DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2012.01.015

广西科学 Guangxi Sciences 2012,19(1):44～45,49

# 一类具有 Allee 效应和避难所的食饵与捕食模型的定性性质*

# Some Qualitative Properties of a Class of Predator-prey Model with Allee Effect and Refuges

唐贵坚，唐清干

TANG Gui-jian, TANG Qing-gan

(桂林电子科技大学数学与计算科学学院，广西桂林 541004)

(School of Mathematics and Computational Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

**摘要**：运用微分方程的基本理论，讨论一类具有 Allee 效应和避难所的食饵与捕食模型，证明解的有界性，分析系统奇点的存在性和稳定性，得到系统极限环存在和无环的充分条件.

**关键词**：Allee 效应　避难所　全局渐近稳定　极限环　食饵与捕食模型

**中图法分类号**：O175.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1005-9164(2012)01-0044-02

**Abstract**: A predator-prey model with Allee effect and a constant prey refuge was considered in this paper. The positive boundedness of the solutions was proved by using differential basic theory while the existence and stability of the positive equilibriam point were analyze. Finally, some sufficient conditions for the existence and nonexistence limit cycles of the model were obtained.

**Key words**: Allee effect, refuge, global asymptotic stability, limit cycle, predator-prey model

在生物系统中，Allee 效应是一种普遍现象，它描述种群的低密度对生育水平的影响，说明如果人们不保护密度较小的珍稀动物，即使它们不被捕杀，也会灭绝. 这是对 Logistic 模型的合理修正. 文献[1]分析系统：$x'=rx(1-\frac{x}{r})(1-\frac{A+c}{x+c})-mxy$，$y'=emxy-dy$。本文研究另一类同时具有 Allee 效应和避难所的捕食系统。

## 1 模型的性质

具有 Alee 效应和避难所的食饵与捕食系统：

$$\begin{cases} x'=r(1-\frac{x}{k})(x-L)x-h(x-m)^n y, \\ y'=y(-d+ch(x-m)^n), 0<n\leqslant 1. \end{cases} \quad (1)$$

其中，$r$ 是食饵的内禀增长率；$k$ 是食饵种群的环境容纳量，$L$ 是该种群能够存活的最小种群密度；$h(x-m)^n$ 是功能反应函数，$m$ 是食饵的避难所的最大容纳量. $r,k,L,h,d,c$ 都是具有生态学意义的正参数.

设 $M_0=\{(x,y)\mid x>m, y>0\}$，且 $0\leqslant L<k$. 在(1)式中，令 $\bar{x}=x-m$，$\bar{y}=hy$，$\bar{x},\bar{y}$ 仍记为 $x,y$，则(1)式转化为：

$$\begin{cases} x'=\alpha(x+m)(k-m-x)(x+m-L)- \\ \quad x^n y, 0<n\leqslant 1, \\ y'=y(-d+\beta x^n). \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\alpha=\frac{r}{k}>0$，$\beta=ch>0$. 则 $M=\{(x,y)x>0, y>0\}$，根据生态意义，在 $M$ 上讨论该系统.

定义函数 $\phi(x)=(k-m-x)(x+m-L)=-x^2+(k-2m+L)x+(m-L)(k-m)$，$\phi(x)=0$ 的判别式 $\Delta=k^2+L^2-2kL=(k-L)^2$，又 $0\leqslant L<k$，则 $\Delta=(k-L)^2>0$.

若 $\phi(0)=(m-L)(k-m)>0$，那么 $\phi(x)$ 只有

收稿日期：2011-06-29

修回日期：2011-09-26

作者简介：唐贵坚(1978-)，男，硕士研究生，主要从事微分方程定性理论研究。

*国家自然科学基金项目(No. 10961011)资助。

唯一的正根 $x_0=k-m$. 因此,如果 $L<m<k$,系统(2)至多有两个非负奇点,其中,$E_0=(x_0,0)$,$E_*(x_*,y_*)$,$x_*=(\frac{d}{\beta})^{\frac{1}{n}}$,$y_*=\frac{\alpha(x_*+m)\varphi(x_*)}{x_*^n}$,则当

$$L-(\frac{d}{\beta})^{\frac{1}{n}}<m<k-(\frac{d}{\beta})^{\frac{1}{n}}$$,$E_*(x_*,y_*)$ 是唯一的非负奇点.

在下面的分析中,均假设 $L<m<k$.

**定理 1.1** 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,则系统(2)的满足初始条件 $m(0)\in M$ 的正解是最终有界的.

**证明** 令 $m(t)=\beta x(t)+y(t)$,$\forall t\geqslant 0$,因为 $m'(t)=\beta x'(t)+y'(t)=\alpha\beta(x+m)(k-m-x)(x+m-L)+\beta dx-d(y+\beta x)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,设 $f(x)=\alpha\beta(x+m)(k-m-x)(x+m-L)+\beta dx$,则 $\exists$ 正常数 $l>0$,使 $f(x)\leqslant l$,$x\in[0,+\infty)$,有 $m'(t)\leqslant l-dm(t)$,即 $m'(t)+dm(t)\leqslant l$,则由比较原理和常数变易法得

$$0<m(t)<\frac{l}{d}(1-e^{-dt})+m(0)e^{-d},$$

当 $t\to+\infty$ 时,得 $0<m(t)<\frac{l}{d}$. 所以系统(2)满足 $m(0)\in M$ 的解是最终有界的.

## 2 奇点的性态分析

**定理 2.1** (Ⅰ)若 $m>k-(\frac{d}{\beta})^{\frac{1}{n}}$,那么 $E_0$ 是稳定的结点或焦点;若 $0<m<k-(\frac{d}{\beta})^{\frac{1}{n}}$,则 $E_0$ 是鞍点.(Ⅱ)当 $L-(\frac{d}{\beta})^{\frac{1}{n}}<m<k-(\frac{d}{\beta})^{\frac{1}{n}}$ 时,①$\lambda<0(>0)$ 时,$E_*$ 是稳定(不稳定)的结点或焦点;② $\lambda=0$ 时,$E_*$ 是中心型奇点.

**证明** (Ⅰ)系统(2)在 $E_0$ 处的 Jacobian 矩阵是

$$J(E_0)=\begin{bmatrix}-\alpha k(k-L) & -(k-m)^n\\ 0 & -d+\beta(k-m)^n\end{bmatrix},$$

又 $-\alpha k(k-L)<0$,则当 $m>k-(\frac{d}{\beta})^{\frac{1}{n}}$ 时,$-d+\beta(k-m)^n<0$,即 $E_0$ 是稳定的结点或焦点.

当 $0<m<k-(\frac{d}{\beta})^{\frac{1}{n}}$ 时,$-d+\beta(k-m)^n>0$,即 $E_0$ 是鞍点.

(Ⅱ)系统(2)在 $E_*$ 处的 Jacobian 矩阵为

$$J(E_*)=\begin{bmatrix}f(x_*,y_*) & -x_*^n\\ n\beta x_*^{n-1}y_* & -d+\beta x_*^n\end{bmatrix},$$

其中 $f(x_*,y_*)=\frac{\alpha}{x_*}\{(n-3)x_*^3+(2-n)(k-3m+L)x_*^2+(1-n)[(m-L)(k-m)+(k-2m+L)]x_*-mn(m-L)(k-m)\}$.

令 $\lambda=(n-3)x_*^3+(2-n)(k-3m+L)x_*^2+(1-n)[(m-L)(k-m)+(k-2m+L)]x_*-mn(m-L)(k-m)$,显然 $DetJ(E_*)=n\beta x_*^{2n-1}y_*>0$,$trJ(E_*)=\alpha\lambda/x_*$,则当 $\lambda<0(>0)$ 时,$E_*(x_*,y_*)$ 是稳定(不稳定)的焦点或结点;当 $\lambda=0$ 时,$E_*(x_*,y_*)$ 是中心型奇点.

**定理 2.2** 若 $m>k-(\frac{d}{\beta})^{\frac{1}{n}}$,则 $E_0$ 是全局渐近稳定的.

**证明**:若 $m>k-(\frac{d}{\beta})^{\frac{1}{n}}$,则 $E_0$ 是系统(2)的唯一非负奇点. 如果系统(2)在 $M$ 内有闭轨,则 $E_0$ 在闭轨内部,因此闭轨必与轨线 $y=0$ 相交,这与轨线的不相交性矛盾,所以当 $m>k-(\frac{d}{\beta})^{\frac{1}{n}}$ 时,系统(2)不存在极限环,则 $E_0$ 是全局渐近稳定的结点.

**定理 2.3** 如果下列条件成立:

(Ⅰ) $L-\left(\frac{d}{\beta}\right)^{\frac{1}{n}}<m<k-\left(\frac{d}{\beta}\right)^{\frac{1}{n}}$,

(Ⅱ) $\lambda<0$,

则系统(2)在 $M$ 内不存在极限环,且 $E_*$ 是全局渐近稳定的.

**证明**:取 Dulac 函数 $B(x,y)=x^{-n-1}y^r$,则

$r=\frac{\alpha}{d-\beta(n+1)x_*^n}\{3(n-3)x_*^2)+2(2-n)(k-3m+L)x_*+(1-n)[(m-L)(k-m)+m(k-2m+L)]\}-1$,

则 $\frac{\partial(BP)}{\partial x}+\frac{\partial(BQ)}{\partial y}=\alpha x^{-n-1}y^r\{-(n-3)x^3+(2-n)(k-3m+L)x^2+(1-n)[(m-L)(k-m)+m(k-2m+L)x]-mn(m-L)(k-m)+\frac{r+1}{\alpha}(\beta x^{n+1}-dx)\}=\alpha B(x,y)\varphi(x)$,

有 $\varphi(x_*)=\lambda<0$,而 $\varphi'(x)=3(n-3)x^2+2(2-n)(k-3m+L)x+(1-n)[(m-L)(k-m)+m(k-2m+L)]+\frac{r+1}{\alpha}[\beta(n+1)x^n-d]$,

则 $\varphi'(x_*)=0$,当 $0<x<x_*$ 时,$\varphi'(x_*)>0$;当 $x>x_*$ 时,$\varphi'(x_*)<0$,因此,$\varphi(x)<0$. 所以,当 $\lambda<0$ 时,$\forall x>0$,都有 $\frac{\partial(BP)}{\partial x}+\frac{\partial(BQ)}{\partial y}<0$.

则系统(2)在 $M$ 内不存在极限环,又因为系统(2)是有界的,$E_*$ 是局部渐近稳定的,所以 $E_*$ 在 $M$ 内是全局渐近稳定的.

(下转第 49 页 Continue on page 49)

若 $\exists \mu \in [0,1]$，使 $0 \in h_\mu(\partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L)$，即有 $v=(h_1,h_2) \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L$，使 $h_\mu(v)=0$. 从而

$$\begin{cases}\bar{a}-\bar{b}e^{h_1}-\mu\bar{c}g(e^{h_1-h_2})e^{h_2-h_1}=0,\\ -\bar{d}+\bar{e}g(e^{h_1-h_2})=0,\end{cases}$$

即 $h_1=\ln\dfrac{\bar{a}M_0-\mu\bar{c}g(M_0)}{\bar{b}M_0}$，$h_2=\ln\dfrac{\bar{a}M_0-\mu\bar{c}g(M_0)}{\bar{b}M_0}$.

从而 $\sqrt{h_1^2+h_2^2}\leqslant M_1<M$. 产生矛盾. 故 $\forall \mu \in [0,1]$，$0 \notin h_\mu(\partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L)$，

由于 $J=I$，由同伦不变性知

$$\deg\{QN,\Omega\cap \mathrm{Ker}L,0\}=\deg\{G,\Omega\cap \mathrm{Ker}L,0\}\neq 0,$$

由引理1知，存在 $v\in D(L)\cap\bar{\Omega}$，使 $Lv=Nv$，即方程(3)存在 $\omega$-周期解 $\{(x(n),y(n))\}$. 令 $\bar{x}(n)=e^{x(n)}$，$\bar{y}(n)=e^{y(n)}$，易知 $\{(\bar{x}(n),\bar{y}(n))\}$ 为方程(2)的 $\omega$-周期解，且 $\forall n\in Z$，有 $\bar{x}(n)>0$，$\bar{y}(n)>0$.


**参考文献：**

[1] Fan F H, Li W T. Permanence in delayed ratio-dependent predator-prey models with monotonic fanctional responses[J]. Nonlinear Anal B, 2007, 8:424-434.

[2] Fan F H, Li W T, Wang L L. Periodic solutions in delayed ratio-dependent predator-prey models with monotonic functional responses[J]. Nonlinear Anal B, 2004, 5:247-263.

[3] Fan M, Wang K. Periodicity in delayed ratio-dependent predator-prey system[J]. J Math Anal A, 2001, 262:170-190.

[4] Kwang Y, Beretta E. Global quasitative analysis of a ratio-dependent predator-prey system[J]. J Math Boil, 1998, 36:19-32.

[5] Yang W, Li X. Permanence for a delayed discrete ratio-dependent predator-prey model with monotonic functional responses[J]. Nonlinear Anal B, 2009, 10:1068-1072.

[6] Caines R E, Mawhin J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

[7] Fan M, Wang K. Periodic solutions of a discrete; time nonautonomous ratio-dependent predator-preg system [J]. Math Comput Modeling, 2002, 35:951-961.


（责任编辑：尹　闯）


（上接第45页 Continue from page 45）


## 3 极限环的存在性

**定理3.1** 若系统(2)满足下列条件

(Ⅰ) $L-(\dfrac{d}{\beta})^{\frac{1}{n}}<m<k-(\dfrac{d}{\beta})^{\frac{1}{n}}$，

(Ⅱ) $\lambda>0$，

则系统(2)在 $M$ 内至少存在一个极限环.

**证明** 构造环域 $OA\widehat{BC}D$ 包含 $E_*$ 点，定义：

$\overline{OA}:L_1=y=0$，$\overline{AB}:L_2=x-(k-m)=0$.

设

$$\begin{cases}x'=x^n(\alpha_0-y),\\ y'=y(-d+\beta x^n),\end{cases}(0<n\leqslant 1),\quad (3)$$

其中 $\alpha_0=\max\limits_{x_*\leqslant x\leqslant k-m}\dfrac{[\alpha(x+m)(k-m-x)(x+m+L)]}{x^n}$，系统(3)满足初始值 $B(k-m,\alpha_0)$ 的轨线交 $x=x_*$ 于 $C(x_*,y_1)$，$\overline{CD}:L_3=y-y_1=0$，$\overline{DO}:L_4=x=0$，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}L_2}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)}=-(k-m)^n y<0,y>0,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}L_3}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)}=y_1(-d+\beta x^n)<0,0<x<x_*,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}L_4}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)}=\alpha m(k-m)(m-L)>0,$$

系统(2)从 $\overline{AB}$，$\overline{CD}$，$\overline{DO}$ 的外部进入环的内部，在 $\widehat{BC}$ 上，比较系统(2)和系统(3)，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)}<\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{(3)}<0，且\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)}=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{(3)}>0,$$

那么系统(2)的轨线从 $\widehat{BC}$ 的外部进入环内部，另外，在条件(Ⅰ)和(Ⅱ)下，$E_*(x_*,y_*)$ 是不稳定的，由 Poincare-Bendixson 定理，系统(2)在环 $OA\widehat{BC}D$ 内至少存在一个极限环.


**参考文献：**

[1] 王静，薛亚奎. 一类具有 Allee 影响的捕食与被捕食模型[J]. 数学的实践与认识，2008，38(10)：136-140.

[2] 彭煜，窦霁虹，王新秀. 一类具功能反应的食饵与捕食系统的极限环[J]. 陕西科技大学学报，2009，27(6)：129-132.

[3] 王冲，白旭亚，赵冬霞. 对一类功能反应的食饵捕食系统的定性分析[J]. 长春师范学院学报，2010，29(2)：18-19.

[4] Chen Liujuan, Chen Fengde, Chen Lijuan. Qualitative analysis of a predator - prey with Holling type functional response incorporating a constant prey refuge[J]. Nonlinear Analysis, 2010, 11:246-252.

[5] 唐三一，肖艳妮. 单种群动力系统[M]. 北京：科学出版社，2008：40-43.


（责任编辑：陈小玲）