\frac{1}{2}}\lambda_s\rho_{i'-i,j}|\leqslant\\&c\sum_{i<i'}[(\lambda_t^TG_n^{-\frac{1}{2}}X_iW_{i,j}X_i^TG_n^{-\frac{1}{2}}\lambda_s)^2+\\&(\lambda_t^TG_n^{-\frac{1}{2}}X_{i'}W_{i,j}X_i^TG_n^{-\frac{1}{2}}\lambda_s)^2]/2\,|\rho_{i'-i,j}|\leqslant\\&c\sum_i(\lambda_t^TG_n^{-\frac{1}{2}}X_iW_{i,j}X_i^TG_n^{-\frac{1}{2}}\lambda_s)^2\sum_k|\rho_{k,j}|\to 0.\end{aligned} \tag{18}$$

从而(14)式成立.

其次证明 $\|C_n(\beta)\|\xrightarrow{p}0$. 当 $n\to\infty$ 时，由条件(A1)和(A2)知，

$$\sup_{\beta\in N_n(\beta),i\geqslant 1}\|W_{i,j}(\beta)-W_{i,j}\|\to 0. \tag{19}$$

由假定(A3)及(12)式和(19)式可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\max_{\beta\in N_n(\beta)}\|C_n(\beta)\|\leqslant\\&\sum_{j=1}^q\sup_{\beta\in N_n(\beta),i\geqslant 1}\|W_{i,j}(\beta)-\\&W_{i,j}\|\sup_i\mathrm{E}|e_{i,j}|\sum_{i=1}^n\|G_n^{-\frac{1}{2}}X_i\|^2\to 0.\end{aligned}$$

所以，当 $n\to\infty$，由 Markov 不等式可知，

$$\max_{\beta\in N_n(\beta)}\|C_n(\beta)\|\xrightarrow{p}0. \tag{20}$$

只要注意到 $h(t)$ 的每个元素的二阶导数连续及(12)式，则同理可证当 $n\to\infty$ 时，

$$\max_{\beta\in N_n(\beta)}\|D_n(\beta)\|\xrightarrow{p}0. \tag{21}$$

由(13)式，(14)式，(20)式和(21)式知(10)式成立，根据引理1.1知命题成立.

参考文献：

[1] Nelder J A, Wedderburn R W M. Generalized linear models[J]. J Roy Statist Soc, Ser A, 1979, 135: 370-384.

(下转第344页 Continue on page 344)

$r\alpha+\frac{r}{2}-2<-1$. 所以 $J_1\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{p\alpha-r\alpha-2+r/2}<\infty$,

$$J_2=\sum_{n=1}^{\infty}n^{p\alpha-r\alpha-1}((E|n^{\alpha}|^rI(|X_i|>n^{\alpha})+$$
$$E|X_i|^rI(|X_i|\leqslant n^{\alpha}))\leqslant$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{p\alpha-r\alpha-1}E|X_1|^rI(|X_1|>n^{\alpha})+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{p\alpha-r\alpha-1}\mathrm{E}|X_1|^rI(|X_1|\leqslant n^{\alpha})=:J_3+J_4.$$

因为 $p\alpha-r\alpha-2+\frac{r}{2}<-1$,得 $p\alpha-r\alpha-1<-\frac{r}{2}<-1$,所以

$$J_3=\sum_{n=1}^{\infty}n^{p\alpha-r\alpha-1}E|X_1|^pI(|X_1|>n^{\alpha})<\infty,$$
$$J_4=\sum_{n=1}^{\infty}n^{p\alpha-r\alpha-1}\sum_{i=1}^{n}E|X_1|^rI((i-1)^{\alpha}<$$
$$|X_1|\leqslant i^{\alpha})=\sum_{i=1}^{\infty}E|X_1|^rI((i-1)^{\alpha}<|X_1|\leqslant$$
$$i^{\alpha})\sum_{n=1}^{\infty}n^{p\alpha-r\alpha-1}\leqslant C\sum_{i=1}^{\infty}E|X_1|^rI((i-1)^{\alpha}<$$
$$|X_1|\leqslant i^{\alpha})i^{p\alpha-r\alpha}\leqslant CE|X_1|^p<\infty.$$

当 $p<2$ 时,取 $r=2$. 因为 $r>p$,上式仍然成立,此时 $J_1=J_2<\infty$.

综上所述,定理 1 证明完毕.

参考文献:

[1] Jaogdev K, Proschan F. Negative association random variables with application[J]. Amm Statist,1983,11:286-295.

[2] Matula P. A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables[J]. Statistics and Probability Letters,1992,15:209-213.

[3] 吴群英. 同分布 NA 序列的完全收敛性[J]. 中国基础科学,1999(2-4):89-91.

[4] Chow Y S,Teicher H. Almost certain summability of independent identically disributed random variables[J]. Ann Math Statist,1971,42:401-404.

[5] Chow Y S,Lai T L. Limiting behavior of weighted sums of independent random variables[J]. Ann Probab,1973,1:810-824.

[6] Stout W F. Some results on the complete and almost sure convergence of linear combinations of independent random variables and martingale differences[J]. Ann Math Statist,1968,39:1549-1562.

[7] Liang H J,Su C. Complete convergence for weighted sums of NA sequences[J]. Statistics Probability Letters,1999,22(4):85-95.

[8] Baum L E,Katz M. Convergence rates in the law of large numbers[J]. Transactions of the American Mathematical Society,1965,120(11):108-123.

[9] Peligrad M,Gut A. Almost-sure results for a class of dependent rannndom variables[J]. Journal of Theoretical Probability,1999,12(1):87-104.

(责任编辑:尹　闯)

(上接第 341 页 Continue from page 341)

[2] Wedderburn R W M. Quasi-likelihood functions generalized linear models and the Gauss-Newton method[J]. Biometuika,1974,61:439-447.

[3] Fahrmeir L,Kanfmann H. Consistency and asymptotic normality of the maximum likelihood estimator in generalized linear models[J]. Ann Statist,1985,13: 324-368.

[4] 岳丽,陈希孺. 广义线性模型中拟似然估计的强相合性及收敛速度[J]. 中国科学:A 辑,2004,34(2):203-214.

[5] Chang Y I. Strong consistency of maximum quasi-likelihood estimate in generalized linear models via a last time [J]. Statist Probab Letters,1999,45:237-246.

[6] 尹长明,赵林城. 广义线性模型中极大拟似然估计的渐近正态性与强相合性[J]. 中国科学:A 辑,2005,35:1236-1250.

[7] 张三国,廖源. 关于广义线性模型拟似然估计弱相合性的几个问题[J]. 中国科学:A 辑,2007,37(11):1368-1376.

[8] 邓春亮,黄恒振. 广义线性模型中拟似然估计的弱相合性[J]. 重庆工学院学报,2009,23(12):131-133.

[9] 戴牧民,陈武华,张更荣. 实分析与泛函分析[M]. 北京:科学出版社,2007:28.

[10] Heuser H. Lehrbuch der analysis,teil 2[M]. Stuttgart:Teubner,1981:278.

(责任编辑:尹　闯)