DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2011.04.018

广西科学 Guangxi Sciences 2011,18(4):345～347

一类解析函数的系数估计和充分条件

Sufficient Condition and Coefficients Estimates of a Subclass of Analytic Function

傅秀莲[1],洪 敏[2]

FU Xiu-lian[1],HONG Min[2]

(1.广东工贸职业技术学院计算机系,广东广州 510510;2.揭阳职业技术学院,广东揭阳 522000)

(1. Department of Computer Science,Guangdong College of Industry and Commerce,Guangzhou,Guangdong,510510,China;2. Jieyang Vocational and Technical College,Jieyang,Guangdong,522000,China)

摘要:利用解析函数的性质和不等式的技巧,得到一个在单位圆内解析的函数类 $S_n(\gamma,\lambda,\beta)$ 的一个系数估计式和一个充分条件.

关键词:解析函数 系数估计 充分条件

中图法分类号:O174.51 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2011)04-0345-03

Abstract:The coefficients estimates and a sufficient condition are proven here for the class $S_n(\gamma,\lambda,\beta)$ of analytic functions in the open unit disk by using the properties of analytic functions and the technique of inequality in discussion.

Key words:analytic function,coefficients estimates,sufficient condition

用 A_n 表示在 $U=\{z:z\in C,|z|<1\}$ 上,具有如下形式的展开式

$$f(z)=z+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kz^k,n\in N=\{1,2,3,\cdots\} \quad (0.1)$$

的全体解析函数所构成的函数族. 用 P_n 表示在U上解析且形如

$$p(z)=1+\sum_{k=n}^{\infty}p_kz^k, \quad (0.2)$$

并满足 $\mathrm{Re}(p(z))>0(z\in U)$ 的全体函数所组成的函数类. 用 $M_n(\beta)$ 表示在 A_n 中满足条件 $\mathrm{Re}(\frac{zf'(z)}{f(z)})<\beta(z\in U,\beta>1)$ 的全体函数所组成的函数类. 用 $H_n(\alpha,\beta)$ 表示在 A_n 中满足条件 $\mathrm{Re}(\frac{\alpha z^2f''(z)}{f(z)}+\frac{zf'(z)}{f(z)})>\alpha\beta(\beta+\frac{n}{2}-1)+\beta-\frac{n\alpha}{2}(z\in U,\alpha\geqslant0,0\leqslant\beta<1)$ 的全体函数所组成的函数类. 文献[1]和文献[2]分别研究了 $M_n(\beta)$ 和 $H_n(\alpha,\beta)$ 的系数估计. 文献[3]定义了函数类 $SC(\gamma,\lambda,\beta)$,并研究它的系数估计. 其定义如下:设 $0\leqslant\lambda\leqslant1,0\leqslant\beta<1,\gamma\in C^*:=C-\{0\},f(z)\in A_1$,且满足

$$\mathrm{Re}[1+\frac{1}{\gamma}(\frac{z[\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)]'}{\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)}-1)]>\beta.$$

本文类似地定义函数类 $S_n(\gamma,\lambda,\beta)$,研究其系数估计和充分条件,推广了文献[1]中的结果.

1 相关引理

若设 $0\leqslant\lambda\leqslant1,\beta>1,\gamma\in C^*:=C-\{0\}$,且 $f(z)\in A_n$,则 $f(z)\in S_n(\gamma,\lambda,\beta)$ 当且仅当 $f(z)$ 满足

$$\mathrm{Re}[1+\frac{1}{\gamma}(\frac{z[\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)]'}{\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)}-1)]<\beta.$$

显然 $S_n(1,0,\beta)\equiv M_n(\beta)$.

引理 1.1 令 $\beta>1,\gamma\in C^*:=C-\{0\}$,$\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ 定义为

$$\begin{cases}B_1=1,\\ B_{k+1}=\frac{2|\gamma|(\beta-1)}{k}\sum_{l=1}^{k}B_l,k\geqslant1,\end{cases} \quad (1.1)$$

则

$$B_k=\frac{\prod_{j=0}^{k-2}[j+2|\gamma|(\beta-1)]}{(k-1)!},k\in N\backslash\{1\}.$$

证明 用数学归纳法. 当 $k=2$ 时有

收稿日期:2011-04-27

作者简介:傅秀莲(1979-),女,硕士,讲师,主要从事复分析及其应用研究。

$B_2=2|\gamma|(\beta-1)\sum_{l=1}^{1}B_l=2|\gamma|(\beta-1)B_l=2|\gamma|(\beta-1)$.

而

$$B_2=\frac{\prod_{j=0}^{2-2}[j+2|\gamma|(\beta-1)]}{(2-1)!}=2|\gamma|(\beta-1).$$

所以 $k=2$ 时成立. 假设当 $k=m(m\geqslant3)$ 时有

$$B_m=\frac{\prod_{j=0}^{m-2}[j+2|\gamma|(\beta-1)]}{(m-1)!}.$$

则当 $k=m+1$ 时有

$$B_{m+1}=\frac{2|\gamma|(\beta-1)}{m}\sum_{l=1}^{m}B_l=\frac{2|\gamma|(\beta-1)}{m}[B_m+\sum_{l=1}^{m-1}B_l]=\frac{2|\gamma|(\beta-1)}{m}[B_m+\frac{m-1}{2|\gamma|(\beta-1)}B_m]=\frac{m-1+2|\gamma|(\beta-1)}{m}\frac{\prod_{j=0}^{m-2}[j+2|\gamma|(\beta-1)]}{(m-1)!}=\frac{\prod_{j=0}^{m-1}[j+2|\gamma|(\beta-1)]}{m!}.$$

所以 $k=m+1$ 时成立.

引理 1.2[4] 若形如(0.2)式的函数 $p\in P_n$,则 $|p_k|\leqslant2,k=n,n+1,n+2,\cdots$.

2 主要结果

定理 2.1 设 $0\leqslant\lambda\leqslant1,\beta>1,\gamma\in C^*:=C-\{0\}$, $f(z)$形如(0.1)式且 $f(z)\in S_1(\gamma,\lambda,\beta)$,则

$$|a_k|\leqslant\frac{\prod_{j=0}^{k-2}[j+2|\gamma|(\beta-1)]}{(k-1)![1+\lambda(k-1)]},k\in N\setminus\{1\}. \tag{2.1}$$

证明 记 $F(z)=\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)$,则 $F(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}A_kz^k$,其中 $A_k=[1+\lambda(k-1)]a_k$. 那么 $f(z)\in S_1(\gamma,\lambda,\beta)$ 意味着 $\mathrm{Re}[1+\frac{1}{\gamma}(\frac{zF'(z)}{F(z)}-1)]<\beta$. 令

$$h(z)=\frac{\beta-[1+\frac{1}{\gamma}(\frac{zF'(z)}{F(z)}-1)]}{\beta-1}. \tag{2.2}$$

则 $h(z)$在U内解析,且有 $\mathrm{Re}(h(z))>0,h(0)=1$. 若设 $h(z)=1+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\cdots$,则有 $h(z)\in P_1$. 且由引理 1.2 可得$|c_n|\leqslant2,n=1,2,\cdots$.

(2.2)式可化为

$$F(z)[1-\gamma(\beta-1)(h(z)-1)]=zF'(z). \tag{2.3}$$

把 $F(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}A_kz^k$ 和 $h(z)=1+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\cdots$ 代入(2.3)式并且比较等式两边 z^{k+1} 的系数,可得

$$A_{k+1}=-\frac{1}{k}[\gamma(\beta-1)c_k+\gamma(\beta-1)(\sum_{l=2}^{k}A_lc_{k+1-l})]. \tag{2.4}$$

因为$|c_k|\leqslant 2(k\in N)$,所以(2.4)式可化为

$$|A_{k+1}|\leqslant\frac{1}{k}[|\gamma(\beta-1)||c_k|+|\gamma(\beta-1)|(\sum_{l=2}^{k}|A_l||c_{k-l}|)]\leqslant\frac{1}{k}[2|\gamma|(\beta-1)+2|\gamma|(\beta-1)\sum_{l=2}^{k}|A_l|]=\frac{2|\gamma|(\beta-1)}{k}(1+\sum_{l=2}^{k}|A_l|).$$

其中 $A_1=[1+\lambda(1-1)]a_1=1$. 所以

$$|A_{k+1}|\leqslant\frac{2|\gamma|(\beta-1)}{k}(\sum_{l=1}^{k}|A_l|). \tag{2.5}$$

记

$$\begin{cases}B_1=1,\\ B_{k+1}=\frac{2|\gamma|(\beta-1)}{k}\sum_{l=1}^{k}B_l,k\in N.\end{cases} \tag{2.6}$$

显然 $A_1=B_1=1$. 设 $A_l\leqslant B_l,l\in 1,2,\cdots,k,k\in N$,则由(2.4)式和(2.5)式可以得到

$$|A_{k+1}|=\frac{2|\gamma|(\beta-1)}{k}\sum_{l=1}^{k}A_l\leqslant\frac{2|\gamma|(\beta-1)}{k}\sum_{l=1}^{k}B_l=B_{k+1},k\in N.$$

所以由数学归纳法得 $|A_k|\leqslant B_k,k\in N$. 由引理 1.1 可得 $B_k=\frac{\prod_{j=0}^{k-2}[j+2|\gamma|(\beta-1)]}{(k-1)!},k\in N\setminus\{1\}$. 又因为 $A_k=[1+\lambda(k-1)]a_k$, 所以 $|a_k|\leqslant\frac{\prod_{j=0}^{k-2}[j+2|\gamma|(\beta-1)]}{(k-1)![1+\lambda(k-1)]}$.

注 在定理 2.1 中令 $\lambda=0,\gamma=1$,可得到文献[1]中的定理 2.6.

推论 2.1 设 $0\leqslant\lambda\leqslant1,\beta>1,\gamma\in C^*:=C-\{0\}$,且 $f(z)\in S_1(\gamma,\lambda,\beta)$,则

$$|f(z)|\leqslant r+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\prod_{j=0}^{k-2}[j+2|\gamma|(\beta-1)]}{(k-1)![1+\lambda(k-1)]}r^k,$$

$|z|=r<1$,

$$|f'(z)|\leqslant1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k\cdot\prod_{j=0}^{k-2}[j+2|\gamma|(\beta-1)]}{(k-1)![1+\lambda(k-1)]}r^{k-1},$$

$|z|=r<1$.

定理 2.2 设 $0\leqslant\lambda\leqslant1,\beta>1,\gamma\in C^*:=C-\{0\}$, $f(z)$ 形如(0.1)式且 $f(z)\in S_n(\gamma,\lambda,\beta)$,则

$$|a_{k+1}|\leqslant\begin{cases}\frac{2|\gamma|(\beta-1)}{k(1+\lambda k)},n\leqslant k<2n,\\ C_{k+1}(n),k\geqslant2n.\end{cases}$$

其中

$$\begin{cases}C_1(n)=1,k=1,\\ C_{k+1}(n)=0,1\leqslant k<n,\\ C_{k+1}(n)=\frac{2|\gamma|(\beta-1)}{k(1+\lambda k)},n\leqslant k<2n,\\ C_{k+1}(n)=\frac{2|\gamma|(\beta-1)}{k(1+\lambda k)}\sum_{l=1}^{k+1-n}C_l(n),k\geqslant2n.\end{cases} \tag{2.7}$$

证明 记 $F(z)=\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)$，则 $F(z)=z+\sum_{k=n+1}^{\infty}A_kz^k$，其中 $A_k=[1+\lambda(k-1)]a_k$. 那么 $f(z)\in S_n(\gamma,\lambda,\beta)$ 意味着 $\mathrm{Re}[1+\frac{1}{\gamma}(\frac{zF'(z)}{F(z)}-1)]<\beta$. 令

$$h(z)=\frac{\beta-[1+\frac{1}{\gamma}(\frac{zF'(z)}{F(z)}-1)]}{\beta-1},$$

则

$$h(z)=1-\frac{n}{\gamma(\beta-1)}[(1-\lambda)+\lambda(n+1)]a_{n+1}z^{n+1}-\cdots,$$

显然 $h(z)$ 在U上解析，且 $\mathrm{Re}(h(z))>0, z\in$ U, $p(0)=1$，所以 $h(z)\in P_n$.

当 $n\leqslant k<2n, n+1\leqslant l\leqslant k$ 时，有 $k+1-l\leqslant k-n<n$. 同时当 $0<j<n$ 时有 $c_j=0$；当 $1<j<n+1$ 时由函数族 A_n 的定义有 $a_j=0$，又因为 $A_j=[1+\lambda(j-1)]a_j$，所以 $A_j=0$. 而且由函数族 A_n 的定义还可以得 $a_1=1$，即 $A_1=[1+\lambda(1-1)]a_1=1$. 由(2.4)式及引理1.2，有

$$|A_{k+1}|\leqslant\frac{1}{k}[|\gamma(\beta-1)||c_k|+|\gamma(\beta-1)|(\sum_{l=2}^{k}|A_l||c_{k-l}|)]=\frac{2|\gamma|(\beta-1)}{k}.$$

即 $|a_{k+1}|\leqslant\frac{2|\gamma|(\beta-1)}{k(1+\lambda k)}$.

当 $k\geqslant 2n$ 时，

$$|A_{k+1}|\leqslant\frac{1}{k}[|\gamma(\beta-1)||c_k|+|\gamma(\beta-1)|(\sum_{l=2}^{k}|A_l||c_{k-l}|)]\leqslant\frac{2|\gamma|(\beta-1)}{k}\sum_{l=1}^{k+1-n}|A_l|\leqslant\frac{2|\gamma|(\beta-1)}{k}\sum_{l=1}^{k+1-n}C_l(n).$$

即

$$|a_{k+1}|\leqslant\frac{2|\gamma|(\beta-1)}{k(1+\lambda k)}\sum_{l=1}^{k+1-n}C_l(n).$$

因此结论成立.

推论 2.2 设 $0\leqslant\lambda\leqslant1, \beta>1, \gamma\in \mathbb{C}^*:=\mathbb{C}-\{0\}$，$f(z)$ 形如(0.1)式且 $f(z)\in S_n(\gamma,\lambda,\beta)$，则

$$|f(z)|\leqslant r+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\prod_{j=0}^{k-2}[j+2|\gamma|(\beta-1)]}{(k-1)!\,[1+\lambda(k-1)]}r^k,$$

$|z|=r<1$,

$$|f'(z)|\leqslant 1+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k\cdot\prod_{j=0}^{k-2}[j+2|\gamma|(\beta-1)]}{(k-1)!\,[1+\lambda(k-1)]}r^{k-1},$$

$|z|=r<1$.

定理 2.3 设 $0\leqslant\lambda\leqslant1, \beta>1, \gamma\in \mathbb{C}^*:=\mathbb{C}-\{0\}$，$f(z)$ 形如(0.1)式且 $f(z)\in A_n$，若

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}[(k-1)+|\gamma|(\beta-1)][1+\lambda(k-1)]|a_k|\leqslant|\gamma|(\beta-1). \quad (2.8)$$

则 $f(z)\in S_n(\gamma,\lambda,\beta)$.

证明 令 $p(z)=\frac{1}{\gamma}(\frac{z[\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)]'}{\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)}-1), z\in$ U. 以下证明

$$|p(z)|\leqslant\beta-1, z\in \text{U}. \quad (2.9)$$

若 $f(z)\equiv z, z\in$ U，则 $p(z)=0$. 所以(2.9)式成立.

若 $f(z)\equiv z, z\in$ U不成立，则必存在某一个 $a_k\neq0, k\geqslant n+1$，于是 $\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|>0$. 又因为

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}[(k-1)+|\gamma|(\beta-1)][1+\lambda(k-1)]|a_k|>|\gamma|(\beta-1)\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|.$$

因此

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|<\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty}[(k-1)+|\gamma|(\beta-1)][1+\lambda(k-1)]|a_k|}{|\gamma|(\beta-1)}<1. \quad (2.10)$$

由(2.8)式和(2.10)式，有

$$|p(z)|<\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-1)[1+\lambda(k-1)]|a_k|}{|\gamma|[1-\sum_{k=n+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]|a_k|\,]}=$$

$$(\sum_{k=n+1}^{\infty}[(k-1)+|\gamma|(\beta-1)][1+\lambda(k-1)]|a_k|-\sum_{k=n+1}^{\infty}|\gamma|(\beta-1)[1+\lambda(k-1)]|a_k|)/(|\gamma|[1-\sum_{k=n+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]|a_k|\,])\leqslant$$

$$\frac{|\gamma|(\beta-1)-\sum_{k=n+1}^{\infty}|\gamma|(\beta-1)[1+\lambda(k-1)]|a_k|}{|\gamma|[1-\sum_{k=n+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]|a_k|]}=\beta-1.$$

即 $|p(z)|\leqslant\beta-1$，从而 $f(z)\in S_n(\gamma,\lambda,\beta)$.

参考文献：

[1] Owa S, Nishiwaki J. Coefficient estimates for certain classes of analytic functions[J]. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 2002, 3(5): 1-12.

[2] Liu M S, Zhu Y C, Srivastava H M. Properties and characteristics of certain subclasses of starlike functions of order β[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2008 (48): 402-419.

[3] Altintas O, Irmak H, Owa S, et al. Coefficient bounds for some families of starlike and convex functions of complex order[J]. Applied Mathematics Letters, 2007, 20: 1218-1222.

[4] Graham I, Kohr G. Geometric function theory in one and higher dimensions[M]. New York: Marcel Dekker, 2003.

（责任编辑：尹　闯）