DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2012.01.011

基于 T-S 模型的不确定非线性中立型时滞系统的保性能控制*

Guaranteed Cost Control via T-S Fuzzy Model for Uncertain Nonlinear Systems of Neutral Type

吴建功[1],虞继敏[2],林尤武[3]
WU Jian-gong[1],YU Ji-min[2],LIN You-wu[3]

(1. 广西警官高等专科学校信息与技术系,广西南宁 530023;2. 重庆邮电大学数理学院,重庆 400065;3. 广西师范学院师园学院,广西南宁 530226)
(1. Department of Information Technology of Guangxi Police College, Nanning, Guangxi, 530023, China;2. College of Mathematics and Physics, Chongqing University of Post and Telecommunications, Chongqing, 400065, China;3. Shiyuan College of Guangxi Teachers Education University, Nanning, Guangxi, 530226, China)

摘要:研究一类基于 T-S 模型的不确定非线性中立型时滞系统的保性能控制问题,利用 Lyapunov 方法推导出其保性能模糊控制器存在的充分条件,并通过求解一个凸优化问题,给出一种选择保性能控制器的方法.

关键词:时滞系统 T-S 模型 保性能控制
中图法分类号:O231 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2012)01-0010-05

Abstract: The problem of guaranteed cost control is studied based on T-S fuzzy model for uncertain nonlinear systems of neutral type. The sufficient conditions are derived for the existence of guaranteed cost fuzzy controller by means of Lyapunov method with the linear matrix inequality.

Key words: Time-delay system, T-S fuzzy model, guaranted cost control

研究一个系统,不仅要考虑其稳定性,还要考虑其动态响应. 线性二次型最优控制器的设计方法一直是最优控制的核心内容之一,但是该方法最明显的一个缺点是只要给系统一个很小的扰动,就很难设计控制器,因此对于给定二次型指标的不确定系统的最优控制器的设计非常困难. 这就产生了系统保性能控制问题. 许多学者都研究过该问题,他们也取得了一定的成果. Chang 等[1]最早提出不确定系统的保性能控制问题;文献[2]把不确定系统保性能控制的方法延伸到时滞不确定系统,但是求解 Riccati 方程非常困难,并且有很大的保守性;文献[3]克服了上述困难,利用线性矩阵不等式的方法研究一类线性不确定时滞系统的保性能问题;文献[4,5]研究了基于 T-S 模型的不确定非线性时滞系统的保性能控制,成功地把非线性问题转化成线性问题来解决. 基于 T-S 模型中立型不确定非线性时滞系统的保性能控制问题的研究成果还很少见,本文研究基于 T-S 模型的一类中立型不确定非线性时滞系统的保性能控制问题,利用 Lyapunov 方法推导出其保性能模糊控制器存在的充分条件,并成功地将充分条件转化成相应的线性矩阵不等式的形式. 最后通过建立和求解一个凸优化问题,给出一种选择保性能控制器的方法,这个控制器将使得保性能(J^*)具有最小上界.

1 问题的描述及相关引理

在系统局部信息或专家经验存在的条件下,不确定非线性中立时滞系统可以用以下 T-S 模型进行描述:

R^i : if $z_1(t)$ is M_{i1} and $\cdots$ and $z_g(t)$ is M_{ig} , then

收稿日期:2011-08-07
修回日期:2011-09-20

作者简介:吴建功(1982-),男,硕士,主要从事非线性系统的保性能控制研究。

*重庆自然科学基金项目(CSTC,2009BB3280)资助。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t)-C_i x(t-d)]=[A_i+\Delta A_i(t)]x(t)+[A_{d_i}+\Delta A_{d_i}(t)]x(t-d)+[B_i+\Delta B_i]u(t),x(t)=\phi(t),t\in[-d,0],i=1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

其中 R^i 表示 T-S 模型的第 i 条规则，也称为模糊子系统，$z_1(t),\cdots,z_g(t)$ 为模糊规则的前件变量，M_{i1}，M_{ig} 为模糊语言值集合，$x(t)\in\Re^n$ 为状态向量，$u(t)\in\Re^m$ 是控制输入向量，A_i,A_{d_i},B_i 是已知实常数矩阵，$\Delta A_i,\Delta A_{d_i},\Delta B_i$ 为系统的不确定矩阵函数，$\phi(t)$ 是状态向量初始化函数. 系统的不确定性具有范数有界的形式：

$$[\Delta A_i,\Delta A_{d_i},\Delta B_i]=DF(t)[E_{1i},E_{2d_i},E_{2i}],$$

其中 D,E_1,E_2,E_{d_i} 是已知实常数矩阵，$F(t)$ 是未知的勒贝格可测矩阵函数，并满足 $F^T(t)F(t)\leqslant I$.

全局模糊逻辑系统可以写成如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t)]=\sum_{i=1}^{n}h_i(z(t))[A_i+\Delta A_i(t)]x(t)+C_i\dot{x}(t-d)+[A_{d_i}+\Delta A_{d_i}(t)]x(t-d)+[B_i+\Delta B_i]u(t),x(t)=\phi(t),t\in[-d,0],i=1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

其中，

$$z(t)=[z_1(t),\cdots,z_g(t)],h_i(z(t))=\frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^{n}w_i(z(t))},w_i(z(t))=\prod_{j=1}^{g}M_{ij}(z_j(t)).$$

$M_{ij}(z_j(t))$ 为前件变量，$z_j(t)$ 对应于模糊值 M_{ij} 的隶属度.

考虑控制器具有如下形式：

R^i：if $z_1(t)$ is M_{i1} and $\cdots$ and $z_g(t)$ is M_{ig}，

then $\quad u(t)=K_i x(t),i=1,2,\cdots,n$，

其中 K_i 为控制器增益.

整个模糊控制器可以表示为

$$u(t)=\frac{w_i(z(t))K_i x(t)}{\sum_{i=1}^{n}w_i(z(t))}=\sum_{i=1}^{n}h_i(z(t))K_i x(t)=K(h)x(t),$$

其中 $K(h)=\sum_{i=1}^{n}h_i(z(t))K_i$，

此时系统(2)又可以表示为

$$\dot{x}(t)=(A(h)+\Delta A(h))x(t)+(A_d(h)+\Delta A_d(h))x(t-d)+C(h)\dot{x}(t-d)+[B(h)+\Delta B(h)]u(t), \tag{3}$$

其中

$$A(h)=\sum_{i=1}^{n}h_i(z(t))A_i,\Delta A(h)=\sum_{i=1}^{n}h_i(z(t))\Delta A_i,$$

$$B(h)=\sum_{i=1}^{n}h_i(z(t))B_i,\Delta B(h)=\sum_{i=1}^{n}h_i(z(t))\Delta B,$$

$$A_d(h)=\sum_{i=1}^{n}h_i(z(t))A_{d_i},\Delta A_d(h)=\sum_{i=1}^{n}h_i(z(t))\Delta A_{d_i},C(h)=\sum_{i=1}^{n}h_i(z(t))C_i,$$

$$[\Delta A(h),\Delta B(h),\Delta A_d(h)]=\sum_{i=1}^{n}h_i(z(t))DF(t)[E_{1i},E_{2d_i},E_{2i}]=DF(t)[E_1(h),E_d(h),E_2(h)].$$

定义二次型性能指标：

$$J=\int_0^{\infty}(x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t))\mathrm{d}t. \tag{4}$$

注 本文研究的问题是针对给定的模糊系统(1)，设计相应的模糊状态控制反馈控制器，使得系统保持渐进稳定的，闭环系统性能指标满足 $J\leqslant J^*$，其中 J^* 是一些特殊的常量.

定义 1 对系统(2)和性能指标(4)，如果存在一个控制律 $u^*(t)$ 以及一个常数 J^*，对于所有允许的不确定性，都能使系统(3)渐进稳定，且指标(4)满足 $J\leqslant J^*$，那么 J^* 是保性能，$u^*(t)$ 是系统(2)和性能指标(4)的保性能控制律.

引理 1[6] 对于任意的适当维数实矩阵 Q,H,E,R，并且 Q 对称，$Q+HFE+E^TF^TH^T<0$，对于任意的满足 $\|F(t)\|\leqslant I$ 适当维矩阵 F，有且只有 $\varepsilon>0$，使得

$$Q+\varepsilon HH^T+\varepsilon^{-1}E^TE<0.$$

引理 2[6] 对给定的对称矩阵 $S=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12}\\ S_{12}^T & S_{22}\end{bmatrix}$，其中 S_{11} 是 $r\times r$ 维的，以下命题等价：

(a) $S<0$；

(b) $S_{11}<0,S_{22}-S_{12}^TS_{11}^{-1}S_{12}<0$；

(c) $S_{22}<0,S_{11}-S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^T<0$.

定义一个算子：

$$\partial(x_t)=x(t)+\int_{t-d}^{t}G(h)x(s)\mathrm{d}s-C(h)x(t-d).$$

这里的 $x_t=x(t+s),s\in[-d,0],G(h)=\sum_{i=1}^{n}h_i(z(t))G_i$

$$\dot{\partial}(x_t)=\dot{x}(t)+G(h)x(t)-G(h)x(t-d)-c(h)\dot{x}(t-d)=[A(h)+\Delta A(h)]x(t)+[A_d(h)+\Delta A_d(h)]x(t-d)+[B(h)+\Delta B(h)]K(h)x(t)+G(h)x(t)-G(h)x(t-d). \tag{5}$$

引理 3[7] 如果存在 $d>0$，算子 $\partial(x_t)$ 稳定，当且仅当存在 $\beta_1,\beta_2>0$，$\Gamma>0$，使得

$$\beta_1+\beta_2<1,$$

$$\begin{bmatrix} CT(h)\Gamma C(h)-\beta_1\Gamma & dC^T(h)\Gamma G(h) \\ * & d^2G^T(h)\Gamma G(h)-\beta_2\Gamma \end{bmatrix}<0.$$

引理 4[8] 对于正定对称常数 Θ 矩阵，实数 $\sigma>0$ 和矢量函数 $\omega:[0,\sigma]\to R^n$，使得以下各个积分式有意义，那么可以得到

$$\left[\int_0^\sigma\omega(s)\right]^T\Theta\left[\int_0^\sigma\omega(s)\right]\leqslant\sigma\int_0^\sigma\omega(s)\Theta\omega(s)\mathrm{d}s.$$

2 主要结果

定理 1 如果存在标量 $\varepsilon_1>0$，$\varepsilon_2>0$，$\beta_1>0$，$\beta_2>0$，$\beta>0$，正定对称矩阵 $P>0$，$X>0$，适当维数矩阵 Y,W,L,V，以及给定的矩阵 $Q>0$，$R>0$ 满足矩阵不等式：

$$\Delta=$$

$$\begin{bmatrix}
\Delta_{11} & \varepsilon_1PD & \Delta_{12} & 0 & \Delta_{13} & \Delta_{14} & \Pi_1^T & 0 & dV^T & I & L^T & \beta I \\
* & -\varepsilon_1I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & -\beta X & \varepsilon_2PD & \Delta_{23} & \Delta_{24} & \Pi_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & -\varepsilon_2I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & \Delta_{33} & 0 & \Pi_1^T & \Pi_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & 0 & \Pi_1^T & \Pi_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -\varepsilon_1I & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
* & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & -d^{-1}X & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -Q^{-1} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -R^{-1} & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\beta X
\end{bmatrix}$$

$$<0,\beta_1+\beta_2<1, \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} -\beta_1X & 0 & X^TC^T(h) \\ * & -\beta_2X & dY^T \\ * & * & -X \end{bmatrix}<0, \tag{7}$$

$\Delta_{11}=A(h)X+Y+B(h)W+XA^T(h)+Y^T+W^TB(h)^T$，$\Delta_{12}=A_d(h)X-Y$，$\Delta_{13}=A(h)X+Y+B(h)W$，$\Delta_{14}=A(h)X+Y+B(h)W$，$\Delta_{23}=A_d(h)-Y$，$\Delta_{24}=A_d(h)-YX$，$\Delta_{33}=-d^{-1}X$，$\Pi_1=E_1(h)+E_2(h)K(h)$，$\Pi_2=E_d(h)$，$Y=G(h)X$，$L=K(h)$，$V=G(h)$。

那么 $u(t)=K(h)x(t)$ **是系统**(2)**的保性能控制律，二次性能指标** J **有边界：**

$$J^*=\partial^T(0)P\partial(0)+$$

$$\int_{-d}^0\int_s^0x^T(u)G^T(h)PG(h)x(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+$$

$$\beta\int_d^0x^T(s)Px(s)\mathrm{d}s. \tag{8}$$

证明 定义一个 Lyapunov 函数 $V=V_1+V_2+V_3$。其中，$V_1=\partial^T(x_t)P\partial(x_t)$，$V_2=\int_{t-d}^t\int_s^tx^T(u)\cdot G^T(h)PG(h)x(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s$，$V_3=\beta\int_{t-d}^tx^T(s)Px(s)\mathrm{d}s$.

对 $V=V_1+V_2+V_3$，沿着系统(2)的解求导：

$$\dot V_1=2\partial^T(x_t)P\dot\partial(x_t)=2\{x(t)+$$
$$\int_{t-d}^tG(h)x(s)\mathrm{d}s-C(h)x(t-d)\}^TP\{[A(h)+$$
$$\Delta A(h)]x(t)+[A_d(h)+\Delta A_d(h)]x(t-d)+$$
$$[B(h)+\Delta B(h)]K(h)x(t)+G(h)x(t)-G(h)x(t-$$
$$d)\}=2x^T(t)P\{[A(h)+\Delta A(h)+B(h)K(h)+$$
$$\Delta B(h)K(h)+G(h)]+[A(h)+\Delta A(h)+$$
$$B(h)K(h)+\Delta B(h)K(h)+G(h)]^T\}x(t)+$$
$$2x^T(t)P[A_d(h)+\Delta A_d(h)-G(h)]x(t-d)+$$
$$2\left(\int_{t-d}^tG(h)x(s)\mathrm{d}s\right)^TP\{[A(h)+\Delta A(h)+$$
$$B(h)K(h)+\Delta B(h)K(h)+G(h)]\}x(t)+$$
$$2\left(\int_{t-d}^tG(h)x(s)\mathrm{d}s\right)^TP[A_d(h)+\Delta A_d(h)-$$
$$G(h)]x(t-d)+2x^T(t-d)C^T(h)P\{[A(h)+$$
$$\Delta A(h)+B(h)K(h)+\Delta B(h)K(h)+$$
$$G(h)]\}x(t)+2x^T(t-d)C^T(h)P[A_d(h)+$$
$$\Delta A_d(h)-G(h)]x(t-d),$$

$$\dot V_2=\mathrm{d}x^T(t)G^T(h)PG(h)x(t)-$$
$$\int_{t-d}^tx^T(s)G^T(h)PG(h)x(s)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\mathrm{d}x^T(t)G^T(h)PG(h)x(t)-$$
$$d^{-1}\left(\int_{t-d}^tG(h)x(s)\mathrm{d}s\right)^TP\int_{t-d}^tG(h)x(s)\mathrm{d}s,$$

$$\dot V_3=\beta x^T(t)Px(t)-\beta x^T(t-d)Px(t-d),$$

$$\dot V=\xi^TM\xi-x^T(t)Qx(t)-x^T(t)K^T(h)RK(h)x(t).$$

其中

$$\xi^T=[x^T(t)\quad x^T(t-d)\quad \left(\int_{t-d}^tG(h)x(s)\mathrm{d}s\right)^T\quad x^T(t-d)C^T(h)],$$

$$M=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ * & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ * & * & M_{33} & M_{34} \\ * & * & * & M_{44} \end{bmatrix},$$

$M_{11}=P[A(h)+\Delta A(h)+B(h)K(h)+\Delta B(h)K(h)-G(h)]+[A(h)+\Delta A(h)+B(h)K(h)+\Delta B(h)K(h)-G(h)]^TP+dG^T(h)PG(h)+\beta P+Q+K^T(h)RK(h)$,

$M_{12}=P[A_d(h)+\Delta A_d(h)-G(h)]$,

$M_{13}=P[A(h)+\Delta A(h)+B(h)K(h)+\Delta B(h)K(h)+G(h)]$,

$M_{14}=P[A(h)+\Delta A(h)+B(h)K(h)+\Delta B(h)K(h)+G(h)]$,

$M_{22}=-\beta P$，$M_{23}=P[A_d(h)+\Delta A_d(h)-$

$G(h)]$, $M_{24}=P[A_d(h)+\Delta A_d(h)-G(h)]$,
$M_{33}=-d^{-1}P$, $M_{34}=0$, $M_{44}=0$.

此时令 $M<0$,那么

$$\dot{V}=\xi^T M\xi-x^T(t)Qx(t)-$$
$$x^T(t)K^T(h)RK(h)x(t)<-x^T(t)Qx(t)-$$
$$x^T(t)K^T(h)RK(h)x(t)<0.$$

这种情况下,如果算子 $\partial(x_t)$ 稳定,那么系统是渐进稳定的. 事实上,由引理 2 和引理 3 容易知道不等式(6)和(7)能够保证算子 $\partial(x_t)$ 稳定;又有

$$x^T(t)Sx(t)+x^T(t)K^T(h)RK(h)x(t)<-\dot{V}.$$

对上述不等式两边从 0 到 T_f 积分得

$$\int_0^{T_f}x^T(t)(S+K^TRK)x(t)\mathrm{d}t<V(0)-$$
$$V(T_f)=\partial^T(0)P\partial(0)-\partial^T(T_f)P\partial(T_f)+$$
$$\int_{-d}^0\int_s^0 x^T(u)G^T(h)PG(h)x(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s-$$
$$\int_{T_f-d}^{T_f}\int_s^{T_f}x^T(u)G^T(h)PG(h)x(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+$$
$$\beta\int_d^0 x^T(s)Px(s)\mathrm{d}s-\beta\int_{T_f-d}^{T_f}x^T(s)Px(s)\mathrm{d}s.$$

由于系统渐进稳定,$T_f\to\infty$时,$\partial^T(T_f)P\partial(T_f)\to 0$,

$$\int_{T_f-d}^{T_f}\int_s^{T_f}x^T(u)G^T(h)PG(h)x(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\to 0,$$
$$\beta\int_{T_f-d}^{T_f}x^T(s)Px(s)\mathrm{d}s\to 0,$$

从而有 $J<J^*$. 命题得证.

下面只要证明 $M<0$, 就完成定理 1 证明.

先假设 $M<0$,得到

$$M=Y+$$
$$[PD\quad 0\quad 0\quad 0]^T F(t)[\Pi_1\quad \Pi_2\quad \Pi_1\quad \Pi_1]+$$
$$[\Pi_1^T\quad \Pi_2^T\quad \Pi_1^T\quad \Pi_1^T]^T F^T(t)[D^TP\quad 0\quad 0\quad 0]+$$
$$[0\quad PD\quad 0\quad 0]^T F(t)[0\quad 0\quad \Pi_2\quad \Pi_2]+$$
$$[0\quad 0\quad \Pi_2^T\quad \Pi_2^T]^T F^T(t)[0\quad D^TP\quad 0\quad 0]<0.$$

其中

$$Y=\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14}\\ * & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24}\\ * & * & Y_{33} & Y_{34}\\ * & * & * & Y_{44}\end{bmatrix},$$

$Y_{11}=P[A(h)+B(h)K(h)-G(h)]+[A(h)+B(h)K(h)-G(h)]^TP+dG^T(h)PG(h)+\beta P+Q+K^T(h)RK(h)$, $Y_{12}=P[A_d(h)-G(h)]$, $Y_{13}=P[A(h)+B(h)K(h)+G(h)]$, $Y_{14}=P[A(h)+B(h)K(h)+G(h)]$, $Y_{22}=-\beta P$, $Y_{23}=P[A_d(h)-G(h)]$, $Y_{24}=P[A_d(h)-G(h)]$, $Y_{33}=-d^{-1}P$, $Y_{34}=0$, $Y_{44}=0$.

利用引理 1 有

$$Y+\varepsilon_1[PD\quad 0\quad 0\quad 0]^T[D^TP\quad 0\quad 0\quad 0]+$$
$$\varepsilon_1^{-1}[\Pi_1^T\quad \Pi_2^T\quad \Pi_1^T\quad \Pi_1^T]^T[\Pi_1\quad \Pi_2\quad \Pi_1\quad \Pi_1]+$$
$$\varepsilon_2[0\quad PD\quad 0\quad 0]^T[0\quad D^TP\quad 0\quad 0]+$$
$$\varepsilon_2^{-1}[0\quad 0\quad \Pi_2^T\quad \Pi_2^T]^T[0\quad 0\quad \Pi_2\quad \Pi_2]<0.$$

利用引理 2 得到

$$\Omega=$$
$$\begin{bmatrix}
\Omega_{11} & \varepsilon_1 PD & \Omega_{12} & 0 & \Omega_{13} & \Omega_{14} & \Pi_1^T & 0 & dG^T(h) & I & K^T(h) & \beta I\\
* & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & -\beta P & \varepsilon_2 PD & \Omega_{23} & \Omega_{24} & \Pi_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & \Omega_{33} & 0 & \Pi_1^T & \Pi_2^T & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & 0 & \Pi_1^T & \Pi_2^T & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
* & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & -d^{-1}P^{-1} & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -Q^{-1} & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -R^{-1} & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\beta P^{-1}
\end{bmatrix}$$
$$<0,$$

其中

$\Omega_{11}=Y_{11}$, $\Omega_{12}=Y_{12}$, $\Omega_{13}=Y_{13}$, $\Omega_{14}=Y_{14}$, $\Omega_{22}=Y_{22}$, $\Omega_{23}=Y_{23}$, $\Omega_{24}=Y_{24}$, $\Omega_{33}=Y_{33}$, $\Omega_{34}=0$, $\Omega_{44}=0$.

两边同时乘以 $\mathrm{diag}\{P^{-1},I,P^{-1},I,P^{-1},P^{-1},I,I,I,I,I,I\}$,**并记** $X=P^{-1}$, $W=K(h)P^{-1}$, $Y=G(h)X$, $L=K(h)$, $V=G(h)$, **得到** $\Delta<0$. **由不等式的性质知** $M<0$, **定理 1 证明完毕.**

定理 1 叙述了一种设计保性能控制器的方法,但是结论不是线性矩阵不等式,若将定理 1 的结论转化成线性矩阵不等式就容易求解.

定理 2　如果存在标量 $\varepsilon_{1i}>0$, $\varepsilon_{2i}>0$, $\beta_{1i}>0$, $\beta_{2i}>0$, $\beta>0$, **正定对称矩阵** $P>0$, $X>0$, **适当维数** Y_i, W_i, L_i, V_i ,**以及给定矩阵** $Q>0$, $R>0$, **满足矩阵不等式:**

$$\begin{bmatrix}
\Delta_{11i} & \varepsilon_{1i}PD & \Delta_{12i} & 0 & \Delta_{13i} & \Delta_{14i} & \Pi_{1i}^T & 0 & dV_i^T & I & L_i^T & \beta I\\
* & -\varepsilon_{1i}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & -\beta X & \varepsilon_{2i}PD & \Delta_{23i} & \Delta_{24i} & \Pi_{2i}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & -\varepsilon_{2i}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & \Delta_{33i} & 0 & \Pi_{1i}^T & \Pi_{2i}^T & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & 0 & \Pi_{1i}^T & \Pi_{2i}^T & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & -\varepsilon_{1i}I & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
* & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_{2i}I & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & -d^{-1}X & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -Q^{-1} & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -R^{-1} & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\beta X
\end{bmatrix}$$
$$<0,\beta_{1i}+\beta_{2i}<1,$$

$$\begin{bmatrix} -\beta_{1i}X & 0 & X^TC_i^T(h)\\ * & -\beta_{2i}X & dY_i^T\\ * & * & -X\end{bmatrix}<0,$$

$\Delta_{11i}=A_iX+Y_i+B_iW_i+XA_i^T+Y_i^T+W_i^TB_i^T$, $\Delta_{12i}=A_{di}X+Y_i$, $\Delta_{13i}=A_iX+Y_i+B_iW_i$, $\Delta_{14i}=A_iX+Y_i+B_iW_i$, $\Delta_{23i}=A_{di}-Y_i$, $\Delta_{24i}=A_{di}-Y_iX$, $\Delta_{33i}=-d^{-1}X$, $\Pi_{1i}=E_{1i}+E_{2i}K_i$, $\Pi_{2i}=E_{di}$, $Y_i=G_iX$, $L_i=K_i$, $V_i=G_i$.

那么系统(2)**是由保性能控制律** $u(t)=K(h)x(t)$ **所引起的渐进稳定**, J^* **是保性能.**

由定理 1 **容易证明定理** 2 **成立.**

定理 3　考虑具有性能指标(4)**的系统**(2)**. 如果最优化问题:**

$$\min_{X>0,P>0,\varepsilon_1>0,\varepsilon_2>0,\beta>0,\beta_1>0,\beta_2>0,W,L,V,Y,\Gamma_1>0,\Gamma_2>0,\alpha>0}\{\alpha+\mathrm{tr}(\Gamma_1)+\mathrm{tr}(\Gamma_2)\}$$

使得

(a) $\Delta<0$,

(b) $\begin{bmatrix}-\alpha & \partial^T(0)\\ \partial(0) & -X\end{bmatrix}<0$,

(c) $\begin{bmatrix}-\Gamma_1 & \beta\aleph^T\\ \beta\aleph & -\beta X\end{bmatrix}<0$,

(d) $\begin{bmatrix}-\Gamma_2 & \Im^TG^T(h)\\ \Im G(h) & -X\end{bmatrix}<0$,

有正的解的集合 $\{X,W,K,L,V,P,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\beta_1,\beta_2,\beta,\alpha,\Gamma_1,\Gamma_2\}$, **那么** $u(t)=K(h)x(t)$ **就是确保系统**(2)**具有最小的性能指标**(4)**最优保性能控制律. 其中**

$$\int_d^0 x^T(s)x(s)\mathrm{d}s=\aleph\aleph^T,$$

$$\int_{-d}^0\int_s^0 x^T(u)x(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s=\Im\Im^T.$$

证明　由定理 2 **容易知道**(a)**显然成立. 一方面由引理** 2 **知道**, (b), (c), (d) **分别等价于** $\partial^T(0)X^{-1}\partial(0)<\alpha$, $\beta\aleph^TP\aleph<\Gamma_1$ **和** $\Im^TG^T(h)PG(h)\Im<\Gamma_2$. **另一方面**

$$\beta\int_d^0 x^T(s)Px(s)\mathrm{d}s=\beta\int_d^0\mathrm{tr}(x^T(s)Px(s))\mathrm{d}s=\mathrm{tr}(\beta\aleph\aleph^TP)=\mathrm{tr}(\beta\aleph^TP\aleph)<\mathrm{tr}(\Gamma_1),$$

$$\int_{-d}^0\int_s^0 x^T(u)G^T(h)PG(h)x(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s=\int_{-d}^0\int_s^0 tr(x^T(u)G^T(h)PG(h)x(u))\mathrm{d}u\mathrm{d}s=\mathrm{tr}(\Im\Im^TG^T(h)PG(h))=\mathrm{tr}(\Im^TG^T(h)PG(h)\Im)<\mathrm{tr}(\Gamma_2).$$

因此, 由(8)**式有**

$$J^*<\alpha+\mathrm{tr}(\Gamma_1)+\mathrm{tr}(\Gamma_2).$$

这里, $\alpha+\mathrm{tr}(\Gamma_1)+\mathrm{tr}(\Gamma_2)$ **的最小化意味着系统**(2)**的保性能的最小化.**

参考文献:

[1] Chang S, Peng T. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1972, 17(4): 477-483.

[2] Moheimani S Q R, Peterson I R. Optimal quadratic guaranteed cost control of a class of uncertain time-delay systems[J]. Control Theory Applications IEE Proceeding, 1997, 144(2): 183-188.

[3] Yu Li, Chu Jian. An LMI approach to guaranteed cost control of linear time-delay systems[J]. Automatica, 1999, 35(6): 1155-1159.

[4] Yoneyama J. Robust stability and stabilization for uncertain Takagi-Sugeno fuzzy time-delay systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158(2): 115-134.

[5] **曾涛, 奥顿. 不确定非线性系统的时滞依赖保性能控制**[J]. **控制工程**, 2007, 14(6): 606-609.

[6] **俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法**[M]. **北京: 清华大学出版社**, 2002.

[7] Yue D, Won S, Kwon O. Delay-dependent stability of neutral systems with time delay: an LMI approach[J]. Control Theory and Applications, IEE Proceedings, 2003, 150(1): 23-27.

[8] Gu K. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems[J]. Decision and Control, Proceedings of the 39th IEEE Conference on, 2000, 2: 2805-2810.

(责任编辑: 尹　闯)

科学家的研究揭示人类知识为何能积累

科学选择 8 **组** 3 **到** 4 **岁的儿童**, 8 **组黑猩猩**(Pan troglodytes)**, 以及** 1 **组卷尾猴**(Cebus apella)**给予一些智力训练箱, 这些箱子要经过** 3 **个不同的步骤才能够打开, 从而得到最终的奖励。在超过** 53h **之后, 少数的黑猩猩或卷尾猴才完成了全部** 3 **个步骤, 但有一半的孩子仅仅用了** 2.5h **便打开了全部的箱子。此外, 科学家的这项研究还发现, 当一组孩子中的一个人解决了难题的一个步骤后, 他们常常会告诉其他人如何解决这个问题, 或让其他人观看这一过程以及模仿解决问题的方法, 然而合作行为在黑猩猩或卷尾猴中并没有被发现, 它们在被箱子难住时往往会独自苦苦思索。这种积累的文化**(**几代人以其祖先的创新为基础**)**仅出现在人类当中。这项研究成果可以帮助解释为什么随着时间的推移, 人类在积累文化知识方面的能力是如此的独特。尽管其他动物也会相互学习, 但是只有人类的文化会一代又一代地变得越来越复杂。**

(据科学时报)