

# 平方数集合的五分拆问题有解的充要条件\*

## Necessary and Sufficient Conditions for Solved Problem of Five Partition of Square Number Set

罗益奎

LUO Yi-kui

(广西机电职业技术学院,广西南宁 530007)

(Guangxi Technological College of Machinery and Electricity, Nanning, Guangxi, 530007, China)

摘要: 证明平方数集合的五分拆问题  $R_5(n)$  有解的充要条件是  $n \equiv 0, 2, 4 \pmod{5}$  且  $n \neq 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 17, 22$ .

关键词: 平方数 集合 充要条件  $k$  分拆

中图分类号: O156 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2012)01-0035-05

**Abstract:** The necessary and sufficient condition for the solved problem  $R_5(n)$  of square number set is proved to be  $n \equiv 0, 2, 4 \pmod{5}$ , but  $n \neq 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 17, 22$ .

**Key words:** square number, set, necessary and sufficient condition,  $k$  partition

我们称集合  $A$  的元素数之和为集合  $A$  的容量, 记为  $[A]$ . 集合  $M = \{1^2, 2^2, \dots, n^2\}$  的  $k$  分拆问题  $R_k(n)$  是指将集合  $M = \{1^2, 2^2, \dots, n^2\}$  分拆成  $k$  个子集  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , 且满足条件:

(1)  $M = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ , 并且  $A_1, A_2, \dots, A_k$  两两互不相交;

(2) 集合  $A_1, A_2, \dots, A_k$  各自的元素数之和相等, 即各自的容量之和相等  $[A_1] = [A_2] = \dots = [A_k]$ .

显然, 若问题  $R_k(n)$  有解, 则必有  $[A_i] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6k}, i=1, 2, \dots, k$ . 2006年阴洪生<sup>[1]</sup>研究了平方数集合的二分拆问题, 并给出了  $R_2(n)$  有解的充要条件是  $n \equiv 0, 3 \pmod{4}$  且  $n \neq 3, 4$ ; 2008年阴洪生<sup>[2]</sup>又证明  $R_3(n)$  有解的充要条件是  $n = 0, 4, 8 \pmod{9}$  且  $n \neq 4, 8, 9$ ; 文献<sup>[3]</sup>证明  $R_4(n)$  有解的充要条件是  $n = 0, 7 \pmod{8}$  且  $n \neq 7, 8$ . 本文系统地研究了平方数集合的五分拆问题, 并证明  $R_5(n)$  有解的必要条件是  $n \equiv 0, 2, 4 \pmod{5}$  且  $n \neq 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 17, 22$ .

收稿日期: 2011-06-07

修回日期: 2011-10-08

作者简介: 罗益奎(1964-), 男, 副教授, 主要从事基础数学研究.

\* 广西机电职业技术学院科研经费资助.

### 1 相关引理

问题  $R_5(n)$ : 将集合  $M = \{1^2, 2^2, \dots, n^2\}$  分拆成 5 个子集  $A, B, C, D, E$  满足

(1)  $M = A \cup B \cup C \cup D \cup E$ , 且  $A, B, C, D, E$  两两互不相交;

(2)  $A, B, C, D, E$  的各自元素之和相等  $[A] = [B] = [C] = [D] = [E]$ .

引理 1<sup>[1]</sup> 对于任意 8 个相连的正整数  $k+1, k+2, \dots, k+8$ , 令

$$A = \{(k+1)^2, (k+4)^2, (k+6)^2, (k+7)^2\},$$

$$B = \{(k+2)^2, (k+3)^2, (k+5)^2, (k+8)^2\},$$

则必有  $[A] = [B]$ .

引理 2<sup>[2]</sup> 对于任意 18 个相连正整数  $k+1, k+2, \dots, k+18$ , 以下 3 个集合

$$A = \{(k+1)^2, (k+6)^2, (k+9)^2, (k+10)^2, (k+14)^2, (k+17)^2\},$$

$$B = \{(k+2)^2, (k+5)^2, (k+7)^2, (k+12)^2, (k+15)^2, (k+16)^2\},$$

$$C = \{(k+3)^2, (k+4)^2, (k+8)^2, (k+11)^2, (k+13)^2, (k+18)^2\}$$

的元素之和相等, 即  $[A] = [B] = [C]$ .

引理 3<sup>[3]</sup> 对于任意 32 个相连的正整数  $k+1, k+2, \dots, k+32$ , 令

$$A = \{(k+1)^2, (k+7)^2, (k+12)^2, (k+14)^2, (k+20)^2, (k+22)^2, (k+25)^2, (k+31)^2\},$$

$$B = \{(k+3)^2, (k+5)^2, (k+10)^2, (k+16)^2, (k+18)^2, (k+24)^2, (k+27)^2, (k+29)^2\},$$

$$C = \{(k+4)^2, (k+6)^2, (k+9)^2, (k+15)^2, (k+17)^2, (k+23)^2, (k+28)^2, (k+30)^2\},$$

$$D = \{(k+2)^2, (k+8)^2, (k+11)^2, (k+13)^2, (k+19)^2, (k+21)^2, (k+26)^2, (k+32)^2\},$$

或者

$$A = \{(k+1)^2, (k+7)^2, (k+10)^2, (k+16)^2, (k+20)^2, (k+22)^2, (k+27)^2, (k+29)^2\},$$

$$B = \{(k+3)^2, (k+5)^2, (k+12)^2, (k+14)^2, (k+18)^2, (k+24)^2, (k+25)^2, (k+31)^2\},$$

$$C = \{(k+4)^2, (k+6)^2, (k+11)^2, (k+13)^2, (k+17)^2, (k+23)^2, (k+26)^2, (k+32)^2\},$$

$$D = \{(k+2)^2, (k+8)^2, (k+9)^2, (k+15)^2, (k+19)^2, (k+21)^2, (k+28)^2, (k+30)^2\}.$$

则  $A, B, C, D$  的各自元素之和相等, 即  $[A] = [B] = [C] = [D]$ .

**引理 4** 对于任意 50 个相连的正整数  $k+1, k+2, \dots, k+50$ , 令

$$A = \{(k+1)^2, (k+10)^2, (k+13)^2, (k+18)^2, (k+25)^2, (k+26)^2, (k+32)^2, (k+39)^2, (k+44)^2, (k+47)^2\},$$

$$B = \{(k+2)^2, (k+9)^2, (k+14)^2, (k+17)^2, (k+23)^2, (k+28)^2, (k+35)^2, (k+36)^2, (k+41)^2, (k+50)^2\},$$

$$C = \{(k+3)^2, (k+8)^2, (k+12)^2, (k+19)^2, (k+24)^2, (k+27)^2, (k+31)^2, (k+40)^2, (k+45)^2, (k+46)^2\},$$

$$D = \{(k+5)^2, (k+6)^2, (k+11)^2, (k+20)^2, (k+22)^2, (k+29)^2, (k+34)^2, (k+37)^2, (k+43)^2, (k+48)^2\},$$

$$E = \{(k+4)^2, (k+7)^2, (k+15)^2, (k+16)^2, (k+21)^2, (k+30)^2, (k+33)^2, (k+38)^2, (k+42)^2, (k+49)^2\}.$$

则  $A, B, C, D, E$  的各自元素之和相等.

**证明** 根据引理 1, 引理 2 和引理 3 的方法, 直接验算即可知引理 4 成立.

## 2 主要结果

**定理 1** 若  $n \equiv 0 \pmod{50}$ , 则问题  $R_5(n)$  必有解.

**证明** 将  $1^2, 2^2, \dots, n^2 (n=50k)$  依大小次序分成 50 个数一组, 每组按照引理 4 的方法分到  $A_i, B_i,$

$C_i, D_i, E_i (1 \leq i \leq k)$  中去, 即  $M_i = A_i \cup B_i \cup C_i \cup D_i \cup E_i$ , 其中  $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i$  互不相交, 且  $[A_i] = [B_i] = [C_i] = [D_i] = [E_i]$ , 令

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k; B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k; C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k; D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k; E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k.$$

则由  $[A_i] = [B_i] = [C_i] = [D_i] = [E_i]$  有  $[A] = [B] = [C] = [D] = [E]$ .

**定理 2** 若  $R_5(n)$  有解, 则问题  $R_5(n+50)$  必有解.

**证明** 由  $R_5(n)$  有解, 即  $M = \{1^2, 2^2, \dots, n^2\} = A \cup B \cup C \cup D \cup E$ , 其中  $A, B, C, D, E$  两两互不相交, 且各自元素之和相等  $[A] = [B] = [C] = [D] = [E]$ . 将新加入的 50 个数按照引理的方法分到  $A, B, C, D, E$  中去, 即得到  $R_5(n+50)$  的解.

**定理 3** 问题  $R_5(n)$  有解的充要条件是  $n \equiv 0, 2, 4 \pmod{5}$  且  $n \neq 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 17, 22$ ;

$$[A] = [B] = [C] = [D] = [E] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{30}.$$

**证明** 必要性. 若  $R_5(n)$  有解, 则有  $n(n+1)(2n+1) \equiv 0 \pmod{5}$ , 故由

$$n(n+1)(2n+1) \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow n \equiv 0, 2, 4 \pmod{5},$$

显然  $n \neq 2, 4, 5, 7$ .

若  $n=12$ , 则  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 130 < 12^2$ ,  $R_5(12)$  无解; 若  $n=14$ , 则  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 203$ . 设

$14^2 \in A$ , 而  $[A] - 14^2 = 7$  不能表示为平方和的形式, 故  $R_5(14)$  无解; 若  $n=15$ , 则  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 248$ .

设  $15^2 \in A$ , 而  $[A] - 15^2 = 23$  不能表示为平方和的形式, 故  $R_5(15)$  无解.

若  $n=17$ , 则  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 357$ , 于是有  $17^2 \in A, 16^2 \in B, 15^2 \in C, 14^2 \in D, 13^2 \in E$ , 而

$$[A] = 357 = 17^2 + 68 = 17^2 + 8^2 + 2^2; [B] = 357 = 16^2 + 101 = 16^2 + 10^2 + 1^2; [C] = 357 = 15^2 + 132; [D] = 357 = 14^2 + 161; [E] = 357 = 13^2 + 188.$$

若  $11^2 \in C$ , 则  $357 - 15^2 - 11^2 = 11$  不能表示为平方和的形式; 若  $11^2 \in E$ , 则  $357 - 13^2 - 11^2 = 67$  不能表示为平方和的形式, 故  $11^2 \in D$ , 则  $[D] = 357 = 14^2 + 11^2 + 6^2 + 2^2$ , 从而  $12^2 \in E$ , 而  $357 - 13^2 - 12^2 = 44$  不能表示为平方和的形式, 故  $R_5(17)$  无解.

当  $n=19$  时,  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 494$ , 问题

$R_5(19)$  有解:

$$A = \{1^2, 2^2, 5^2, 8^2, 12^2, 16^2\}, B = \{4^2, 6^2, 9^2, 19^2\}, C = \{3^2, 14^2, 17^2\}, D = \{7^2, 11^2, 18^2\}, E = \{10^2, 13^2, 15^2\}.$$

$$\text{当 } n = 20 \text{ 时, } \frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 574, \text{ 问题}$$

$R_5(20)$  有解:

$$A = \{1^2, 4^2, 6^2, 11^2, 20^2\}, B = \{2^2, 5^2, 16^2, 17^2\}, C = \{3^2, 12^2, 14^2, 15^2\}, D = \{7^2, 8^2, 10^2, 19^2\}, E = \{9^2, 13^2, 18^2\}.$$

$$\text{当 } n = 22 \text{ 时, } \frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 759, \text{ 问题}$$

$R_5(22)$  无解(证明略).

$$\text{当 } n = 24 \text{ 时, } \frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 980, \text{ 问题}$$

$R_5(24)$  有解:

$$A = \{1^2, 2^2, 4^2, 6^2, 7^2, 10^2, 11^2, 13^2, 22^2\}, B = \{3^2, 9^2, 19^2, 23^2\}, C = \{5^2, 15^2, 17^2, 21^2\}, D = \{8^2, 12^2, 14^2, 24^2\}, E = \{16^2, 18^2, 20^2\}.$$

$$\text{当 } n = 25 \text{ 时, } \frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 1105, \text{ 问题}$$

$R_5(25)$  有解:

$$A = \{1^2, 3^2, 5^2, 6^2, 7^2, 9^2, 10^2, 11^2, 13^2, 15^2, 17^2\}, B = \{2^2, 16^2, 19^2, 22^2\}, C = \{4^2, 8^2, 20^2, 25^2\}, D = \{12^2, 14^2, 18^2, 21^2\}, E = \{23^2, 24^2\}.$$

$$\text{当 } n = 27 \text{ 时, } \frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 1386, \text{ 问题}$$

$R_5(27)$  有解:

$$A = \{1^2, 2^2, 3^3, 4^2, 5^2, 6^2, 8^2, 10^2, 11^2, 12^2, 13^2, 16^2, 21^2\}, B = \{7^2, 18^2, 22^2, 23^2\}, C = \{14^2, 15^2, 17^2, 26^2\}, D = \{9^2, 24^2, 27^2\}, E = \{19^2, 20^2, 25^2\}.$$

$$\text{当 } n = 29 \text{ 时, } \frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 1711, \text{ 问题}$$

$R_5(29)$  有解:

$$A = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 6^2, 8^2, 11^2, 12^2, 16^2, 22^2, 24^2\}, B = \{5^2, 10^2, 19^2, 21^2, 28^2\}, C = \{13^2, 17^2, 18^2, 20^2, 23^2\}, D = \{7^2, 14^2, 25^2, 29^2\}, E = \{9^2, 15^2, 26^2, 27^2\}.$$

$$\text{当 } n = 30 \text{ 时, } \frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 1891, \text{ 问题}$$

$R_5(30)$  有解:

$$A = \{1^2, 5^2, 6^2, 8^2, 12^2, 13^2, 14^2, 16^2, 18^2, 26^2\}, B = \{4^2, 10^2, 11^2, 15^2, 23^2, 30^2\}, C = \{17^2, 19^2, 20^2, 29^2\}, D = \{3^2, 9^2, 21^2, 24^2, 28^2\}, E = \{2^2, 7^2, 22^2, 25^2, 27^2\}.$$

$$\text{当 } n = 32 \text{ 时, } \frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 2288, \text{ 问题}$$

$R_5(32)$  有解:

$$A = \{1^2, 5^2, 19^2, 21^2, 26^2, 28^2\}, B = \{2^2, 7^2, 17^2, 23^2, 24^2, 29^2\}, C = \{6^2, 12^2, 18^2, 20^2, 22^2, 30^2\}, D = \{8^2, 9^2, 10^2, 13^2, 15^2, 25^2, 32^2\}, E = \{3^2, 4^2, 11^2, 14^2, 16^2, 27^2, 31^2\}.$$

$$\text{当 } n = 34 \text{ 时, } \frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 2737, \text{ 问题}$$

$R_5(34)$  有解:

$$A = \{1^2, 3^2, 11^2, 19^2, 33^2, 34^2\}, B = \{2^2, 14^2, 26^2, 30^2, 31^2\}, C = \{4^2, 7^2, 9^2, 15^2, 18^2, 24^2, 25^2, 29^2\}, D = \{6^2, 8^2, 10^2, 27^2, 28^2, 32^2\}, E = \{5^2, 12^2, 13^2, 16^2, 17^2, 20^2, 21^2, 22^2, 23^2\}.$$

$$\text{当 } n = 35 \text{ 时, } \frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 2982, \text{ 问题}$$

$R_5(35)$  有解:

$$A = \{4^2, 29^2, 30^2, 35^2\}, B = \{2^2, 3^2, 5^2, 9^2, 10^2, 12^2, 15^2, 24^2, 27^2, 33^2\}, C = \{1^2, 13^2, 14^2, 26^2, 28^2, 34^2\}, D = \{8^2, 16^2, 22^2, 23^2, 25^2, 32^2\}, E = \{6^2, 7^2, 11^2, 17^2, 18^2, 19^2, 20^2, 21^2, 31^2\}.$$

$$\text{当 } n = 37 \text{ 时, } \frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 3515, \text{ 问题}$$

$R_5(37)$  有解:

$$A = \{3^2, 29^2, 36^2, 37^2\}, B = \{1^2, 10^2, 26^2, 27^2, 28^2, 35^2\}, C = \{8^2, 13^2, 21^2, 22^2, 24^2, 25^2, 34^2\}, D = \{2^2, 6^2, 14^2, 19^2, 20^2, 23^2, 30^2, 33^2\}, E = \{4^2, 5^2, 7^2, 9^2, 11^2, 12^2, 15^2, 16^2, 17^2, 18^2, 31^2, 32^2\}.$$

$$\text{当 } n = 39 \text{ 时, } \frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 4108, \text{ 问题}$$

$R_5(39)$  有解:

$$A = \{11^2, 19^2, 20^2, 35^2, 39^2\}, B = \{1^2, 5^2, 7^2, 16^2, 22^2, 30^2, 32^2, 37^2\}, C = \{3^2, 10^2, 15^2, 19^2, 31^2, 34^2, 36^2\}, D = \{6^2, 8^2, 9^2, 21^2, 23^2, 27^2, 28^2, 38^2\}, E = \{2^2, 4^2, 12^2, 13^2, 14^2, 17^2, 18^2, 24^2, 25^2, 26^2, 33^2\}.$$

$$\text{当 } n = 40 \text{ 时, } \frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 4428, \text{ 问题}$$

$R_5(40)$  有解:

$$A = \{40^2, 35^2, 32^2, 23^2, 7^2, 1^2\}, B = \{39^2, 34^2, 33^2, 22^2, 12^2, 5^2, 3^2\}, C = \{38^2, 29^2, 28^2, 27^2, 21^2, 13^2, 4^2, 2^2\}, D = \{37^2, 36^2, 25^2, 20^2, 19^2, 14^2, 10^2, 9^2\}, E = \{31^2, 30^2, 26^2, 24^2, 18^2, 17^2, 16^2, 15^2, 11^2, 8^2, 6^2\}.$$

$$\text{当 } n = 42 \text{ 时, } \frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 5117, \text{ 问题}$$

$R_5(42)$  有解:

$$A = \{42^2, 36^2, 34^2, 30^2, 1^2\}, B = \{41^2, 35^2, 32^2, 29^2, 15^2, 11^2\}, C = \{40^2, 33^2, 28^2, 27^2, 25^2, 16^2, 5^2\},$$

$3^2\}, D = \{39^2, 26^2, 24^2, 21^2, 19^2, 18^2, 17^2, 20^2, 23^2\}, E = \{38^2, 37^2, 31^2, 22^2, 14^2, 13^2, 12^2, 10^2, 9^2, 8^2, 7^2, 6^2, 4^2, 2^2\}.$

当  $n = 44$  时,  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 5874$ , 问题

$R_5(44)$  有解:

$A = \{44^2, 39^2, 37^2, 30^2, 12^2, 2^2\}, B = \{43^2, 38^2, 35^2, 33^2, 13^2, 9^2, 4^2, 1^2\}, C = \{42^2, 36^2, 32^2, 31^2, 28^2, 6^2, 3^2\}, D = \{41^2, 40^2, 25^2, 23^2, 21^2, 20^2, 18^2, 15^2, 7^2\}, E = \{34^2, 29^2, 27^2, 26^2, 24^2, 22^2, 19^2, 17^2, 16^2, 14^2, 11^2, 10^2, 8^2, 5^2\}.$

当  $n = 45$  时,  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 6279$ , 问题

$R_5(45)$  有解:

$A = \{45^2, 44^2, 42^2, 23^2, 5^2\}, B = \{43^2, 41^2, 40^2, 32^2, 11^2, 2^2\}, C = \{39^2, 38^2, 37^2, 36^2, 24^2, 8^2, 3^2\}, D = \{35^2, 34^2, 33^2, 31^2, 30^2, 27^2, 13^2, 7^2, 1^2\}, E = \{29^2, 28^2, 26^2, 25^2, 22^2, 21^2, 20^2, 19^2, 18^2, 17^2, 16^2, 15^2, 14^2, 12^2, 10^2, 9^2, 6^2, 4^2\}.$

当  $n = 47$  时,  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 7144$ , 问题

$R_5(47)$  有解:

$A = \{47^2, 46^2, 45^2, 28^2, 3^2, 1^2\}, B = \{44^2, 43^2, 42^2, 39^2, 7^2, 5^2\}, C = \{41^2, 38^2, 37^2, 36^2, 33^2, 15^2, 6^2, 2^2\}, D = \{40^2, 35^2, 34^2, 32^2, 31^2, 29^2, 16^2, 9^2\}, E = \{30^2, 27^2, 26^2, 25^2, 24^2, 23^2, 22^2, 21^2, 20^2, 19^2, 18^2, 17^2, 14^2, 13^2, 12^2, 11^2, 10^2, 8^2, 4^2\}.$

当  $n = 49$  时,  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 8085$ , 问题

$R_5(49)$  有解:

$A = \{49^2, 48^2, 47^2, 33^2, 9^2, 1^2\}, B = \{46^2, 45^2, 44^2, 38^2, 20^2, 10^2, 8^2\}, C = \{42^2, 41^2, 40^2, 39^2, 37^2, 11^2, 5^2, 2^2\}, D = \{36^2, 35^2, 34^2, 32^2, 31^2, 30^2, 29^2, 21^2, 15^2, 4^2\}, E = \{43^2, 28^2, 27^2, 26^2, 25^2, 24^2, 23^2, 22^2, 19^2, 18^2, 17^2, 16^2, 14^2, 13^2, 12^2, 7^2, 6^2, 3^2\}.$

当  $n = 52$  时,  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 9646$ , 问题

$R_5(52)$  有解:

$A = \{52^2, 50^2, 48^2, 44^2, 11^2, 9^2\}, B = \{51^2, 47^2, 45^2, 43^2, 31^2, 1^2\}, C = \{49^2, 42^2, 39^2, 38^2, 37^2, 33^2, 7^2, 3^2\}, D = \{46^2, 41^2, 40^2, 36^2, 34^2, 32^2, 25^2, 12^2, 2^2\}, E = \{35^2, 30^2, 29^2, 28^2, 27^2, 26^2, 24^2, 23^2, 22^2, 21^2, 20^2, 19^2, 18^2, 17^2, 16^2, 15^2, 14^2, 13^2, 10^2, 8^2, 6^2, 5^2, 4^2\}.$

当  $n = 54$  时,  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 10791$ , 问题

$R_5(54)$  有解:

$A = \{54^2, 50^2, 48^2, 45^2, 30^2, 9^2, 8^2, 1^2\}, B = \{53^2, 51^2, 46^2, 42^2, 34^2, 16^2, 7^2, 6^2, 2^2\}, C = \{52^2, 49^2, 47^2, 33^2, 32^2, 31^2, 15^2, 12^2, 5^2, 3^2\}, D = \{44^2, 43^2, 40^2, 38^2, 37^2, 35^2, 28^2, 22^2, 10^2\}, E = \{41^2, 39^2, 36^2, 29^2, 27^2, 26^2, 25^2, 24^2, 23^2, 21^2, 20^2, 19^2, 18^2, 17^2, 14^2, 13^2, 11^2, 4^2\}.$

当  $n = 55$  时,  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 11396$ , 问题

$R_5(55)$  有解:

$A = \{55^2, 50^2, 48^2, 45^2, 38^2, 9^2, 4^2, 1^2\}, B = \{54^2, 49^2, 46^2, 44^2, 39^2, 19^2, 10^2, 6^2, 3^2\}, C = \{53^2, 51^2, 47^2, 41^2, 35^2, 23^2, 17^2, 7^2, 2^2\}, D = \{52^2, 42^2, 36^2, 33^2, 31^2, 30^2, 28^2, 25^2, 24^2, 21^2, 16^2\}, E = \{43^2, 40^2, 37^2, 34^2, 32^2, 29^2, 27^2, 26^2, 22^2, 20^2, 18^2, 15^2, 14^2, 13^2, 12^2, 11^2, 5^2, 8^2\}.$

当  $n = 57$  时,  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 12673$ , 问题

$R_5(57)$  有解:

$A = \{5^2, 15^2, 37^2, 50^2, 51^2, 52^2, 57^2\}, B = \{1^2, 3^2, 12^2, 34^2, 41^2, 44^2, 47^2, 49^2, 56^2\}, C = \{2^2, 9^2, 21^2, 33^2, 42^2, 43^2, 46^2, 48^2, 55^2\}, D = \{4^2, 6^2, 14^2, 17^2, 23^2, 32^2, 35^2, 36^2, 39^2, 40^2, 45^2, 54^2\}, E = \{7^2, 8^2, 10^2, 11^2, 13^2, 16^2, 18^2, 19^2, 20^2, 22^2, 24^2, 25^2, 26^2, 27^2, 28^2, 29^2, 30^2, 31^2, 38^2, 53^2\}.$

当  $n = 59$  时,  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 14042$ , 问题

$R_5(59)$  有解:

$A = \{5^2, 16^2, 19^2, 50^2, 52^2, 53^2, 54^2, 59^2\}, B = \{2^2, 6^2, 12^2, 14^2, 28^2, 47^2, 48^2, 49^2, 51^2, 58^2\}, C = \{3^2, 13^2, 24^2, 32^2, 33^2, 43^2, 44^2, 45^2, 46^2, 57^2\}, D = \{1^2, 8^2, 11^2, 21^2, 30^2, 37^2, 38^2, 39^2, 40^2, 41^2, 42^2, 56^2\}, E = \{4^2, 7^2, 9^2, 10^2, 15^2, 17^2, 18^2, 20^2, 22^2, 23^2, 25^2, 26^2, 27^2, 29^2, 31^2, 34^2, 35^2, 36^2, 55^2\}.$

当  $n = 60$  时,  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 14762$ , 问题

$R_5(60)$  有解:

$A = \{10^2, 13^2, 46^2, 53^2, 54^2, 55^2, 60^2\}, B = \{2^2, 9^2, 15^2, 39^2, 44^2, 47^2, 51^2, 52^2, 59^2\}, C = \{1^2, 5^2, 6^2, 26^2, 29^2, 41^2, 42^2, 43^2, 45^2, 50^2, 58^2\}, D = \{7^2, 11^2, 20^2, 23^2, 36^2, 37^2, 38^2, 40^2, 48^2, 49^2, 57^2\}, E = \{3^2, 4^2, 8^2, 12^2, 14^2, 16^2, 17^2, 18^2, 19^2, 21^2, 22^2, 24^2, 25^2, 27^2, 28^2, 30^2, 31^2, 32^2, 33^2, 34^2, 35^2, 56^2\}.$

当  $n = 62$  时,  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 16275$ , 问题

$R_5(62)$  有解:

$A = \{2^2, 6^2, 14^2, 20^2, 51^2, 53^2, 56^2, 57^2, 62^2\}, B = \{4^2, 8^2, 12^2, 25^2, 28^2, 45^2, 46^2, 48^2, 51^2, 61^2\}, C = \{18^2, 22^2, 29^2, 30^2, 32^2, 43^2, 44^2, 49^2, 54^2, 60^2\}, D = \{3^2, 16^2, 23^2, 39^2, 42^2, 47^2, 40^2, 41^2, 55^2, 59^2\}, E = \{1^2, 5^2, 7^2, 9^2, 10^2, 11^2, 13^2, 15^2, 17^2, 19^2, 21^2, 24^2, 25^2, 26^2, 31^2, 33^2, 34^2, 35^2, 36^2, 37^2, 38^2, 52^2, 58^2\}.$

当  $n = 64$  时,  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 17888$ , 问题

$R_5(64)$  有解:

$A = \{64^2, 59^2, 56^2, 52^2, 49^2, 45^2, 6^2, 3^2\}, B = \{63^2, 58^2, 54^2, 51^2, 47^2, 44^2, 28^2, 8^2, 5^2, 4^2, 2^2\}, C = \{62^2, 55^2, 50^2, 46^2, 42^2, 39^2, 37^2, 32^2, 26^2, 7^2\}, D = \{61^2, 53^2, 43^2, 38^2, 36^2, 34^2, 31^2, 29^2, 35^2, 25^2, 23^2, 21^2, 19^2, 18^2, 15^2, 9^2\}, E = \{60^2, 57^2, 48^2, 41^2, 40^2, 35^2, 33^2, 30^2, 27^2, 24^2, 22^2, 20^2, 17^2, 16^2, 14^2, 13^2, 12^2, 11^2, 1^2\}.$

当  $n = 65$  时,  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 18733$ , 问题

$R_5(65)$  有解:

$A = \{65^2, 57^2, 55^2, 51^2, 47^2, 35^2, 33^2, 30^2, 13^2, 5^2, 4^2\}, B = \{64^2, 58^2, 54^2, 46^2, 45^2, 36^2, 34^2, 32^2, 24^2, 10^2, 8^2\}, C = \{63^2, 59^2, 56^2, 48^2, 43^2, 42^2, 42^2, 39^2, 23^2, 12^2, 6^2\}, D = \{62^2, 60^2, 53^2, 50^2, 49^2, 44^2, 37^2, 15^2, 7^2\}, E = \{61^2, 52^2, 41^2, 40^2, 38^2, 31^2, 29^2, 28^2, 27^2, 26^2, 25^2, 22^2, 21^2, 20^2, 19^2, 18^2, 17^2, 16^2, 14^2, 11^2, 9^2, 3^2, 2^2, 1^2\}.$

当  $n = 67$  时,  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 20502$ , 问题

$R_5(67)$  有解:

$A = \{67^2, 62^2, 59^2, 56^2, 54^2, 51^2, 5^2, 3^2, 1^2\}, B = \{66^2, 61^2, 58^2, 57^2, 52^2, 48^2, 28^2, 4^2, 2^2\}, C = \{65^2, 60^2, 55^2, 47^2, 44^2, 41^2, 37^2, 36^2, 31^2, 10^2, 8^2, 6^2\}, D = \{64^2, 53^2, 50^2, 45^2, 42^2, 40^2, 35^2, 33^2, 32^2, 30^2, 26^2, 24^2, 13^2, 7^2\}, E = \{63^2, 49^2, 46^2, 43^2, 39^2, 38^2, 34^2, 29^2, 27^2, 25^2, 23^2, 22^2, 21^2, 20^2, 19^2, 18^2, 17^2, 16^2, 15^2, 14^2, 12^2, 11^2, 9^2\}.$

当  $n = 69$  时,  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 22379$ , 则由引

理 4  $R_5(69)$  有解:

$A = \{1^2, 2^2, 5^2, 8^2, 12^2, 16^2, 20^2, 29^2, 32^2, 37^2, 44^2, 45^2, 51^2, 58^2, 63^2, 66^2\}, B = \{4^2, 6^2, 9^2, 19^2, 21^2, 28^2, 33^2, 36^2, 42^2, 47^2, 54^2, 55^2, 60^2, 69^2\}, C = \{3^2, 14^2, 17^2, 22^2, 27^2, 31^2, 38^2, 43^2, 46^2, 50^2, 59^2, 64^2, 65^2\}, D = \{7^2, 11^2, 18^2, 24^2, 25^2, 30^2, 39^2, 41^2, 48^2,$

$51^2, 56^2, 62^2, 67^2\}, E = \{10^2, 13^2, 15^2, 23^2, 26^2, 34^2, 35^2, 40^2, 49^2, 52^2, 57^2, 61^2, 68^2\}.$

当  $n = 72$  时,  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = 25404$ , 问题

$R_5(72)$  有解:

$A = \{72^2, 70^2, 62^2, 59^2, 43^2, 42^2, 32^2, 22^2, 13^2, 1^2\}, B = \{71^2, 68^2, 66^2, 56^2, 48^2, 46^2, 45^2, 40^2, 12^2, 7^2, 3^2\}, C = \{69^2, 65^2, 60^2, 54^2, 53^2, 39^2, 37^2, 36^2, 28^2, 26^2, 25^2, 23^2, 17^2, 2^2\}, D = \{67^2, 63^2, 58^2, 57^2, 55^2, 47^2, 44^2, 38^2, 30^2, 24^2, 11^2, 9^2, 5^2, 4^2\}, E = \{64^2, 61^2, 51^2, 50^2, 49^2, 41^2, 35^2, 34^2, 33^2, 31^2, 29^2, 27^2, 21^2, 20^2, 19^2, 18^2, 16^2, 15^2, 14^2, 10^2, 8^2, 6^2\}.$

逐次利用定理 3 及数学归纳法<sup>[4]</sup> 知, 问题  $R_5(n)$  有解的必要条件是  $n \equiv 0, 2, 4 \pmod{5}$  且  $n \neq 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 17, 22$ ;  $[A] = [B] = [C] = [D] = [E] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{30}$ .

再结合引理 4 可得到  $n$  满足问题  $R_5(n)$  的充要条件的所有解.

充分性. 若  $n$  满足条件  $n \equiv 0, 2, 4 \pmod{5}$  且  $n \neq 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 17, 22$ ;

$[A] = [B] = [C] = [D] = [E] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{30}$ .

则  $n(n+1)(2n+1) \equiv 0 \pmod{5}$ , 且  $n(n+1)(2n+1) \equiv 0 \pmod{6}$ , 故  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = \text{整数}$ . 由引理 4 知

道, 能将集合  $M = \{1^2, 2^2, \dots, n^2\}$  分拆成 5 个子集  $A, B, C, D, E$  满足:

(1)  $M = A \cup B \cup C \cup D \cup E$ .  $A, B, C, D, E$  两两互不相交;

(2)  $A, B, C, D, E$  的各自元素之和相等  $[A] = [B] = [C] = [D] = [E]$ .

故问题  $R_5(n)$  有解.

参考文献:

- [1] 阴洪生. 一个集合分拆问题[J]. 中等数学, 2006(2): 11-15.
- [2] 阴洪生. 平方数集合的三分拆问题[J]. 中等数学, 2008(5): 16-17.
- [3] 罗益奎. 关于平方数集合的四分拆问题[J]. 广西民族学院学报, 2011(1): 77-79.
- [4] 华罗庚. 华罗庚科普著作选[M]. 上海: 上海教育出版社, 1984: 114-125.

(责任编辑: 尹 闯)