DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2012.01.014

二阶非线性时滞微分方程边值问题正解的存在性*

Existence of Positive Solutions for Boundary Value Problems of Nonlinear Second-Order Delay Differential Equations

王　勇,韦煜明

WANG Yong,WEI Yu-ming

(广西师范大学数学科学学院,广西桂林　541004)

(School of Mathematical Science,Guangxi Normal University,Guilin,Guangxi,541004,China)

摘要:给出非线性二阶时滞微分方程边值问题存在正解的一些条件,并利用锥上的 Guo-Krasonselskii 不动点定理证明这些条件是成立的.

关键词:时滞微分方程　边值问题　Guo-Krasonselskii 不动点定理　锥

中图法分类号:O175.8　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2012)01-0040-04

Abstract:The conditions of existence of positive solutions for nonlinear second-order boundary value problems with delay are given,and their proofs are based on Guo-Krasonselskii fixed point theorem in cone.

Key words:delay differential equation,boundary value problem,Guo-Krasonselskii fixed point theorem,cone

我们考虑边值问题(BVP)

$$(p(t)u')' + \lambda a(t)f(t,u(t-\tau)) = 0, 0 < t < 1, \quad (0.1)$$

$$\alpha_1 u(t) - \beta_1 p(t)u'(t) = 0, -\tau \leqslant t \leqslant 0, \quad (0.2)$$

$$\alpha_2 u(1) + \beta_2 p(1)u'(1) = 0$$

解的存在性,其中 $\lambda > 0$,$\tau \in (0,1)$ 是一个常数,并且满足

(H_1) $p(t) \in C([0,1],(0,\infty))$,$f \in C([0,1]\times[0,\infty),(0,\infty))$;

(H_2) $\alpha_i,\beta_i \geqslant 0, i=1,2, \rho = \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\alpha_1\int_0^1 \frac{d\gamma}{p(\gamma)} > 0$.

当 $\tau=0$,$a=1$,并且(0.2)式中的 $t=0$ 时,边值问题(BVP)为 Sturm - Liouville 常微分边值问题,此时边值问题(0.1)和(0.2)的解的存在性问题已经得到了广泛研究[1~3].

当 $\tau=0$,$a(t)>0$,并且(0.2)式中的 $t=0$ 时,Ge weigao 等[4] 应用锥上的不动点定理得到了(0.1)式和(0.2)式正解的存在性.而且正解是在$(H_1)'$:$p(t)\in C([0,1],(0,\infty))$,$f\in C([0,1]\times[0,\infty),R)$,$(H_2)$ 和 (H_3):$a\in C((0,1),(0,\infty))$,$0<\int_0^1 G(t,s)a(s)ds<\infty$ 的条件下得到的.其中 ρ 如(H_2)中的定义,$G(t,s)$ 是微分方程$(p(t)u')'=0$ 在边值条件 $\alpha_1 u(0)-\beta_1 p(0)u'(0)=0$,$\alpha_2 u(1)+\beta_2 p(1)u'(1)=0$ 的格林函数,形式如下:

$$G(t,s) = \begin{cases} \rho^{-1}(\beta_1 + \alpha_1\int_0^t \frac{d\gamma}{p(\gamma)})(\beta_2 + \alpha_2\int_s^1 \frac{d\gamma}{p(\gamma)}), \\ \quad 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1; \\ \rho^{-1}(\beta_1 + \alpha_1\int_0^s \frac{d\gamma}{p(\gamma)})(\beta_2 + \alpha_2\int_t^1 \frac{d\gamma}{p(\gamma)}), \\ \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \quad (0.3)$$

那么,由格林函数的定义容易得到,对于所有的 $t\in[0,1]$,$G(t,s)\leqslant G(s,s)$.

对于 $p=1$,$\tau=0$,在狄利克雷边界条件下,很多作者研究了这个问题[5~8]. D. Bai 等[5] 研究了

收稿日期:2011-06-07

修回日期:2011-10-30

作者简介:王　勇(1985-),男,硕士研究生,主要从事微分方程研究。

*国家自然科学基金项目(11061006);广西教育厅科研项目(201012MS025);广西壮族自治区研究生教育创新计划项目(2011106020701M37)资助。

$$\begin{cases}u''+\lambda g(t,u(t-\tau))=0,0<t<1,0<\tau;\\ u(t)=0,-\tau\leqslant t\leqslant 0;\\ u(1)=0.\end{cases}$$

其中 λ 是一个正实参数,$g(t,u)=a(t)f(t,u)$.

W. Wang 等[6] 研究了

$$\begin{cases}x''+\lambda p(t)f(t,x(t-\tau))=0,t\in J=[0,1];\\ x(t)=0,-\tau\leqslant t\leqslant 0;\\ x(1)=ax(\eta).\end{cases}$$

其中 λ 是一个正实参数.他们在一定条件下都获得了一些很好的结果.

受到以上研究成果的启发,本文给出 λ 的适当范围来确保边值问题(0.1) 和 (0.2) 的正解的存在,并利用 Guo - Krasonselskii 不动点定理证明了该结论.

1 预备知识

需要假设:

(H_4) $a\in C((0,1),(0,\infty)),0<\int_0^1 G(s,s)a(s)\mathrm{d}s<\infty$,

并且允许 $a(t)$ 在(0,1) 的端点处奇异.

定理 1.1[9] 令 K 为 Banach 空间 E 中的一个锥,Ω_1,Ω_2 为 E 中的两个有界开集,使得 $\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$. 令 T:$K\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)\rightarrow K$ 是一个全连续算子使得:

$\|Tu\|\leqslant\|u\|$,对所有 $u\in K\cap\partial\Omega_1$,$\|Tu\|\geqslant\|u\|$,对所有 $u\in K\cap\partial\Omega_2$;或者 $\|Tu\|\geqslant\|u\|$,对所有 $u\in K\cap\partial\Omega_1$,$\|Tu\|\leqslant\|u\|$,对所有 $u\in K\cap\partial\Omega_2$,

则 T 在 $K\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$ 有一个不动点.

引理 1.1[10] 假设:

(B_1) $p(t)\in C([0,1],(0,\infty))$,

(B_2) $\alpha_i,\beta_i\geqslant 0,i=1,2,\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1>0$ 成立,并且 $u(t)$ 满足

$$(p(t)u'(t))'=-v(t),0\leqslant t\leqslant 1,$$

$$\alpha_1 u(0)-\beta_1 p(0)u'(0)=0,$$

$$\alpha_2 u(1)+\beta_2 p(1)u'(1)=0.$$

其中 $v(t)\in L^1(0,1),v(t)\geqslant 0$. 那么有 $u(t)\geqslant\|u\|q(t),t\in[0,1]$,

$$q(t)=\min\left(\frac{\beta_1+\alpha_1\int_0^t(\mathrm{d}\gamma/p(\gamma))}{\beta_1+\alpha_1\int_0^1(\mathrm{d}\gamma/p(\gamma))},\frac{\beta_2+\alpha_2\int_t^1(\mathrm{d}\gamma/p(\gamma))}{\beta_2+\alpha_2\int_0^1(\mathrm{d}\gamma/p(\gamma))}\right),$$

很容易得到 $0<q(t)<1$. 这里 $\|\cdot\|$ 代表上确界范数.为了方便以下采用如下的记号

$$\xi=\min_{t\in[0,1-\tau]}q(t),\tau\in(0,1).\tag{1.1}$$

定义 1.1 $u(t)$ 称为边值问题(0.1) 和(0.2) 的一个正解,如果它满足:

(1) $u\in C[-\tau,1]\cap C^2(0,1)$;

(2) $u(t)>0,t\in(0,1)$ 并且满足边界条件(0.2);

(3) $(p(t)u')'=-\lambda a(t)f(t,u(t-\tau)),t\in(0,1)$.

若令

$E=\{u\in C[-\tau,1]:u(t)=0,\forall t\in[-\tau,0];\alpha_2 u(1)+\beta_2 p(1)u'(1)=0\}$,

其中的范数 $\|\cdot\|$ 定义为 $\|u\|=\sup\{|u(t)|:-\tau\leqslant t\leqslant 1\}$,那么$(E,\|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间.很显然 $\|\cdot\|_{[0,1]}=\|\cdot\|$,对于 $u\in E:u\geqslant 0$. 这里 $\|\cdot\|_{[0,1]}$ 表示 $C[0,1]$ 上的上确界范数.

边值问题(0.1) 和(0.2) 的解可以表示为

$$u(t)=\begin{cases}0,-\tau\leqslant t\leqslant 0,\\ \lambda\int_0^1 a(s)G(t,s)f(s,u(s-\tau))\mathrm{d}s,\\ \quad 0\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}\tag{1.2}$$

其中的 $G(t,s)$ 如(0.3) 式.

定义一个锥 $K\subset E$,

$K=\{u\in E:u(t)\geqslant 0,\forall t\in[0,1],u(t)\geqslant q(t)\|u\|\}$.

ξ 定义如(1.1) 式,记

$$\min f_\infty:=\lim_{u\to\infty}\inf_{s\in[0,1]}\min\frac{f(s,u)}{u},$$

$$\max f_0:=\lim_{u\to 0^+}\sup_{s\in[0,1]}\max\frac{f(s,u)}{u},$$

$$\min f_0=\lim_{u\to 0^+}\inf_{s\in[0,1]}\min\frac{f(s,u)}{u},$$

$$\max f_\infty:=\lim_{u\to\infty}\sup_{s\in[0,1]}\max\frac{f(s,u)}{u}.$$

2 主要结果

定理 2.1 假设$(H_1)\sim(H_4)$成立,且 $\min f_\infty>0,\max f_0<\infty$. 存在一个 $\varepsilon>0$,使得 $f(s,u)\leqslant(\max f_0+\varepsilon)u,f(s,u)\geqslant(\min f_\infty-\varepsilon)u,s\in[0,1]$. 对于

$$\lambda\in\left[\frac{1}{\xi(\min f_\infty-\varepsilon)\sup\int_\tau^1 a(s)G(t,s)\mathrm{d}s},\frac{1}{(\max f_0+\varepsilon)\int_\tau^1 G(s,s)a(s)\mathrm{d}s}\right],\tag{2.1}$$

边值问题(0.1) 和(0.2) 至少有一个正解.

证明 定义积分算子 T 为

$$Tu(t)=\begin{cases}0, -\tau\leqslant t\leqslant 0,\\ \lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,u(s-\tau))\mathrm{d}s,\\ \quad 0\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

$u\in K$,很显然 $\|\cdot\|_{[0,1]}=\|\cdot\|$,由引理1.1,我们有 $u(t)\geqslant\|u\|q(t)$, $t\in[0,1]$,$Tu\in K$,由 Arzela - Ascoli 定理知 T 是一个全连续算子. 现在用定理(1.1) 证明 T 有一个不动点.

由 $\max f_0<\infty$,则存在 $\varepsilon>0$,$N_1>0$,固定 ε 使得 $0\leqslant u\leqslant N_1$,$f(t,u)\leqslant(\max f_0+\varepsilon)u$. 令 $\Omega_1=\{u\in E:\|u\|<N_1\}$,$\partial\Omega_1=\{u\in E:\|u\|=N_1\}$, $u\in K\cap\partial\Omega_1$,有

$$\|Tu\|=\lambda\sup_{t\in[0,1]}\int_0^1 a(s)G(t,s)f(s,u(s-\tau))\mathrm{d}s\leqslant\lambda(\max f_0+\varepsilon)\int_0^1 a(s)G(s,s)u(s-\tau)\mathrm{d}s=\lambda(\max f_0+\varepsilon)\int_{-\tau}^{1-\tau}a(s+\tau)G(s+\tau,s+\tau)u(s)\mathrm{d}s=\lambda(\max f_0+\varepsilon)\int_0^{1-\tau}a(s+\tau)G(s+\tau,s+\tau)u(s)\mathrm{d}s\leqslant\lambda(\max f_0+\varepsilon)\int_0^{1-\tau}a(s+\tau)G(s+\tau,s+\tau)\|u\|\mathrm{d}s=\lambda(\max f_0+\varepsilon)\int_\tau^1 a(s)G(s,s)\mathrm{d}s\|u\|\leqslant\|u\|.$$

另外,由 $\min f_\infty>0$,存在一个 $N_2>N_1>0$,使得 $u>N_2$, $f(s,u)\geqslant(\min f_\infty-\varepsilon)u$. 令 $\Omega_2=\{u\in E:\|u\|<N_2\}$,$\partial\Omega_2=\{u\in E:\|u\|=N_2\}$. 那么对于 $u\in K\cap\partial\Omega_2$,由(1.1) 式得

$$\|Tu\|=\lambda\sup_{t\in[0,1]}\int_0^1 a(s)G(t,s)f(s,u(s-\tau))\mathrm{d}s\geqslant\lambda\sup_{t\in[0,1]}(\min f_\infty-\varepsilon)\int_0^1 a(s)G(t,s)u(s-\tau)\mathrm{d}s=\lambda\sup_{t\in[0,1]}(\min f_\infty-\varepsilon)\int_{-\tau}^{1-\tau}a(s+\tau)G(t,s+\tau)u(s)\mathrm{d}s=\lambda\sup_{t\in[0,1]}(\min f_\infty-\varepsilon)\int_0^{1-\tau}a(s+\tau)G(t,s+\tau)u(s)\mathrm{d}s\geqslant\lambda\sup_{t\in[0,1]}(\min f_\infty-\varepsilon)\int_0^{1-\tau}a(s+\tau)G(t,s+\tau)q(s)\|u\|\mathrm{d}s\geqslant\lambda\sup_{t\in[0,1]}(\min f_\infty-\varepsilon)\int_0^{1-\tau}a(s+\tau)G(t,s+\tau)\xi\|u\|\mathrm{d}s=\lambda\sup_{t\in[0,1]}(\min f_\infty-\varepsilon)\int_\tau^1 a(s)G(t,s)\xi\|u\|\mathrm{d}s\geqslant\|u\|.$$

根据定理(1.1) 的第一部分,T 有一个不动点 $u\in K\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$,并且 $u(t)$ 是边值问题(0.1) 和(0.2) 的一个正解,所以定理 2.1 成立.

定理 2.2 假设(H_1)～(H_4)成立,且 $\min f_0>0$,$\max f_\infty<\infty$. 假设存在一个 $\varepsilon>0$,使得 $f(s,u)\geqslant(\min f_0-\varepsilon)u$,$f(s,u)\leqslant(\max f_\infty+\varepsilon)u$,$s\in[0,1]$. 对于

$$\lambda\in\left[\frac{1}{(\min f_0-\varepsilon)\ \xi\sup\int_\tau^1 G(t,s)a(s)\mathrm{d}s},\frac{1}{(\max f_\infty+\varepsilon)\int_0^1 G(s,s)a(s)\mathrm{d}s}\right].\quad(2.2)$$

其中 ξ 如(1.1) 式定义. 那么边值问题(0.1) 和(0.2) 至少有一个正解.

证明 由 $\min f_0>0$,存在一个 $N_1>0$,使得对于 $0<u<N_1$,有 $f(s,u)\geqslant(\min f_0-\varepsilon)u$. 令 $\Omega_1=\{u\in E:\|u\|<N_1\}$,$\partial\Omega_1=\{u\in E:\|u\|=N_1\}$,那么对于 $u\in K\cap\partial\Omega_1$ 和(1.1) 式有

$$\|Tu\|=\lambda\sup_{t\in[0,1]}\int_0^1 a(s)G(t,s)f(s,u(s-\tau))\mathrm{d}s\geqslant\lambda(\min f_0-\varepsilon)\sup_{t\in[0,1]}\int_\tau^1 a(s)G(t,s)u(s-\tau)\mathrm{d}s=\lambda(\min f_0-\varepsilon)\sup_{t\in[0,1]}\int_0^{1-\tau}a(s+\tau)G(t,s+\tau)u(s)\mathrm{d}s\geqslant\lambda(\min f_0-\varepsilon)\sup_{t\in[0,1]}\int_0^{1-\tau}a(s+\tau)G(t,s+\tau)q(s)\|u\|\mathrm{d}s\geqslant\lambda(\min f_0-\varepsilon)\sup_{t\in[0,1]}\int_0^{1-\tau}a(s+\tau)G(t,s+\tau)(\min_{s\in[0,1-\tau]}q(s))\|u\|\mathrm{d}s=\lambda(\min f_0-\varepsilon)\sup_{t\in[0,1]}\int_0^{1-\tau}a(s+\tau)G(t,s+\tau)\tau)\xi\|u\|\mathrm{d}s=\lambda\xi(\min f_0-\varepsilon)\sup_{t\in[0,1]}\int_\tau^1 a(s)G(t,s)\|u\|\mathrm{d}s\geqslant\|u\|.$$

另外,由 $\max f_\infty<\infty$,存在一个 $N_2>0$,使得 $u>N_2$, $f(s,u)\leqslant(\max f_\infty+\varepsilon)u$. 此时有两种情况:(a)$f$ 有界;(b)f 无界.

对于(a),我们可以找到一个 $N>0$,使得 $f(s,u)\leqslant N$,$0<u<N$,和 $\lambda N\int_0^1 a(s)G(s,s)\mathrm{d}s=N_2>N_1$. 令 $\Omega_2=\{u\in E:\|u\|<N_2\}$,$\partial\Omega_2=\{u\in E:\|u\|=N_2\}$,那么对于 $u\in K\cap\partial\Omega_2$ 有

$$\|u\|\leqslant\lambda\int_0^1 a(s)G(s,s)f(s,u(s-\tau))\mathrm{d}s\leqslant\lambda N\int_0^1 a(s)G(s,s)\mathrm{d}s\leqslant N_2=\|u\|.$$

对于(b),选择 $N_2>N_1>0$,使得 $f(s,u)\leqslant f(s,N_2)$, $f(s,N_2)\leqslant(\max f_\infty+\varepsilon)N_2$,$s\in[0,1]$,$0<u<N_2$. 令 $\Omega_2=\{u\in E:\|u\|<N_2\}$,$\partial\Omega_2=\{u\in E:\|u\|=N_2\}$,那么对于 $u\in K\cap\partial\Omega_2$,有

$$\|Tu\|=\lambda\sup_{t\in[0,1]}\int_0^1 a(s)G(t,s)f(s,u(s-\tau))\mathrm{d}s\leqslant\lambda\int_0^1 a(s)G(s,s)f(s,u(s-\tau))\mathrm{d}s\leqslant\lambda\int_0^1 a(s)G(s,s)f(s,N_2)\mathrm{d}s\leqslant\lambda(\max f_\infty+$$

$\varepsilon)\int_0^1 G(s,s)a(s)N_2\mathrm{d}s \leqslant N_2 = \|u\|$.

根据定理(1.1)的第二部分,T有一个不动点 $u \in K\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$,并且 $u(t)$ 是边值问题(0.1)和(0.2)的一个正解,所以定理2.2成立.

推论2.1 假设$(H_1)\sim(H_4)$成立,并且 $\min f_0=\infty$,$\max f_\infty<\infty$,那么边值问题(0.1)和(0.2)存在一个正解.

证明 由 $\min f_0=\infty$,存在一个 $L>0$,$N_1>0$ 使得

$$f(t,u)\geqslant Lu,0<u<N_1,\lambda L\xi\int_\tau^1 a(s)G(t,s)\mathrm{d}s \geqslant 1,$$

其中ξ定义如(1.1)式.记$\Omega_1=\{u\in E:\|u\|<N_1\}$,$\partial\Omega_1=\{u\in E:\|u\|=N_1\}$,对于 $u\in K\cap\partial\Omega_1$,有

$$\|Tu\| = \lambda\sup_{t\in[0,1]}\int_0^1 a(s)G(t,s)f(s,u(s-\tau))\mathrm{d}s \geqslant \lambda L\int_0^1 a(s)G(t,s)u(s-\tau)\mathrm{d}s \geqslant \lambda L\int_\tau^1 a(s)G(t,s)u(s-\tau)\mathrm{d}s = \lambda L\int_0^{1-\tau} a(s+\tau)G(t,s+\tau)u(s)\mathrm{d}s \geqslant \lambda L\xi\int_0^{1-\tau} a(s+\tau)G(t,s+\tau)\|u\|\mathrm{d}s = \lambda L\xi\int_\tau^1 a(s)G(t,s)\|u\|\mathrm{d}s \geqslant \|u\|.$$

由 $\max f_\infty<\infty$,那么只需证明存在一个 $N_2>N_1$,$\Omega_2=\{u\in E:\|u\|<N_2\}$,$\partial\Omega_2=\{u\in E:\|u\|=N_2\}$.当$u\in K\cap\partial\Omega_2$时,$\|u\|\leqslant\|u\|$,后续证明过程如定理2.2.

那么根据定理1.1.我们可以得到T有一个不动点 $u\in K\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$,并且$u(t)$是边值问题(0.1)和(0.2)的一个正解,所以推论2.1成立.

参考文献:

[1] Agarwal R P,Hong H L,Yeh C C,et al. The existence of positive solutions for Sturm-Liouville boundary value problems[J]. Comp Math Appl,1998,35(9):89-96.

[2] Ge W G,Xue C Y. Some fixed point theorems and existence of positive solutions of two-point boundary-value problems[J]. Nonlinear Analysis,2009,70:16-31.

[3] Xue C Y,Ge W G. New fixed point theorems and applecations to boundary value problems with p-Laplacian [J]. Comp Math Appl,2007,53:706-716.

[4] Ge W G,Ren J L. New existence theorems of positive solutions for Sturm-Liouville boundary value problems [J]. Appl Math Comput,2004,148:631-644.

[5] Bai D Y,Xu Y T. Existence of positive solutions for boundary-value problems of second-order delay differential eqations[J]. Appl Math Lett,2005(18):621-630.

[6] Wang W B,Shen J H. Positive solutions to a multi-point boundary value problem with delay[J]. Appl Math Comput,2007,188:96-102.

[7] Yao Q L. An existence theorem of a positive solution to semiposition Sturm-Liouville boundary value problem [J]. Appl Math Lett,2010,23:1401-1406.

[8] Jiang D Q. Multiple positive solutions for boundary value problems of second-order delay differential equations [J]. Appl Math Lett,2002,15:575-583.

[9] Guo D,Lakshmikantham V. Nonlinear problems in abstract cones[M]. New York:Acdemic Press,1988.

[10] Anuradha V,Hai D D,Shivaji R. Existence results for superlinear semipositive BVPs[J]. Proc Amer Math Soc,1996,124:757-763.

(责任编辑:尹 闯)

科学家研制石墨烯调制器可以实现超快数据通讯

美国科学家在石墨烯上找到了一个最有效的位置来施加足够的电压,当施加充足的负电压时,电子被吸出石墨烯并不再能吸收光子,因此,当光子通过石墨烯时,石墨烯完全透明,光被“打开”;当施加某种正电压时,石墨烯也是透明的,但是电子紧密地包裹在一起,使它们无法吸收光子,从而有效地“关闭”光线。所此科学家们将石墨烯铺展在一个硅波导管的顶部,建造出一款能打开或关闭光的光调制器(调制器是控制数据传输速度的关键),其调制速度目前为1吉赫(千兆赫)。与基于电学的组件相比,基于光学的组件有多种优势,包括能携带更密集的数据包更快地传输。新调制器是全球最小的光调制器,仅为25μm,比一般为几平方毫米的普通商用调制器小很多,其能在现有最快速度10多倍的速度下操作,新技术有望显著提升超快光通讯和光计算的能力,未来,使用该石墨烯调制器,消费者只需几秒,就能将整部三维高清电影“搬”到智能手机上。

(据科学网)