DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2012.01.013

广西科学 Guangxi Sciences 2012,19(1):25～27

基于可能度的梯形模糊数排序方法*

A Method Based on Possibility Degree for Priority of Trapezium Fuzzy Number

曾三云

ZENG San-yun

(吉首大学数学与统计学院,湖南吉首 416000)

(College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou, Hunan, 416000, China)

摘要:根据梯形模糊数互补判断矩阵概念和梯形模糊数相互比较的可能度公式,给出一种基于可能度的梯形模糊数排序方法,然后通过实际算例说明该方法的可行性和有效性.

关键词:梯形模糊数 互补判断矩阵 可能度 排序

中图法分类号:C934,N945.25 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2012)01-0025-03

Abstract: A method based on possibility degree for priority of trapezium fuzzy number was proved to deal with the ranking problem of trapezium fuzzy number complementary judgement matrix. It defined a concept of trapezium fuzzy number complementary judgement matrix and gived a possibility degree formula for the comparison between two trapezium fuzzy numbers and ranking algorithm. Then, a numerical example was given to show the feasibility and effectiveness of the developed method.

Key words: trapezium fuzzy number, complementary judgement matrix, possibility degree, ranking

多属性决策(Multiple Attribute Decision Making,简称 MADM)是指从有限个方案中经过综合权衡各个属性后,对方案集进行排序并筛选出最满意方案的过程.它广泛存在于社会、经济、管理等多个领域,如投资决策、项目评估、质量评估、人才考核、经济效益综合评价等.由于客观事物的复杂性和不确定性以及人类思维的模糊性,使得模糊环境下的多属性决策问题已经成为现代决策科学中的一个研究热点.目前,有关模糊多属性决策问题的研究已取得了很多成果[1~4].在决策过程中,决策者(专家)往往需对决策方案进行两两比较,并构造判断矩阵,其中,互补判断矩阵是一类常见的判断矩阵形式.由于判断的不确定性,决策者在构造互补判断矩阵时,其所得到的判断值有时不是精确数,而是以模糊数形式给出的.有关区间数互补判断矩阵和三角模糊数互补判断矩阵的排序理论和方法也取得很多研究成果[5~14],但是对于梯形模糊数互补判断矩阵的排序方法的研究成果还很少.为此,本文提出一种基于可能度的梯形模糊数排序方法.先给出了梯形模糊数互补判断矩阵的概念以及梯形模糊数相互比较的可能度公式,再给出梯形模糊数的排序算法,最后通过一个算例说明了该方法的可行性和有效性.

1 预备知识

定义 1[15] 称 $A=(a,b,c,d)$ 为梯形模糊数,如果它的隶属函数为 $f_A(x):R\rightarrow[0,1]$,即

$$f_A(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a},a\leqslant x\leqslant b,\\ 1,b\leqslant x\leqslant c,\\ \dfrac{x-d}{c-d},c\leqslant x\leqslant d,\\ 0,\text{否则}.\end{cases}\qquad(1)$$

在(1)式中,$x\in R,a\leqslant b\leqslant c\leqslant d,a,d$ 分别为 A 的下界和上界,$d-a,c-b$ 表示梯形模糊数的模糊程度,并且 $c-b$ 和 $d-a$ 越大,模糊程度越强.特别地当 $b=c$ 时,A 是三角模糊数;当 $a=b=c=d$ 时,A 是实数.

收稿日期:2011-06-07

修回日期:2011-09-05

作者简介:曾三云(1980-),女,讲师,硕士,主要从事模糊决策及不确定理论的应用研究。

*湖南省教育厅科研项目(10C1126,10B088)资助。

考虑任意两个梯形模糊数 $A_1=(a_1,b_1,c_1,d_1)$ 和 $A_2=(a_2,b_2,c_2,d_2)$，根据扩展原理[16]，给出相应的梯形模糊数运算规则如下：

$$A_1+A_2=(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2,d_1+d_2),$$
$$A_1\times A_2=(a_1a_2,b_1b_2,c_1c_2,d_1d_2),$$
$$\lambda\times A_1=(\lambda a_1,\lambda b_1,\lambda c_1,\lambda d_1),$$
$$\frac{1}{A_1}=(\frac{1}{d_1},\frac{1}{c_1},\frac{1}{b_1},\frac{1}{a_1}).$$

定义 2[17] 设判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，记 $N=\{1,2,\cdots,n\}$，若 $a_{ij}+a_{ji}=1,a_{ij}>0,i,j\in N$，则称 A 是互补判断矩阵.

定义 3 设判断矩阵 $A=(A_{ij})_{n\times n}$ 是梯形模糊数互补判断矩阵，如果其元素 $A_{ij}=(a_{ij},b_{ij},c_{ij},d_{ij})$ 为梯形模糊数，$0\leqslant a_{ij}\leqslant b_{ij}\leqslant c_{ij}\leqslant d_{ij}\leqslant 1,\forall i,j\in N$，且满足：

(i) $a_{ii}=0.5,b_{ii}=0.5,c_{ii}=0.5,d_{ii}=0.5,\forall i\in N$；

(ii) $a_{ij}+d_{ji}=1,b_{ij}+c_{ji}=1,c_{ij}+b_{ji}=1,d_{ij}+a_{ji}=1,\forall i,j\in N,i\neq j$.

定义 4 设 $A_1=(a_1,b_1,c_1,d_1)$ 和 $A_2=(a_2,b_2,c_2,d_2)$ 是两个梯形模糊数，则 $A_1\geqslant A_2$ 的可能性程度定义为

$$\mathrm{P}(A_1\geqslant A_2)=\lambda_1\max\left\{1-\max\{\frac{b_2-a_1}{b_2-a_2+b_1-a_1},0\},0\right\}+\lambda_2\max\left\{1-\max\{\frac{c_2-b_1}{c_2-b_2+c_1-b_1},0\},0\right\}+\lambda_3\max\left\{1-\max\{\frac{d_2-c_1}{d_2-c_2+d_1-c_1},0\},0\right\},\quad(2)$$

其中 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$. 类似地，$A_2\geqslant A_1$ 的可能性程度定义为

$$\mathrm{P}(A_2\geqslant A_1)=\lambda_1\max\left\{1-\max\{\frac{b_1-a_2}{b_2-a_2+b_1-a_1},0\},0\right\}+\lambda_2\max\left\{1-\max\{\frac{c_1-b_2}{c_2-b_2+c_1-b_1},0\},0\right\}+\lambda_3\max\left\{1-\max\{\frac{d_1-c_2}{d_2-c_2+d_1-c_1},0\},0\right\}.\quad(3)$$

λ_i 值的选择取决于决策者的风险态度. 当 $\lambda_1+\frac{\lambda_2}{2}>0.5$ 时，称决策者是追求风险的；当 $\lambda_1+\frac{\lambda_2}{2}=0.5$ 时，称决策者是风险中立的；当 $\lambda_1+\frac{\lambda_2}{2}<0.5$ 时，称决策者是厌恶风险的. 特别地，当 $\lambda_1=1$ 时，称 $\mathrm{P}(A_1\geqslant A_2)$ 为 $A_1\geqslant A_2$ 的悲观可能度；当 $\lambda_3=1$ 时，称 $\mathrm{P}(A_1\geqslant A_2)$ 为 $A_1\geqslant A_2$ 的乐观可能度.

在定义 4 下，可能度 $\mathrm{P}(A_1\geqslant A_2)$ 具有以下性质：

定理 1 设 $A_1=(a_1,b_1,c_1,d_1),A_2=(a_2,b_2,c_2,d_2)$ 是两个梯形模糊数，则

(1) $0\leqslant \mathrm{P}(A_1\geqslant A_2)\leqslant 1,0\leqslant \mathrm{P}(A_2\geqslant A_1)\leqslant 1$.

(2) $\mathrm{P}(A_1\geqslant A_2)+\mathrm{P}(A_2\geqslant A_1)=1$，特别地，$\mathrm{P}(A_1\geqslant A_1)=\frac{1}{2}$.

2 梯形模糊数的排序方法

设某一多属性决策问题，有 n 个备选决策方案 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 专家对 n 个备选决策方案进行两两比较，给出梯形模糊数互补判断矩阵 $A=(A_{ij})_{n\times n}$，其中 $A_{ij}=(a_{ij},b_{ij},c_{ij},d_{ij}),i,j\in N$.

基于可能度的排序方法的主要过程如下：

步骤 1 计算梯形模糊数互补判断矩阵 A 的行和并归一化，求出其梯形模糊数权重向量 $V=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$，其中

$$v_i=\frac{\sum_{j=1}^{n}A_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}}=\frac{\sum_{j=1}^{n}(a_{ij},b_{ij},c_{ij},d_{ij})}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij},b_{ij},c_{ij},d_{ij})}=\frac{\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij},\sum_{j=1}^{n}b_{ij},\sum_{j=1}^{n}c_{ij},\sum_{j=1}^{n}d_{ij}\right]}{\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij},\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij},\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij},\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}\right]}=\left[\frac{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}},\frac{\sum_{j=1}^{n}b_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}},\frac{\sum_{j=1}^{n}c_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}},\frac{\sum_{j=1}^{n}d_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}}\right],$$
$$i\in N.\quad(4)$$

步骤 2 把梯形模糊数 $v_i(i=N)$ 进行两两比较，利用定义 4 求得相应的可能度 $\mathrm{P}(v_i\geqslant v_j)$，简记为 $P_{ij},i,j\in N$，并建立可能度矩阵 $\mathrm{P}=(P_{ij})_{n\times n}$. 此矩阵包含了所有方案相互比较的可能度信息. 因此，对梯形模糊数进行排序就等价于求解矩阵 P 的排序向量.

步骤 3 由定理 1 可知，可能度矩阵 P 是一个模糊互补判断矩阵. 有关模糊互补判断矩阵的排序方法，已有很多研究成果. 这里采用文献[18]中给出的排序公式

$$\omega_i=\frac{1}{n(n-1)}\left[\sum_{j=1}^{n}P_{ij}+\frac{n}{2}-1\right],i\in N\quad(5)$$

进行求解，即可得到可能度矩阵 P 的排序向量 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$.

步骤 4 根据矩阵 P 的排序向量 ω 对梯形模糊数 $v_i(i\in N)$ 进行排序，就可以得到相应方案的优劣排序.

3 算例分析

设对某多属性决策问题，有 4 个备选决策方案

x_1, x_2, x_3, x_4. 专家对决策方案进行两两比较，并构造如下梯形模糊数互补判断矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}(0.5,0.5,0.5,0.5) & (0.4,0.5,0.6,0.6) & (0.1,0.6,0.7,0.7) & (0.3,0.4,0.4,0.4)\\(0.4,0.4,0.5,0.6) & (0.5,0.5,0.5,0.5) & (0.1,0.2,0.3,0.4) & (0.3,0.4,0.5,0.7)\\(0.3,0.3,0.4,0.9) & [0.6,0.7,0.8,0.9] & (0.5,0.5,0.5,0.5) & (0.1,0.3,0.4,0.6)\\(0.6,0.6,0.6,0.7) & (0.3,0.5,0.6,0.7) & (0.4,0.6,0.7,0.9) & (0.5,0.5,0.5,0.5)\end{bmatrix}$$

采用本文方法来对 4 个方案进行优劣排序.

（Ⅰ）根据(4) 式求出矩阵 A 的梯形模糊数权重分别为

$v_1=(0.129, 0.235, 0.293, 0.373)$, $v_2=(0.129, 0.176, 0.24, 0.373)$, $v_3=(0.149, 0.212, 0.28, 0.492)$, $v_4=(0.178, 0.259, 0.32, 0.475)$.

（Ⅱ）对梯形模糊数 $v_i(i=1,2,3,4)$ 进行两两比较，根据(2) 式计算出相应的可能度（不妨设 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{3}$），并建立可能度矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}0.5 & 0.872 & 0.492 & 0.272\\0.128 & 0.5 & 0.243 & 0.008\\0.508 & 0.757 & 0.5 & 0.289\\0.728 & 0.992 & 0.711 & 0.5\end{bmatrix}.$$

（Ⅲ）根据（5）式，求出可能度矩阵 P 的排序向量为

$\omega=(0.261, 0.157, 0.255, 0.328)^{\mathrm{T}}$.

（Ⅳ）将 $\omega_i(i=1,2,3,4)$ 按从大到小的顺序排列，得到梯形模糊数 $v_i(i=1,2,3,4)$ 的排序为

$v_4 > v_1 > v_3 > v_2$.

进而，可得到相应方案的优劣排序为 $x_4 > x_1 > x_3 > x_2$.

算例说明，在专家给出梯形模糊数互补判断矩阵的情况下，就可以根据基于可能度的梯形模糊数排序方法来对各方案进行优劣排序，而不需要属性值及属性权重等更多的信息。故此方法适用于人才考核等模糊综合评价问题.

参考文献：

[1] Liou T S, Wang M J. Fuzzy weighted average: an improved algorithm[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 49: 307-315.

[2] Lee D H, Park D. An efficient algorithm for fuzzy weighted average[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 87: 39-45.

[3] Kao C, Liu S T. Fractional programming approach to fuzzy weighted average[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 120: 435-444.

[4] Chen S J, Hwang C L. Fuzzy multiple attribute decision making[M]. Berlin: Springer, 1992.

[5] 史文雷，徐蕾. 区间数互补判断矩阵的一种新排序算法[J]. 大学数学，2010，03：112-115.

[6] 冯向前，魏翠萍，李宗植，等. 区间数互补判断矩阵一致性及其权重算法研究[J]. 数学的实践与认识，2007，19：87-93.

[7] 巩在武，刘思峰. 区间数互补判断矩阵的一致性及其排序研究[J]. 中国管理科学，2006，04：64-68.

[8] 徐泽水. 区间数互补判断矩阵排序的一种实用方法[J]，运筹与管理，2001，01：16-19.

[9] 和媛媛，周德群，王强. 基于可能度的三角模糊数互补判断矩阵排序方法[J]. 运筹与管理，2009，01：65-68.

[10] 杨莉，李南，和媛媛. 三角模糊数互补判断矩阵的加性一致性及排序[J]. 系统工程，2009，03：89-92.

[11] 和媛媛，周德群，王强. 三角模糊数互补判断矩阵排序的最小方差法[J]. 控制与决策，2008，10：1113-1114.

[12] 徐泽水. 三角模糊数互补判断矩阵的一种排序方法[J]. 模糊系统与数学，2002，01：47-50.

[13] 徐泽水. 基于 FOWA 算子的三角模糊数互补判断矩阵排序法[J]. 系统工程理论与实践，2003，10：86-89.

[14] 徐泽水. 三角模糊数互补判断矩阵排序方法研究[J]. 系统工程学报，2004，01：85-88.

[15] Liou T S, Wang M J. Ranking fuzzy numbers with integral value[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992(3): 247-255.

[16] Kaufman A, Gupta M M. Introduction to fuzzy arithmetic: theory and application[M]. New York: Van Nostrand Reinhold, 1985.

[17] 徐泽水. AHP 中两类标度的关系研究[J]. 系统工程理论与实践，1999，19(7)：98-101.

[18] 徐泽水. 模糊互补判断矩阵排序的一种算法[J]. 系统工程学报，2001，16(4)：311-314.

（责任编辑：尹　闯）

（上接第 24 页 Continue from page 24）

[19] Kerre E E. The use of fuzzy set theory in electrocardiological diagnostics[J]//Gupta M M, Sanchez E(Eds.). Approximate reasoning in decision analysis. North-Holland, Amsterdam, 1982: 277-282.

[20] Bass S M, Kwakemaak H. Rating and ranking of multiple-aspect alternatives using fuzzy sets[J]. Automatica, 1977, 13: 47-58.

[21] Dubois D, Prade H. Ranking of fuzzy numbers in the setting of possibility theory[J]. Information Sciences, 1983, 30: 183-224.

[22] Chen S H. Ranking fuzzy numbers with maximizing set and minimizing sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1985, 17: 113-129.

[23] Fortemps P, Roubens M. Ranking and defuzzification methods based on area compensation[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 82: 319-330.

[24] Vania Peneva, Ivan Popchev. Comparison of clusters from fuzzy numbers[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 97: 75-81.

（责任编辑：尹　闯）