DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2012.01.016

广西科学 Guangxi Sciences 2012,19(1):46～49

具有单调泛函响应的离散比率时滞捕食-被捕食模型正周期解的存在性*

Existence of Positive Periodic Solution for a Delayed Discrete Ratio-dependent Predator-prey Model with Monotonic Functional Responses

刘一枝,杨喜陶,刘雅琴

LIU Yi-zhi,YANG Xi-tao,LIU Ya-qin

(湖南科技大学数学学院,湖南湘潭　411201)

(Science and Technology of Hunan University,Xiangtan,Hunan,411201,China)

摘要:利用叠合度定理,得到一类具有单调泛函响应的时滞比率依赖的离散捕食-被捕食模型正周期解存在的一个充分条件.

关键词:捕食-被捕食模型　正周期解　比率依赖　单调泛函响应

中图法分类号:O175.14　　文献标识码:A　　文章编号:1005-9164(2012)01-0046-04

Abstract:By using coincidence degree theorem,we obtain a sufficient condition for the existence of positive periodic solutions of a delayed discrete ratio-dependent predator-prey model with monotonic functional responses.

Key words:predator-prey model,positive periodic solutions,ratio-dependent,monotonic functional responses

对于具有单调泛函响应的时滞捕-食被捕食者模型

$$\begin{cases} x'(t)=x(t)[a(t)-b(t)x(t)]- \\ \quad e(t)g(\dfrac{x(t)}{y(t)})y(t), \\ y'(t)=y(t)[e(t)g(\dfrac{x(t-\tau(t))}{y(t-\tau(t))})-d(t)], \end{cases} \tag{1}$$

很多学者对其解的一致持久性,正周期解的存在性等动力学行为作过较为深入的研究[1~4].然而又有研究表明,对微分方程所表示的连续模型进行仿真需要它的离散形式——差分方程,而且与对应的微分方程相比,差分方程更能反映某些运动过程.基于此,文献[5]研究了模型(1)离散形式

$$\begin{cases} x(n+1)=x(n)\exp(a(n)-b(n)x(n)- \\ \quad c(n)g(\dfrac{x(n)}{y(n)})\dfrac{y(n)}{x(n)}), \\ y(n+1)=y(n)\exp(e(n)g(\dfrac{x(n-\tau(n))}{y(n-\tau(n))})- \\ \quad d(n)), \end{cases} \tag{2}$$

解的一致持久性,其中 $x(n)$ 与 $y(n)$ 分别表示在时刻 n 被捕食者与捕食者的数量,$\{a(n)\}$,$\{c(n)\}$,$\{d(n)\}$,$\{e(n)\}$ 及 $\{\tau(n)\}$ 为有界序列且 $\forall n\in Z$,$\tau(n)\in \mathrm{N}$.但是对于系统(2)的正周期解的存在性还未见相应结果.

若记 $\tau=\max\limits_{n\in Z}\tau(n)$,$J=\{-\tau,-\tau+1,\cdots,0\}$,$C=\{\varphi:I\to R\}$,$C_+^2=\{(\varphi_1,\varphi_2)\mid \varphi_i\in C,\varphi_i\geqslant 0$ 且 $\varphi_i(0)>0,i=1,2\}$.对于 $X:Z\to R,x_n\in C$,定义 $x_n(s)=x(n+s),s\in J$.对任一$(\varphi,\psi)\in C_+^2$,易知(2)式有唯一解 $(x(n,\varphi,\psi),y(n,\varphi,\psi))$,且满足 $(x_0,y_0)=(\varphi,\psi)$,$x(n,\varphi,\psi)>0,y(n,\varphi,\varphi)>0,n\in Z$.设 $\omega\in N_+$,$I_\omega=\{0,1,\cdots,\omega-1\}$,对任一 ω 周期实数序列 $\{f(n)\}$,记

收稿日期:2011-01-07

修回日期:2011-08-20

作者简介:刘一枝(1986-),女,硕士,主要从事常微分方程及其应用研究。

*湖南科技大学研究生创新基金项目(S110123)资助。

$$\bar{f}=\frac{1}{\omega}\sum_{n=0}^{\omega-1}f(n),\bar{F}=\frac{1}{\omega}\sum_{n=0}^{\omega-1}|f(n)|.$$

再设$\{a(n)\},\{b(n)\},\{c(n)\},\{d(n)\}$及$\{\tau(n)\}$为$\omega$周期.那么基于以上假设,本文将给出方程(2)存在各分量为正的ω周期解的条件:对于函数g,假设

(A1) (i)$g\in C^1([0,+\infty),R),g(0)=0$,

(ii)$g'(u)>0,u\in[0,+\infty)$,

(iii) $\lim\limits_{u\to+\infty}g(u)=k$.

那么满足条件(A1)的函数一定存在,如$g(u)=\frac{cu^{\alpha}}{1+u}$,满足条件(A1),其中$c,\alpha$为常数,且$\alpha>0$.若令$m=\sup\limits_{z>0}\frac{g(z)}{z}$,易知$0<m<+\infty$.

1 相关引理

设X,Z为赋范线性空间,$L:D(L)\subset X\to Z$为线性映射,$N:X\to Z$为连续映射.若$\mathrm{Im}\,L$为闭的,而且$\dim\mathrm{Ker}L=\mathrm{Codim}\,\mathrm{Im}\,L<\infty$,称$L$是指标为0的Fredholm映射.若$L$是指标为0的Fredholm映射,且存在连续投影$P:X\to X,Q:Z\to Z$,使$\mathrm{Im}\,P=\mathrm{Ker}L$,$\mathrm{Ker}Q=\mathrm{Im}L=\mathrm{Im}(I-Q)$,则$L|_{D(L)\cap\mathrm{Ker}P}:(I-P)X\to\mathrm{Im}L$可逆,记其逆为$k_P$.设$\Omega$为X的有界开子集,若$QN(\bar{\Omega})$为有界,且$k_P(I-Q)N:\bar{\Omega}\to X$为紧,则称$N$在$\Omega$上为$L$-紧的.由于$\mathrm{Im}\,L$同胚于$\mathrm{Ker}L$,记其同胚为$J:\mathrm{Im}\,L\to\mathrm{Ker}L$.

引理1[6] 设L是指标为0的Fredholm算子,N在Ω上为L-紧,若

(a)$\forall\lambda\in(0,1)$,方程$Lx=\lambda Nx$的任一解$x\notin\partial\Omega$,

(b)$\forall x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L,QNx\neq0$且$\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\neq0$,

则方程$Lx=Nx$在$D(L)\cap\bar{\Omega}$中至少有一解.

引理2[7] 设$g:Z\to R$为ω周期的,$n_1,n_2\in I_\omega$,则对$\forall n\in Z$有

$$g(n)\leqslant g(n_1)+\sum_{s=0}^{\omega-1}(g(s+1)-g(s)),$$

$$g(n)\geqslant g(n_2)-\sum_{s=0}^{\omega-1}|g(s+1)-g(s)|.$$

2 主要结果

定理1 假设(A1)及下列条件满足:

(A2) $\bar{b}>0,\bar{a}-\bar{c}m>0$,

(A3) $\bar{d}>0,k\bar{e}-\bar{d}>0$,

则方程(2)存在各分量为正的ω-周期解.

证明 记$S=\{\{(x(n),y(n))\}\},S^\omega=\{\{(x(n),y(n))\}\in S\mid(x(n+\omega),y(n+\omega))=(x(n),y(n)),\forall n\in Z\}$,

在S^ω中定义范数为$\|\{(x(n),y(n))\}\|=\max\limits_{n\in I_\omega}\sqrt{x^2(n)+y^2(n)}$,则$S^\omega$为有限维Banach空间,记

$S_0^\omega=\{\{v(n)\}=\{(x(n),y(n))\}\in S^\omega,\frac{1}{\omega}\sum_{n=0}^{\omega-1}v(n)=0\}$,

$S_c^\omega=\{\{v(n)\}=\{(x(n),y(n))\}\in S^\omega,v(n)=h,n\in Z\}$,

则S_0^ω及S_c^ω为S^ω的闭线性子空间,且

$$S^\omega=S_0^\omega\oplus S_c^\omega,\dim S_c^\omega=2.$$

那么证明方程(2)存在各分量为正的ω-周期解,只需证明方程

$$\begin{cases}x(n+1)-x(n)=a(n)-b(n)\exp\{x(n)\}-c(n)g(\exp\{x(n)-y(n)\})\exp\{y(n)-x(n)\},\\ y(n+1)-y(n)=-d(n)+e(n)g(\exp\{x(n-\tau(n))-y(n-\tau(n)\})\end{cases}\tag{3}$$

存在ω周期解.为此令$X=Z=S^\omega$,对于$v\in S^\omega,n\in Z$,

$L(v(k))=v(n+1)-v(n)$,

$N(v(n))=a(n)-b(n)\exp\{x(n)\}-c(n)g(\exp\{x(n)-y(n)\})\exp\{y(n)-x(n)\}-d(n)+e(n)g(\exp\{x(n-\tau(n))-y(n-\tau(n))\}))$.

易知L为有界线性算子,且

$\mathrm{Ker}L=S_c^\omega,\mathrm{Im}\,L=S_0^\omega,\dim\mathrm{Ker}L=\mathrm{Codim}\,\mathrm{Im}L=2$.

故L是指标为0的Fredholm算子.

定义$P(v)=\frac{1}{\omega}\sum_{n=0}^{\omega-1}v(n),v\in Z,Q(z)=\frac{1}{\omega}\sum_{n=0}^{\omega-1}z(n),z\in Z$.易知$P,Q$满足$\mathrm{Im}\,P=\mathrm{Ker}L$,$\mathrm{Ker}Q=\mathrm{Im}\,L=\mathrm{Im}\,(I-Q)$,且$L$的广义逆$k_p:\mathrm{Im}\,L\to\mathrm{Ker}P\cap D(L)$为$k_p(z)(n)=\sum_{s=0}^{n}z(s)-\frac{1}{\omega}\sum_{s=0}^{\omega-1}(\omega-s)z(s)$.易知$QN$及$k_p(I-Q)N$连续.又由于$X$为有限维,对$X$的任意有界开集$\Omega,\overline{k_p(I-Q)N(\Omega)}$为紧的,且$QN(\bar{\Omega})$有界,故$L$在$\bar{\Omega}$上$L$紧.由于$\mathrm{Im}\,Q=\mathrm{Ker}L$,从$\mathrm{Im}\,Q$到$\mathrm{Ker}L$的同胚映射为$I$.考虑算子方程$Lv=\lambda Nv,\lambda\in(0,1)$,即

$$\begin{cases}x(n+1)-x(n)=\lambda(a(n)-b(n)\exp\{x(n)\}-c(n)g(\exp\{x(n)-y(n)\})\exp\{y(n)-x(n)\}),\\ y(n+1)-y(n)=\lambda(-d(n)+e(n)g(\exp\{x(n-\tau(n))-y(n-\tau(n)\})).\end{cases}\tag{4}$$

若$\{(x(n),y(n))\}\in X$为方程(4)的解,则

$$\begin{cases}\omega\bar{a}=\sum_{n=0}^{\omega-1}b(n)\exp\{x(n)\}+\sum_{n=0}^{\omega-1}c(n)g\cdot\\ \quad(\exp\{x(n)-y(n)\})\exp\{y(n)-x(n)\},\\ \omega\bar{d}=\sum_{n=0}^{\omega-1}e(n)g(\exp\{x(n-\tau(n))-\\ \quad y(n-\tau(n))\}).\end{cases}\tag{5}$$

由方程(4)与方程(5)得

$$\begin{cases}\sum_{n=0}^{\omega-1}|x(n+1)-x(n)|\leqslant(\bar{A}+\bar{a})\omega,\\ \sum_{n=0}^{\omega-1}|y(n+1)-y(n)|\leqslant(\bar{D}+\bar{d})\omega,\end{cases}\tag{6}$$

存在$\xi_1,\eta_1\in I_\omega$,使$x(\xi_1)=\min_{n\in I_\omega}v(n)$,$x(\eta_1)=\max_{n\in I_\omega}v(n)$. 由方程(5)得

$$\bar{a}\omega\geqslant\sum_{n=0}^{\omega-1}b(n)\exp\{v(n)\}\geqslant\sum_{n=0}^{\omega-1}b(n)\exp\{x(\xi_1)\},$$

故$x(\xi_1)\leqslant\ln\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$. 由引理3及方程(6)知,对$\forall n\in Z$有

$$x(n)\leqslant x(\xi_1)+\sum_{s=0}^{\omega-1}|x(s+1)-x(s)|\leqslant$$
$$\ln\frac{\bar{a}}{\bar{b}}+(\bar{A}+\bar{a})\omega=L_1.$$

又由于

$$\bar{a}\omega\leqslant\sum_{n=0}^{\omega-1}b(n)\exp\{x(n)\}+\sum_{n=0}^{\omega-1}c(n)\cdot m\leqslant$$
$$\sum_{n=0}^{\omega-1}b(n)\exp\{v(\eta_1)\}+\bar{e}m\omega=$$
$$\bar{b}\omega\exp\{v(\eta_1)\}+\bar{c}\omega\omega,$$

由假设(A2)知

$$x(\eta_1)\geqslant\ln\frac{\bar{a}-\bar{c}m}{\bar{b}}.$$

由引理3及方程(5)知,对$\forall n\in Z$有$x(n)\geqslant\ln\frac{\bar{a}-\bar{c}m}{\bar{b}}-(\bar{A}+\bar{a})\omega=l_1$,存在$\xi_2,\eta_2\in I_\omega$使$y(\xi_2-\tau(\xi_2))=\min_{n\in I_\omega}v(n-\tau(n))$,$y(\eta_2-\tau(\eta_2))=\max_{n\in I_\omega}y(n-\tau(n))$.

由方程(5)的第二个方程得

$$\omega\bar{d}=\sum_{n=0}^{\omega-1}e(n)g(\exp\{x(n-\tau(n))-y(n-$$
$$\tau(n)\}\leqslant\sum_{n=0}^{\omega-1}e(n)g(\frac{e^{L_1}}{\exp\{y(\xi_2-\tau(\xi_2))\}})=$$
$$\bar{e}\omega g(\frac{e^{L_1}}{\exp\{y(\xi_2-\tau(\xi_2))\}}).\tag{7}$$

又由条件(A1)知,存在唯一的$M_0\in(0,+\infty)$,使$g(M_0)=\frac{\bar{d}}{\bar{e}}$. 从而由(7)式及$g(u)$在$[0,+\infty)$为严格单调递增知$y(\xi_2-\tau(\xi_2))\leqslant L_1-\ln M_0$. 由$\{y(n)\}$的$\omega$周期性及引理3知,对$\forall n\in Z$有

$$y(n)\leqslant y(\xi_2-\tau(\xi_2))+\sum_{s=0}^{\omega-1}|y(s+1)-y(s)|\leqslant$$
$$L_1-\ln M_0+(\bar{D}+\bar{d})\omega=L_2.$$

再由

$$\omega\bar{d}\geqslant\sum_{n=0}^{\omega-1}e(n)g(\frac{e^{l_1}}{\exp\{y(\eta_2-\tau(\eta_2))\}})=$$
$$\omega\bar{e}g(\exp\{l_1-y(\eta_2-\tau(\eta_2))\}),$$

和$g(u)$的单调性知

$$y(\eta_2-\tau(\eta_2))\geqslant l_1-\ln M_0.$$

由$\{y(n)\}$的ω周期性及引理3知,对$\forall n\in Z$有

$$y(n)\geqslant l_1-\mathrm{In}M_0-(\bar{D}+\bar{d})\omega=l_2.$$

记$H_i=\max\{|l_i|,|L_i|\}$,$i=1,2$,$H=\sqrt{H_1^2+H_2^2}$,则有

$$\|v\|\leqslant H,a_1(\mu)=\ln\frac{\bar{a}M_0-\bar{c}g(M_0)\mu}{\bar{b}M_0}=$$
$$\ln\frac{\bar{a}\,\bar{e}M_0-\bar{c}\,\bar{d}\mu}{\bar{b}\,\bar{e}M_0},a_2(\mu)=\frac{\bar{a}\,\bar{e}M_0-\bar{c}\,\bar{d}\mu}{\bar{b}\,\bar{e}M_0^2},$$
$$M_1=\max_{0\leqslant\mu\leqslant1}\sqrt{(a_1(\mu))^2+(a_2(\mu))^2}.$$

取$M>\max(H,M_1)$,令$\Omega=\{v=\{(x(n),y(n))\}\in X:\|v\|<M\}$. 若存在$v\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L$,使$QNv=0$,即

$$\begin{cases}\sum_{n=0}^{\omega-1}a(n)-\sum_{n=0}^{\omega-1}b(n)e^{h_1}-\\ \quad\sum_{n=0}^{\omega-1}c(n)g(e^{h_1-h_2})e^{h_2-h_1}=0,\\ \sum_{n=0}^{\omega-1}-d(n)+\sum_{n=0}^{\omega-1}e(n)g(e^{h_1-h_2})=0.\end{cases}$$

那么

$$\begin{cases}\{\bar{a}-\bar{b}e^{n_1}-\bar{c}g(e^{h_1-h_2})e^{h_2-h_1}=0,\\ e^{h_1-h_2}=M_0,\end{cases}$$

故

$$h_1=\ln\frac{\bar{a}M_0-\bar{c}g(M_0)}{\bar{b}M_0}=\ln\frac{\bar{a}\,\bar{e}M_0-\bar{c}\,\bar{d}}{\bar{b}\,\bar{M}_0\bar{e}}=$$

$a_1(1)$,$h_2=\ln\frac{\bar{a}\,\bar{e}M_0-\bar{c}\,\bar{d}}{\bar{b}\,\bar{e}M_0^2}=a_2(1)$,产生矛盾. 从而$\forall v\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}LQNv\neq0$. 考虑同伦映射$h_\mu(v)=\mu QNv+(1-\mu)Gv$,$\mu\in[0,1]$,其中$Gv=(\bar{a}-\bar{b}e^x,-\bar{d}+\bar{e}g(e^{x-y})$. 易知$Gv=0$在$\Omega$内有唯一解

$$(\ln\frac{\bar{a}}{\bar{b}},\ln\frac{\bar{a}}{\bar{b}M_0})=(a_1(0),a_2(0)),$$

且$\deg(G,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0)=\mathrm{sgn}\,\bar{a}\bar{e}g'(M_0)\frac{1}{M_0}=1$.

若 $\exists \mu \in [0,1]$，使 $0 \in h_{\mu}(\partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L)$，即有 $v=(h_1,h_2) \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L$，使 $h_{\mu}(v)=0$. 从而

$$\begin{cases}\bar{a}-\bar{b}e^{h_1}-\mu\bar{c}g(e^{h_1-h_2})e^{h_2-h_1}=0,\\ -\bar{d}+\bar{e}g(e^{h_1-h_2})=0,\end{cases}$$

即 $h_1=\ln\dfrac{\bar{a}M_0-\mu\bar{c}g(M_0)}{\bar{b}M_0}$，$h_2=\ln\dfrac{\bar{a}M_0-\mu\bar{c}g(M_0)}{\bar{b}M_0}$.

从而 $\sqrt{h_1^2+h_2^2}\leqslant M_1<M$. 产生矛盾. 故 $\forall \mu \in [0,1]$，$0 \notin h_{\mu}(\partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L)$，

由于 $J=I$，由同伦不变性知

$\deg\{QN,\Omega\cap \mathrm{Ker}L,0\}=\deg\{G,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\neq 0$，

由引理1知，存在 $v\in D(L)\cap\bar{\Omega}$，使 $Lv=Nv$，即方程(3)存在 ω-周期解 $\{(x(n),y(n))\}$. 令 $\bar{x}(n)=e^{x(n)}$，$\bar{y}(n)=e^{y(n)}$，易知 $\{(\bar{x}(n),\bar{y}(n))\}$ 为方程(2)的 ω-周期解，且 $\forall n\in Z$，有 $\bar{x}(n)>0$，$\bar{y}(n)>0$.

参考文献：

[1] Fan F H, Li W T. Permanence in delayed ratio-dependent predator-prey models with monotonic fanctional responses[J]. Nonlinear Anal B, 2007, 8:424-434.

[2] Fan F H, Li W T, Wang L L. Periodic solutions in delayed ratio-dependent predator-prey models with monotonic functional responses[J]. Nonlinear Anal B, 2004, 5:247-263.

[3] Fan M, Wang K. Periodicity in delayed ratio-dependent predator-prey system[J]. J Math Anal A, 2001, 262:170-190.

[4] Kwang Y, Beretta E. Global quasitative analysis of a ratio-dependent predator-prey system[J]. J Math Boil, 1998, 36:19-32.

[5] Yang W, Li X. Permanence for a delayed discrete ratio-dependent predator-prey model with monotonic functional responses[J]. Nonlinear Anal B, 2009, 10:1068-1072.

[6] Caines R E, Mawhin J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

[7] Fan M, Wang K. Periodic solutions of a discrete; time nonautonomous ratio-dependent predator-preg system [J]. Math Comput Modeling, 2002, 35:951-961.

（责任编辑：尹　闯）

（上接第 45 页 Continue from page 45）

3 极限环的存在性

定理 3.1 若系统(2)满足下列条件

(Ⅰ) $L-(\dfrac{d}{\beta})^{\frac{1}{n}}<m<k-(\dfrac{d}{\beta})^{\frac{1}{n}}$，

(Ⅱ) $\lambda>0$，

则系统(2)在 M 内至少存在一个极限环.

证明 构造环域 $OA\widehat{BC}D$ 包含 E_* 点，定义：

$\overline{OA}:L_1=y=0$，$\overline{AB}:L_2=x-(k-m)=0$.

设

$$\begin{cases}x'=x^n(\alpha_0-y),\\ y'=y(-d+\beta x^n),\end{cases}(0<n\leqslant 1), \tag{3}$$

其中 $\alpha_0=\max\limits_{x_*\leqslant x\leqslant k-m}\dfrac{[\alpha(x+m)(k-m-x)(x+m+L)]}{x^n}$，系统(3)满足初始值 $B(k-m,\alpha_0)$ 的轨线交 $x=x_*$ 于 $C(x_*,y_1)$，$\overline{CD}:L_3=y-y_1=0$，$\overline{DO}:L_4=x=0$，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}L_2}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)}=-(k-m)^n y<0, y>0,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}L_3}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)}=y_1(-d+\beta x^n)<0, 0<x<x_*,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}L_4}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)}=\alpha m(k-m)(m-L)>0,$$

系统(2)从 $\overline{AB}$，$\overline{CD}$，$\overline{DO}$ 的外部进入环的内部，在 $\widehat{BC}$ 上，比较系统(2)和系统(3)，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)}<\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{(3)}<0,\text{且}\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)}=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{(3)}>0,$$

那么系统(2)的轨线从 $\widehat{BC}$ 的外部进入环内部，另外，在条件(Ⅰ)和(Ⅱ)下，$E_*(x_*,y_*)$ 是不稳定的，由 Poincare-Bendixson 定理，系统(2)在环 $OA\widehat{BC}D$ 内至少存在一个极限环.

参考文献：

[1] 王静，薛亚奎. 一类具有 Allee 影响的捕食与被捕食模型[J]. 数学的实践与认识，2008，38(10)：136-140.

[2] 彭煜，窦霁虹，王新秀. 一类具功能反应的食饵与捕食系统的极限环[J]. 陕西科技大学学报，2009，27(6)：129-132.

[3] 王冲，白旭亚，赵冬霞. 对一类功能反应的食饵捕食系统的定性分析[J]. 长春师范学院学报，2010，29(2)：18-19.

[4] Chen Liujuan, Chen Fengde, Chen Lijuan. Qualitative analysis of a predator - prey with Holling type functional response incorporating a constant prey refuge[J]. Nonlinear Analysis, 2010, 11:246-252.

[5] 唐三一，肖艳妮. 单种群动力系统[M]. 北京：科学出版社，2008：40-43.

（责任编辑：陈小玲）