DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2012.01.020

广西科学 Guangxi Sciences 2012,19(1):31～34

图 $D_{m,4}$ 的 $[r,s,t]$-着色*

$[r,s,t]$-Colouring of Graph $D_{m,4}$

莫明忠,潘玉美,郭金勇

MO Ming-zhong, PAN Yu-mei, GUO Jin-yong

(柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系,广西柳州 545004)

(Department of Mathematics and Computer Science, Liuzhou Teachers College, Liuzhou, Guangxi, 545004, China)

摘要:由 m 个四回路恰有一个公共点构成的图记为 $D_{m,4}$。研究图 $D_{m,4}$ 的点着色、边着色和全着色,给出图 $D_{m,4}$ 在参数 r,s,t 满足一定条件时的 $[r,s,t]$-色数。

关键词:图 图 $D_{m,4}$ $[r,s,t]$-着色 $[r,s,t]$-色数

中图法分类号:O157.5 **文献标识码:**A **文章编号:**1005-9164(2012)01-0031-04

Abstract: Let a graph contains m cycles C_4 of lengths 4 have a common vertex, then we denote this graph as $D_{m,4}$. Then we study the vertex coloring, edge coloring and total coloring of Graph $D_{m,4}$, and give the $[r,s,t]$-chromatic numbers of the Graph $D_{m,4}$ when the parameters r,s, and t meet certain conditions.

Key words: graph, graph $D_{m,4}$, $[r,s,t]$-colouring, $[r,s,t]$-chromatic number

A. Kemnitz 和 M. Marangio[1] 首次提出图的 $[r,s,t]$-着色和 $[r,s,t]$-色数的概念,它是对经典的点着色、边着色和全着色[2] 的推广。文献[1]给出图的 $[r,s,t]$-色数一般的界和性质,讨论当参数 r,s,t 分别取特定值(如 0,1)时的具体的 $[r,s,t]$-色数及完全图的 $[r,s,t]$-色数问题。文献[3]从遗传性对图的 $[r,s,t]$-色数进行讨论。还有文献对一些特殊图,如二部图[4]、星[4,5]、树[5]、含点不交圈图[6] 等进行了 $[r,s,t]$-着色的研究。本文研究图 $D_{m,4}$ 的点着色、边着色和全着色,给出图 $D_{m,4}$ 在参数 r,s,t 满足一定条件时的 $[r,s,t]$-色数。

1 相关定义和引理

本文中的图均指简单有限图,未定义的术语和记号参见文献[7]。

图 $G=(V,E)$ 表示顶点集为 $V=V(G)$,边集为 $E=E(G)$ 的图。$\Delta=\Delta(G)$ 为图 G 的最大度,$\chi(G)$ 为图 G 的点色数,$\chi'(G)$ 为图 G 的边色数,$\chi_T(G)$ 为图 G 的全色数。

定义 1[8] 由 m 个四回路恰有一个公共点构成的图记为 $D_{m,4}$。记图 $D_{m,4}$ 的公共顶点为 v_0,其余顶点依次记为 $v_1,u_1,w_1,v_2,u_2,w_2,\cdots,v_m,u_m,w_m$,其中 $v_0v_iu_iw_iv_0(i=1,2,\cdots,m)$ 是一个 C_4 回路。

为方便陈述,下文讨论的图 $D_{m,4}$ 均如图 1 所标记。

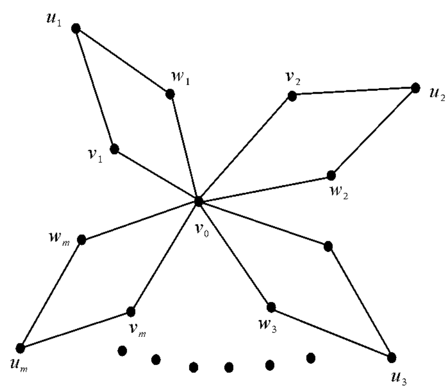

图 1 图 $D_{m,4}$

Fig.1 Graph $D_{m,4}$

定义 2[1] 设 $G=(V,E)$ 为顶点集为 V,边集为 E 的图,给定非负整数 r,s 和 t,若图 $G=(V,E)$ 有一个 $V\cup E$ 到色集 $\{0,1,2,\cdots,k-1\}$ 的映射 c,满足:

(1) 对 V 中相邻的任意两点 v_i,v_j,有 $|c(v_i)-c(v_j)|\geqslant r$(我们称此条件为 r 条件),

收稿日期:2011-06-02

修回日期:2011-08-29

作者简介:莫明忠(1974-),男,讲师,主要从事图论及其应用研究。

*广西教育厅面上项目(200807MS098)和柳州师范高等专科学校基金项目(LSZ2010B003)资助。

（2）对 E 中相邻的任意两边 e_i, e_j，有 $|c(e_i)-c(e_j)|\geqslant s$（我们称此条件为 s 条件），

（3）对 $V\cup E$ 中相关联的任意点 v_i 和边 e_j，有 $|c(v_i)-c(e_j)|\geqslant t$，（我们称此条件为 t 条件），

则称 c 为 G 的一个正常 $[r,s,t]$-着色，使图 G 存在正常 $[r,s,t]$-着色的最小的整数 k，称为图 G 的 $[r,s,t]$-色数，记作 $\chi_{r,s,t}(G)$。

引理 1[1]　若 $H\subseteq G$，则

$\chi_{r,s,t}(H)\leqslant\chi_{r,s,t}(G)$；

若 $r'\leqslant r, s'\leqslant s, t'\leqslant t$，则

$\chi_{r',s',t'}(G)\leqslant\chi_{r,s,t}(G)$。

引理 2[1]　对图 G，满足

$$\max\{r(\chi(G)-1)+1, s(\chi'(G)-1)+1, t+1\}\leqslant\chi_{r,s,t}(G)\leqslant r(\chi(G)-1)+s(\chi'(G)-1)+t+1。$$

引理 3[1]　设 G 是 $\Delta(G)\geqslant 2$ 的第一类图（即 $\chi'(G)=\Delta$），则有

$$\chi_{0,s,t}(G)=\begin{cases}s(\Delta(G)-1)+1, s\geqslant 2t,\\ s(\Delta(G)-1)+2t-s+1, t\leqslant s<2t,\\ s(\Delta(G)-1)+t+1, s<t。\end{cases}$$

2　主要结论及其证明

定理 1　对于图 $D_{m,4}$，有

（1）$\chi(D_{m,4})=2$，

（2）$\chi'(D_{m,4})=\Delta=2m$，

（3）$\chi_T(D_{m,4})=\begin{cases}4, m=1,\\ 2m+1, m>1。\end{cases}$

证明　（1）因为 $C_4\subseteq D_{m,4}$，所以 $2=\chi(C_4)\leqslant\chi(D_{m,4})$。又可用 2 种颜色对顶点进行正常的点着色，如图 $D_{m,4}$ 公共点 v_0 着 1 色；顶点 $v_i, w_i(i=1,2,\cdots,m)$ 着 2 色；顶点 $u_i(i=1,2,\cdots,m)$ 着 1 色，即为一个正常的点着色，故有 $\chi(D_{m,4})\leqslant 2$，于是得

$\chi(D_{m,4})=2$。

（2）因为 $\Delta(D_{m,4})=2m$，这时可以用 $1,2,3,\cdots,2m$ 这 $2m$ 种颜色对边进行着色，具体为：$f(v_0v_i)=f(u_iw_i)=2i-1$；$f(v_0w_i)=f(v_iu_i)=2i$，$i=1,2,\cdots,m$，则 f 是图 $D_{m,4}$ 的一个正常的边着色，于是有 $\chi'(D_{m,4})\leqslant\Delta=2m$。另一方面，由 Vizing 定理，即对任一简单图 G，均有 $\Delta\leqslant\chi'(G)\leqslant\Delta+1$，可得 $\chi'(D_{m,4})\geqslant\Delta=2m$。所以最后可得

$\chi'(D_{m,4})=\Delta=2m$。

（3）当 $m=1$ 时，$D_{m,4}=C_4$，显然 $\chi_T(C_4)=4$；当 $m>1$ 时，设 f 是一个用 $2m+1$ 种颜色 $1,2,3,\cdots,2m,2m+1$ 的着色，具体为：

$f(v_0v_i)=f(u_iw_i)=2i-1$，其中 $i=1,2,\cdots,m$；

$f(v_0w_i)=f(v_iu_i)=2i$，其中 $i=1,2,\cdots,m$；

$f(v_0)=f(u_i)=2m+1$，其中 $i=1,2,\cdots,m$；

$f(v_i)=2i+1, f(w_i)=2i+2$，其中 $i=1,2,\cdots,m-1$；

$f(v_m)=1, f(w_m)=2$，

则 f 是图 $D_{m,4}$ 的一个正常的全着色，所以 $\chi_T(D_{m,4})\leqslant\Delta+1=2m+1$。根据全着色的定义，显然有 $\chi_T(D_{m,4})\geqslant\Delta+1=2m+1$，因而有 $\chi_T(D_{m,4})=\Delta+1=2m+1$。综上所述，结论（2）成立。

推论 1　对于图 $D_{m,4}$，有

$$\max\{r+1, s(2m-1)+1, t+1\}\leqslant\chi_{r,s,t}(D_{m,4})\leqslant r+s(2m-1)+t+1。$$

证明　由引理 2 及定理 1 可以证得推论 1。

定理 2　对图 $D_{m,4}$，如果 $r\geqslant(2m-1)s+2t$，则有 $\chi_{r,s,t}(D_{m,4})=r+1$。

证明　由推论 1 有 $\chi_{r,s,t}(D_{m,4})\geqslant r+1$，接下来证明 $\chi_{r,s,t}(D_{m,4})\leqslant r+1$：

设 c 是 $D_{m,4}$ 的一个用色为 $0,1,2,\cdots,r$ 的着色，首先对顶点用色 $0,r$ 进行着色，具体如下：

$c(v_0)=c(u_i)=0$；

$c(v_i)=c(w_i)=r(i=1,2,\cdots,m)$，

显然顶点着色满足 r 条件。然后用 $t, t+s, t+2s,\cdots, t+(2m-1)s$ 这 $2m$ 种颜色对边进行着色。由定理 1（2）知，$\chi'(D_{m,4})=\Delta=2m$，所以用这 $2m$ 种颜色能对 $D_{m,4}$ 进行正常的边着色。又因为

$r\geqslant(2m-1)s+2t$，可得 $r-(t+(2m-1)s)\geqslant t$，

所以 c 满足 t 条件，这样得到一个 $D_{m,4}$ 的正常的用色为 $r+1$ 的 $[r,s,t]$-着色，故 $\chi_{r,s,t}(D_{m,4})\leqslant r+1$，从而结论得证。

定理 3　对图 $D_{m,4}(m\geqslant 2)$，满足以下任一条件均有 $\chi_{r,s,t}(D_{m,4})=(2m-1)s+1$。

（1）$s\geqslant 2t$，且 $r\leqslant ks, k=0,1,2,\cdots,m-2$；

（2）$s\geqslant 2t$，且 $ks<r\leqslant(k+1)s-2t, k=0,1,2,\cdots,m-2$。

证明　首先由推论 1，有 $\chi_{r,s,t}(D_{m,4})\geqslant(2m-1)s+1$，再对两种条件证明 $\chi_{r,s,t}(D_{m,4})\leqslant(2m-1)s+1$。设 c 是图 $D_{m,4}$ 的一个用色为 $0,1,2,\cdots,(2m-1)s$ 的着色，先用 $0,s,2s,\cdots,(2m-1)s$ 这 $2m$ 种颜色对边进行着色，具体为：

$c(v_0v_i)=c(u_iw_i)=(2i-2)s$；

$c(v_0w_i)=c(v_iu_i)=(2i-1)s$，其中 $i=1,2,\cdots,m$。

显然 c 是正常的边着色，且满足 s 条件。再对顶点进行着色：

（1）当 $s \geqslant 2t$，且 $r \leqslant ks(k=0,1,2,\cdots,m-2)$ 时，用 $t, ks+t$ 对图 $D_{m,4}$ 顶点进行着色，具体为：

$c(v_0)=c(u_i)=t, c(v_i)=c(w_i)=ks+t$，

这里 $i=1,2,\cdots,m$；

（2）当 $s \geqslant 2t$，且 $ks < r \leqslant (k+1)s-2t(k=0,1,2,\cdots,m-2)$ 时，用 $t, r+t$ 对图 $D_{m,4}$ 顶点进行着色，具体为 ：

$c(v_0)=c(u_i)=t, c(v_i)=c(w_i)=r+t$ ，这里 $i=1,2,\cdots,m$，易知 c 是 $D_{m,4}$ 的一个正常的 $[r,s,t]$ - 着色，故 $\chi_{r,s,t}(D_{m,4}) \leqslant (2m-1)s+1$，从而有

$\chi_{r,s,t}(D_{m,4})=(2m-1)s+1$。

定理 4 对图 $D_{m,4}(m \geqslant 2)$，有

（1）若 $t \leqslant s < 2t$，且 $r \leqslant (2m-4)s+t$，则 $\chi_{r,s,t}(D_{m,4})=(2m-2)s+2t+1$。

（2）若 $t \leqslant s < 2t$，且

$(2m-4)s+t < r \leqslant (2m-2)s$，则

$\chi_{r,s,t}(D_{m,4}) \leqslant (2m-1)s+t+1$。

（3）若 $s < t$，且 $r \leqslant (2m-1)s+2t$，则

$(2m-1)s+t+1 \leqslant \chi_{r,s,t}(D_{m,4}) \leqslant (2m-1)s+2t+1$。

证明 （1）首先，由定理 1 得知 $D_{m,4}$ 是第一类图，且当 $m \geqslant 2$ 时，$\Delta=2m \geqslant 4$。由引理 1 和引理 3 得

$\chi_{r,s,t}(D_{m,4}) \geqslant \chi_{0,s,t}(D_{m,4})=(\Delta-2)s+2t+1=(2m-2)s+2t+1$。

其次，设 c 是图 $D_{m,4}$ 的一个用色为 $0,1,2,\cdots,(2m-2)s+2t$ 的着色，先用 $0, 2t, 2t+s, 2t+2s, \cdots, 2t+(2m-2)s$ 这 $2m$ 种颜色对边进行着色，具体为：

$c(v_0v_1)=c(u_1w_1)=0$，

$c(v_0w_1)=c(v_1u_1)=2t$，

$c(v_0v_i)=c(u_iw_i)=2t+(2i-3)s$，

$c(v_0w_i)=c(v_iu_i)=2t+(2i-2)s$，

其中 $i=2,3,\cdots,m$，显然 c 是正常的边着色。

然后对 $D_{m,4}$ 顶点着色，具体为：

$c(v_0)=c(u_i)=t$，这里 $i=1,2,\cdots,m$；

$c(v_i)=c(w_i)=(2m-3)s+2t$ ，这里 $i=1,2,\cdots,m-1$；

$c(v_m)=c(w_m)=(2m-4)s+2t$，

因为

$|(2m-3)s+2t-t| \geqslant |(2m-4)s+2t-t|=(2m-4)s+t \geqslant r$，

所以 c 满足 r 条件。又当 $i \leqslant m-1$ 时，

$(2m-3)s+2t-(2t+(2i-3)s)=2(m-i)s \geqslant 2s \geqslant t$，

$(2m-3)s+2t-(2t+(2i-2)s)=2(m-i)s-s \geqslant s \geqslant t$；

当 $i=m$ 时，

$c(v_mu_m)-c(v_m) \geqslant c(v_0v_m)-c(v_m)=(2m-3)s+2t-((2m-4)s+2t)=s \geqslant t$，

$c(v_0w_m)-c(w_m) \geqslant c(u_mw_m)-c(w_m)=(2m-3)s+2t-((2m-4)s+2t)=s \geqslant t$，所以 c 满足 t 条件，故 c 是 $D_{m,4}$ 的一个正常的 $[r,s,t]$ - 着色，即有

$\chi_{r,s,t}(D_{m,4}) \leqslant (2m-2)s+2t+1$。

综上所述，有 $\chi_{r,s,t}(D_{m,4})=(2m-2)s+2t+1$。

（2）设 c 是图 $D_{m,4}$ 的一个用色为 $0,1,2,\cdots,(2m-1)s+t$ 的着色，先用 $t, t+s, t+2s, \cdots, t+(2m-1)s$ 这 $2m$ 种颜色对边进行着色，具体为：

$c(v_0v_i)=c(u_iw_i)=t+(2i-2)s$，

$c(v_0w_i)=c(v_iu_i)=t+(2i-1)s$，其中 $i=1,2,\cdots,m$。

显然 c 是正常的边着色，且满足 s 条件，再对顶点进行着色：

$c(v_0)=c(u_i)=0$，这里 $i=1,2,\cdots,m$；

$c(v_i)=c(w_i)=(2m-1)s+t$ ，这里 $i=1,2,\cdots,m-1$；

$c(v_m)=c(w_m)=(2m-2)s$，

可知 c 是 $D_{m,4}$ 的一个正常的 $[r,s,t]$ - 着色，即有 $\chi_{r,s,t}(D_{m,4}) \leqslant (2m-1)s+t+1$。

（3）当 $s < t$ 时，首先，由定理 1 得知 $D_{m,4}$ 是第一类图，且当 $m \geqslant 2$ 时，$\Delta=2m \geqslant 4$。由引理 1 和引理 3 得

$\chi_{r,s,t}(D_{m,4}) \geqslant \chi_{0,s,t}(D_{m,4})=(\Delta-1)s+t+1=(2m-1)s+t+1$。其次设 c 是图 $D_{m,4}$ 的一个用色为 $0,1,2,\cdots,(2m-1)s+2t$ 的着色，先用 $t, t+s, t+2s, \cdots, t+(2m-1)s$ 这 $2m$ 种颜色对边进行着色，具体为：

$c(v_0v_i)=c(u_iw_i)=t+(2i-2)s$，

$c(v_0w_i)=c(v_iu_i)=t+(2i-1)s$，

其中 $i=1,2,3,\cdots,m$，显然 c 是正常的边着色。然后对 $D_{m,4}$ 顶点着色，具体为：

$c(v_0)=c(u_i)=0$，这里 $i=1,2,\cdots,m$；

$c(v_i)=c(w_i)=(2m-1)s+2t$ ，这里 $i=1,2,\cdots,m$。

可知 c 是 $D_{m,4}$ 的一个正常的 $[r,s,t]$ - 着色，即有 $\chi_{r,s,t}(D_{m,4}) \leqslant (2m-1)s+2t+1$，从而结论成立。

参考文献：

[1] Kemnitz A，Marangio M. $[r,s,t]$ - colorings of graphs [J]. Discrete Math，2007，307：199-207.

[2] Yap H P. Total coloring of graphs，lecture notes in mathematics 1623[M]. Berlin：Heidlberg Springer Ver-

lag,1996:1-11.

[3] Kemnitz A, Marangio M, Mihók P. [r,s,t] - chromatic numbers and hereditary properties of graphs[J]. Discrete Mathematics,2007,307:916-922.

[4] 龚劬,张新军. 二部图的 [r,s,t] - 着色[J]. 重庆大学学报:自然科学版,2007,30(12): 95-97.

[5] Dekar L, Effantin B, Kheddouci H. [r,s,t] - coloring of trees and bipartite graphs[J]. Discrete Mathematics, 2008,311:1521-1533.

[6] 俞竺君,左连翠. 含点不交偶圈的图的 [r,s,t] - 着色[J]. 天津师范大学学报:自然科学版,2010,33(2):18-22.

[7] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory[M]. Berlin: Springer,2008.

[8] 李光海,李武装. 关于几类图的邻点可区别全染色[J]. 河南师范大学学报:自然科学版,2006,35(1):139-140.

(责任编辑:陈小玲)

(上接第 30 页 Continue from page 30)

$$P(|\hat{f}_{FP}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon)\leqslant P(|\hat{f}_{FP}(x)-E[\hat{f}_{FP}(x)]|\geqslant\varepsilon/2)\leqslant\frac{4}{\varepsilon^2}\mathrm{Var}(\hat{f}_{FP}(x)).$$

由引理 3 **可知,当** $n\to+\infty$, $\mathrm{Var}(\hat{f}_{FP}(x))\to 0$. **定理** 2 **证明完毕.**

参考文献:

[1] Chen X R, Zhao L C. Almost sure L [1]-norm convergence for data-based histogram density estimates[J]. Journal of Multivariate Analysis,1987,21:179-188.

[2] Zhao L C, Krishnaiah P R, Chen X R. Almost sure $L[r]$-norm convergence for data-based histogram density estimates[J]. Theory of Probability and Its Applications, 1990,35:396-403.

[3] Scott D W. Multivariate density estimation-theory, practice and visualization[M]. New York: John Wiley & Sons,1992.

[4] Scott D W. Frequency polygons[J]. J Amer Statist Assoc,1985,80:348-354.

[5] Scott D W, Terrell G R. Biased and unbiased cross-validation in density estimation[J]. J Amer Statist Assoc, 1987,82:1131-1146.

[6] Terrell G R. The maximal smoothing principle in density estimation[J]. J Amer Statist Assoc, 1990,85:470-477.

[7] 吴果林,张德全. 频率样条插值密度估计[J]. 桂林航天工业高等专科学校学报,2010,58(2):256-258.

(责任编辑:尹　闯)