DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2012.02.001

广西科学 Guangxi Sciences 2012,19(2):99～103

需求受时间和价格影响的预订销售库存模型*

An Advance Sale Inventory Model with Time and Price Dependent Demand

孟立华[1],莫降涛[2],温宗良[3],徐春明[4]

MENG Li-hua[1],MO Jiang-tao[2],WEN Zong-liang[3],XU Chun-ming[4]

(1.广东医学院,广东东莞 523808;2.广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004;3.广西中医药大学,广西南宁 530001;4.天津财经大学珠江学院,天津 301811)

(1. Guangdong Medical College,Dongguan,Guangdong,523808,China;2. College of Mathematics and Information Science,Guangxi University,Nanning,Guangxi,530004,China;3. Guangxi Traditional Chinese Medicine University,Nanning,Guangxi,530001,China;4. Pearl River College,Tianjin University of Finance and Economics,Tianjin,301811,China)

摘要:针对一个带有预订销售的库存问题(其中需求是时间的二次函数,是价格的线性减函数,而且取消预订费是时间的增函数),建立相应的预订销售利润模型,分析模型的性质,给出寻找最优策略的算法,并用数值例子验证模型和算法是有效的.

关键词:需求率 价格 预订销售

中图法分类号:O227 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2012)02-0099-05

Abstract:An inventory problem with advanced sales is discussed,where demand rate is a quadratic function of time and linear decreasing function of price, and cancellation cost is an increasing function of time. An advance sales model is established,its characteristics are analyzed and an algorithm is provided to find out the optimal replenishment policy. Finally,a numerical example is used to illustrate the validity of the model and its algorithm.

Key words:demand rate,price,advanced sales

时变需求是描述产品需求趋势最常用的函数,考虑时变需求的库存模型的研究有很多,例如,文献[1]在需求随时间线性增长、补货费是订货量的线性增函数、允许短缺且全部拖后的条件下,建立有限时间水平上具有相等补货周期的易变质产品的库存模型.文献[2]建立有限时间水平上需求为时间的线性增函数的易变质产品的库存模型,考虑了货币时间价值对模型的影响,并采用线性搜索方法,确定最优的补货周期.文献[3]在生产率和变质率分别是需求率和时间的线性函数的假设下,建立无限时间水平上需求率是时间的斜坡型函数的易变质产品的库存模型,分别确定了不允许缺货和允许缺货情形下的最优补货策略.文献[4]在不允许缺货、变质率是时间的线性函数条件下,研究需求率为时间的斜坡型函数的易变质产品库存问题,确定了最优的补货策略,并讨论需求函数的合理性.文献[5]在需求为时间的二次连续增函数、不允许缺货条件下,分别建立无限时间水平和有限时间水平上易变质产品的库存模型,分析了模型的性质,并给出求解算法和数值例子来说明采用需求二次函数的合理性.

在服务业和零售业,预订销售策略被广泛采用,通过预订销售企业可以更好的掌握需求的变化情况,争取更多的销售时间.目前,关于产品的价格和预订销售问题的研究也有很多.例如,文献[6]建立货币受时间价值影响的易变质产品的补货和定价库存模型,并采用一种启发式算法对模型进行求解.文献[7]研究预订销售和现场销售的库存决策问题,允许

收稿日期:2011-09-16

修回日期:2012-02-10

作者简介:孟立华(1982-),女,硕士,主要从事最优化方法及其应用、供应链模型及其应用研究。

*国家自然科学基金项目(10761001),广西自然科学基金项目(0542043),广西大学科研基金项目(X071131),广东医学院青年基金项目(XQ1145)资助。

顾客取消预订且取消预订率为常数，建立了有限时间水平上产品的销售库存模型，并确定了最优的销售策略. 文献 [8] 建立需求率为价格的减函数、取消预订费为常数的预订销售库存模型，分析了最优策略的存在性和唯一性，给出数值例子和灵敏度分析.

本文研究与文献 [8] 类似的预订销售问题，进一步考虑需求受时间和价格共同影响、取消预订费为时间的增函数的情形，建立相应的利润模型. 旨在确定最优的销售价格和最优的产品预订总量，使企业的利润最大化.

1 符号及假设

用 p_i 表示第 i 个预订期的销售价格(决策变量)，T 表示预订销售周期长度，T_1 表示价格改变时刻，N 表示预订产品总量，C 表示单位产品成本，$I(t)$ 表示 t 时刻的库存水平，Π 表示系统的总利润.

模型假设:

(1) 系统运行在无限时间水平上，固定的预订销售周期长度 T;

(2) 预订销售采用动态价格决策，分为两个阶段，T_1 时刻价格发生改变，价格分别为 p_1 和 p_2;

(3) 不允许缺货，需求率为时间和销售价格的函数，即 $D(t,p_i) = a + bt(c - t) - \beta p_i$，其中 a,b,c,β 为正常数，且 $a - \beta p_i > 0, i = 1,2$;

(4) 允许顾客取消预订，取消预订率为 η/t，其中 $0 \leqslant \eta < 1$;

(5) 取消预订需支付取消费用，设其为时间的增函数，即 $r(t) = r + wt^h, 0 \leqslant h \leqslant 1$.

2 模型建立及分析

令 $I_1(t)$ 和 $I_2(t)$ 分别表示 $[0,T_1]$ 和 $[T_1,T]$ 内的预订销售水平，产品的预订销售从 $t = 0$ 时刻开始. 由于受预订和取消预订的影响，企业开始以价格 p_1 进行第一阶段的预订销售，预订水平以 $D(t,p_1) - \eta/tI_1(t)$ 增加; $t = T_1$ 时刻价格发生改变，企业以价格 p_2 进行第二阶段的预订销售，预订水平继续以 $D(t,p_2) - \eta/tI_2(t)$ 增加，直到 T 时刻，一个预订销售周期结束. 预订水平状态如图 1 所示.

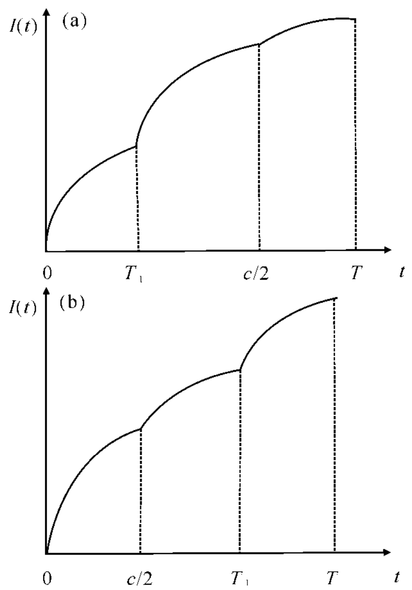

图 1 预订水平状态

Fig. 1 Lever state of advance sales

(a) $T_1 < c/2$, (b) $T_1 > c/2$

由上述分析可知，在 $[0,T]$ 内预订水平变化关系为

$$\frac{\mathrm{d}I_1(t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}(t,p_1) - \frac{\eta}{t}I_1(t), 0 \leqslant t \leqslant T_1, \quad (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}I_2(t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}(t,p_2) - \frac{\eta}{t}I_2(t), T_1 \leqslant t \leqslant T. \quad (2)$$

注意到 $I_1(0) = 0, I_2(T) = N$，得

$$I_1(t) = \frac{a - \beta p_1}{\eta + 1}t + \frac{bc}{\eta + 2}t^2 - \frac{b}{\eta + 3}t^3,$$

$$I_2(t) = \frac{a - \beta p_2}{\eta + 1}t + \frac{bc}{\eta + 2}t^2 - \frac{b}{\eta + 3}t^3 - \frac{a - \beta p_2}{\eta + 1}T^{\eta+1}t^{-\eta} - \frac{bc}{\eta + 2}T^{\eta+2}t^{-\eta} + \frac{b}{\eta + 3}T^{\eta+3}t^{-\eta} + NT^{\eta}t^{-\eta}.$$

又因为 $I_1(T_1) = I_2(T_1)$，整理得产品预订总量

$$N = F(p_1,p_2) = \frac{a - \beta p_1}{\eta + 1}\frac{T_1^{\eta+1}}{T^{\eta}} + \frac{a - \beta p_2}{\eta + 1} \cdot \frac{(T^{\eta+1} - T_1^{\eta+1})}{T^{\eta}} + \frac{bc}{\eta + 2}T^2 - \frac{b}{\eta + 3}T^3. \quad (3)$$

系统第一阶段预订销售收入

$$R_s^1(p_1) = p_1\int_0^{T_1} d(t,p_1) - BI_1(t)\,\mathrm{d}t = p_1\left[\frac{1}{\eta + 1}(a - \beta p_1)T_1 + \frac{1}{\eta + 2}bcT_1^2 - \frac{1}{\eta + 3}bT_1^3\right],$$

第二阶段预订销售收入

$$R_s^2(p_2,N) = p_2\int_{T_1}^{T} d(t,p_2) - \frac{\eta}{t}I_2(t)\,\mathrm{d}t = p_2\left[\frac{(a - \beta p_2)}{\eta + 1}(-T_1 + T^{\eta+1}T_1^{-\eta}) + \frac{bc}{\eta + 2}(-T_1^2 + T^{\eta+2}T_1^{-\eta}) - \frac{b}{\eta + 3}(-T_1^3 + T^{\eta+3}T_1^{-\eta}) + N(1 - T^{\eta}T_1^{-\eta})\right].$$

第一阶段取消预订收入

$$R_c^1(p_1) = \int_0^{T_1}(r + wt^h)\frac{\eta}{t}I_1(t)\,\mathrm{d}t = r\eta\left(\frac{a - \beta p_1}{\eta + 1}T_1 + \frac{bc}{\eta + 2}\frac{T_1^2}{2} - \frac{b}{\eta + 3}\frac{T_1^3}{3}\right) + \eta w\left(\frac{a - \beta p_1}{\eta + 1}\frac{T_1^{h+1}}{h + 1} + \frac{bc}{\eta + 2}\frac{T_1^{h+2}}{h + 2} - \right.$$

$$\frac{b}{\eta+3}\frac{T_1^{h+3}}{h+3}).$$

第二阶段取消预订收入

$$R_c^2(p_2,N)=\int_{T_1}^{T}(r+wt^h)\frac{\eta}{t}I_2(t)\,\mathrm{d}t=$$

$$\eta r\Big[\frac{a-\beta p_2}{\eta+1}(T+\frac{T}{\eta}-T_1-\frac{T^{\eta+1}T_1^{-\eta}}{\eta})+\frac{bc}{\eta+2}(\frac{T^2}{2}+\frac{T^2}{\eta}-\frac{T_1^2}{2}-\frac{T^{\eta+2}T_1^{-\eta}}{\eta})-\frac{b}{\eta+3}(\frac{T^3}{3}+\frac{T^3}{\eta}-\frac{T_1^3}{3}-\frac{T^{\eta+3}T_1^{-\eta}}{\eta})-N(\frac{1}{\eta}-\frac{T^{\eta}T_1^{-\eta}}{\eta})\Big]+\eta w\Big[\frac{a-\beta p_2}{\eta+1}(\frac{T^{h+1}}{h+1}-\frac{T^{h+1}}{h-\eta}-\frac{T_1^{h+1}}{h+1}+\frac{T^{\eta+1}T_1^{h-\eta}}{h-\eta})+N(\frac{T^h}{h-\eta}-\frac{T^{\eta}T_1^{h-\eta}}{h-\eta})+\frac{bc}{\eta+2}(\frac{T^{h+2}}{h+2}-\frac{T^{h+2}}{h-\eta}-\frac{T_1^{h+2}}{h+2}+\frac{T^{\eta+2}T_1^{h-\eta}}{h-\eta})-\frac{b}{\eta+3}(\frac{T^{h+3}}{h+3}-\frac{T^{h+3}}{h-\eta}-\frac{T_1^{h+3}}{h+3}+\frac{T^{\eta+3}T_1^{h-\eta}}{h-\eta})\Big].$$

系统的总利润 = 预订销售收入 + 取消预订收入 − 产品成本,即

$$\Pi(p_1,p_2,N)=R_s^1(p_1)+R_s^2(p_2,N)+R_c^1(p_1)+R_c^2(p_2,N)-CN. \qquad (4)$$

将(3)式代入(4)式,则系统的总利润函数为

$$\bar{\Pi}(p_1,p_2)=R_s^1(p_1)+R_s^2(p_2,F(p_1,p_2))+R_c^1(p_1)+R_c^2(p_2,F(p_1,p_2))-CF(p_1,p_2). \qquad (5)$$

其中,$\bar{\Pi}(p_1,p_2)=\Pi(p_1,p_2,F(p_1,p_2))$**,因此,预订销售问题的数学模型为**

$$\max\bar{\Pi}(p_1,p_2)$$
$$\text{s.t. } C\leqslant p_i\leqslant a/\beta,\ i=1,2. \qquad (6)$$

考虑模型的(6)的求解问题. 首先,忽略模型(6)中的约束,即求问题 $\max\bar{\Pi}(p_1,p_2)$ **的解. 根据极值的必要条件知,**$\bar{\Pi}(p_1,p_2)$ **的极值点** p_1,p_2 **满足**

$$\frac{\partial\bar{\Pi}(p_1,p_2)}{\partial p_1}=0, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial\bar{\Pi}(p_1,p_2)}{\partial p_2}=0. \qquad (8)$$

令 $T_1=kT,0<k<1$**,解上述方程得**

$$\overline{p_1}=\frac{a}{\beta}-\frac{(a-\beta C)}{\beta}\frac{(1+k^{\eta}-k^{\eta+1}-k^{2\eta+1})}{4-k-2k^{\eta+1}-k^{2\eta+1}}-\frac{b(\eta+1)T^2}{\beta(\eta+3)}\frac{(1+2k^2-k^3-k^{\eta}-k^{\eta+3})}{4-k-2k^{\eta+1}-k^{2\eta+1}}-\eta wT^h\Big[\frac{(2k^{\eta}-2k^h-k^{\eta+1}+k^{h+1}-k^{2\eta+1}+k^{h+\eta+1})}{(h-\eta)(4-k-2k^{\eta+1}-k^{2\eta+1})}+\frac{(1-k^{\eta}+2k^h-k^{h+1}-k^{h+\eta+1})}{(h+1)(4-k-2k^{\eta+1}-k^{2\eta+1})}\Big]-\frac{bc(\eta+1)T}{\beta(\eta+2)}\frac{(-1-2k+k^2+k^{\eta}+k^{\eta+2})}{4-k-2k^{\eta+1}-k^{2\eta+1}}-\frac{r\eta(3-k-k^{\eta}-k^{\eta+1}-\frac{-2+k+2k^{\eta}-k^{2\eta+1}}{\eta})}{4-k-2k^{\eta+1}-k^{2\eta+1}}, \qquad (9)$$

$$\overline{p_2}=\frac{a}{\beta}\frac{1}{(k^{\eta}-1)}\frac{\eta-1}{\eta+1}\frac{(3-k-k^{\eta}-k^{\eta+1})}{(4-k-2k^{\eta+1}-k^{2\eta+1})}+\frac{C}{(k^{\eta}-1)}(k^{\eta}-\frac{2}{\eta+1}\frac{(1+k^{\eta}-k^{\eta+1}-k^{2\eta+1})}{(4-k-2k^{\eta+1}-k^{2\eta+1})})+\frac{bc(\eta+1)}{\beta(\eta+2)}\frac{T}{(k^{\eta}-1)}\Big[k+\frac{2}{\eta+1}\cdot\frac{(-1-2k+k^2+k^{\eta}+k^{\eta+2})}{(4-k-2k^{\eta+1}-k^{2\eta+1})}\Big]-\frac{b(\eta+1)}{\beta(\eta+3)}\frac{T^2}{(k^{\eta}-1)}\cdot(k^2-\frac{2}{\eta+1}\frac{(1+2k^2-k^3-k^{\eta}-k^{\eta+3})}{(4-k-2k^{\eta+1}-k^{2\eta+1})})-\frac{r\eta}{(k^{\eta}-1)}\Big[(1-\frac{k^{\eta}-1}{\eta})-\frac{2}{\eta+1}\cdot\frac{(3-k-k^{\eta}-k^{\eta+1}-\frac{-2+k+2k^{\eta}-k^{2\eta+1}}{\eta})}{(4-k-2k^{\eta+1}-k^{2\eta+1})}\Big]-\frac{\eta wT^h}{(k^{\eta}-1)}\Big[k^h(\frac{1}{h+1}+\frac{k^{\eta-h}-1}{h-\eta})-\frac{2}{\eta+1}\cdot\frac{(2k^{\eta}-2k^h-k^{\eta+1}+k^{h+1}-k^{2\eta+1}+k^{h+\eta+1})}{(h-\eta)(4-k-2k^{\eta+1}-k^{2\eta+1})}-\frac{2}{\eta+1}\frac{(1-k^{\eta}+2k^h-k^{h+1}-k^{h+\eta+1})}{(h+1)(4-k-2k^{\eta+1}-k^{2\eta+1})}\Big]. \qquad (10)$$

定理1 **函数** $\bar{\Pi}(p_1,p_2)$ **是关于**(p_1,p_2) **的严格凹函数.**

证明 **分别求** $\bar{\Pi}(p_1,p_2)$ **关于** p_1 **和** p_2 **的二阶偏导数,得**

$$\frac{\partial^2\bar{\Pi}(p_1,p_2)}{\partial p_1^2}=\frac{-\beta kT}{\eta+1}<0, \qquad (11)$$

$$\frac{\partial^2\bar{\Pi}(p_1,p_2)}{\partial p_2^2}=\frac{-2\beta T(1-k^{\eta+1})}{(\eta+1)}<0, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial^2\bar{\Pi}(p_1,p_2)}{\partial p_1\partial p_2}=\frac{-\beta kT(k^{\eta}-1)}{(\eta+1)},$$

$$H=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2\Pi(p_1,p_2,T_1)}{\partial p_1^2} & \frac{\partial^2\Pi(p_1,p_2,T_1)}{\partial p_1\partial p_2}\\ \frac{\partial^2\Pi(p_1,p_2,T_1)}{\partial p_1\partial p_2} & \frac{\partial^2\Pi(p_1,p_2,T_1)}{\partial p_2^2}\end{vmatrix}=$$

$$\frac{\beta^2kT^2}{(\eta+1)^2}[4-k(k^{\eta}+1)^2]>0.$$

故 $\bar{\Pi}(p_1,p_2)$ **关于**(p_1,p_2) **的海塞(Hesse)阵是负定的,所以** $\bar{\Pi}(p_1,p_2)$ **是关于**(p_1,p_2) **的严格凹函数.**

定理2 **(1)若方程组(7)~(8)的解**$(\overline{p_1},\overline{p_2})$**满足问题(6)的约束条件,则它是问题(6)的唯一最优解**(p_1^*,p_2^*)**;(2)若**$(\overline{p_1},\overline{p_2})$**不满足问题(6)的约束条件,则问题(6)的最优解在可行域边界达到.**

证明 **(1)由于函数** $\bar{\Pi}(p_1,p_2)$ **在可行域** $S=[C,a/\beta]\times[C,a/\beta]$ **内是连续的,且** S **是有界闭区域,所以一定存在最大值. 当**$(\overline{p_1},\overline{p_2})$**在满足(6)的约束时,根据一阶必要条件和定理1知,**$(\overline{p_1},\overline{p_2})$**即为模**

型的唯一最优解(p_1^*, p_2^*).

(2) 当$(\overline{p_1}, \overline{p_2})$不在可行域$S$内时，问题(6)的最优解在可行域$S$边界上达到.

还需讨论最优解在可行域边界上达到的情况. 问题(6)可以转化为以下4个子问题的求解：

① 当取边界$p_1 = C, C \leqslant p_2 \leqslant a/\beta$时，求解子问题

$$\begin{aligned} &\max \overline{\Pi}(C, p_2) \\ &\text{s.t. } C \leqslant p_2 \leqslant a/\beta. \end{aligned} \tag{13}$$

由(12)式知，$\overline{\Pi}(C, p_2)$关于p_2是凹函数，因为问题(13)是在有界闭区间求解，所以一定存在最优解，并记最优解为p_2'. 利用(8)式求解p_2，若$C \leqslant p_2 \leqslant a/\beta$，则$p_2' = p_2$；否则，在可行域边界达到，此时问题(13)的最优解p_2'满足：

$$\overline{\Pi}(C, p_2') = \max\{\overline{\Pi}(C, C), \overline{\Pi}(C, a/\beta)\}.$$

② 当取边界$p_1 = a/\beta, C \leqslant p_2 \leqslant a/\beta$时，求解子问题

$$\begin{aligned} &\max \overline{\Pi}(a/\beta, p_2) \\ &\text{s.t. } C \leqslant p_2 \leqslant a/\beta. \end{aligned} \tag{14}$$

由(12)式知，$\overline{\Pi}(a/\beta, p_2)$关于$p_2$是凹函数，因为问题(14)是在有界闭区间求解，所以一定存在最优解，并记最优解为p_2''. 利用(8)式求解p_2，若$C \leqslant p_2 \leqslant a/\beta$，则$p_2'' = p_2$；否则，在可行域边界达到，此时问题(14)的最优解p_2''满足：

$$\overline{\Pi}(a/\beta, p_2'') = \max\{\overline{\Pi}(a/\beta, C), \overline{\Pi}(a/\beta, a/\beta)\}.$$

③ 当取边界$p_2 = C, C \leqslant p_1 \leqslant a/\beta$时，求解子问题

$$\begin{aligned} &\max \overline{\Pi}(p_1, C) \\ &\text{s.t. } C \leqslant p_1 \leqslant a/\beta. \end{aligned} \tag{15}$$

由(11)式知，$\overline{\Pi}(p_1, C)$关于p_1是凹函数，因为问题(15)是在有界闭区间求解，所以一定存在最优解，并记最优解为p_1'. 利用(7)式求解p_1，若$C \leqslant p_1 \leqslant a/\beta$，则$p_1' = p_1$；否则，在可行域边界达到，此时问题(15)的最优解p_1'满足

$$\overline{\Pi}(p_1', C) = \max\{\overline{\Pi}(C, C), \overline{\Pi}(a/\beta, C)\}.$$

④ 当取边界$p_2 = a/\beta, C \leqslant p_1 \leqslant a/\beta$时，求解子问题

$$\begin{aligned} &\max \overline{\Pi}(p_1, a/\beta) \\ &\text{s.t. } C \leqslant p_1 \leqslant a/\beta. \end{aligned} \tag{16}$$

由(11)式知，$\overline{\Pi}(p_1, a/\beta)$关于$p_1$是凹函数，因为问题(16)是在有界闭区间求解，所以一定存在最优解，并记最优解为p_1''. 利用(7)式求解p_1，若$C \leqslant p_1 \leqslant a/\beta$，则$p_1'' = p_1$；否则，在可行域边界达，此时问题(16)的最优解$p_1''$满足

$$\overline{\Pi}(p_1'', a/\beta) = \max\{\overline{\Pi}(C, a/\beta), \overline{\Pi}(a/\beta, a/\beta)\}.$$

设问题(6)在边界上得到的最优解为$(\overline{\overline{p_1}}, \overline{\overline{p_2}})$，则有

$$\overline{\Pi}(\overline{\overline{p_1}}, \overline{\overline{p_2}}) = \max\{\overline{\Pi}(C, p_2'), \overline{\Pi}(a/\beta, p_2''), \overline{\Pi}(p_1', C), \overline{\Pi}(p_1'', a/\beta)\}.$$

综上，模型的最优解可以表示为

$$(p_1^*, p_2^*) = \begin{cases} (\overline{p_1}, \overline{p_2}), (\overline{p_1}, \overline{p_2}) \in S, \\ (\overline{\overline{p_1}}, \overline{\overline{p_2}}), (\overline{p_1}, \overline{p_2}) \notin S. \end{cases} \tag{17}$$

根据上述讨论，给出求解算法：

步骤1　输入参数；

步骤2　利用(9)式和(10)式分别计算$\overline{p_1}$和$\overline{p_2}$，再根据(17)式确定模型(6)的最优解(p_1^*, p_2^*)，转步骤3；

步骤3　将(p_1^*, p_2^*)代入(3)式和(4)式计算$N^* = N(p_1^*, p_2^*)$和$\Pi^* = \Pi(p_1^*, p_2^*, N^*)$.

利用上述算法计算得到的p_1^*、p_2^*、N^*和Π^*即为问题(6)最优解和最优值.

3　模型检验

考虑数值例子：

$D(p_i) = 150 + 0.02t(25 - t) - 4p_i, i = 1, 2, r(t) = 4 + 2t^{0.25}, T_1 = 15, T = 30, \eta = 0.5, C = 5$且都带有适当单位.

计算得$p_1^* = 21.83, p_2^* = 27.40, N^* = 991.44, \Pi^* = 28152$.

再对数值例子的最优解和最优利润相对于各参数的灵敏度进行分析，每次只改变一个参数的值，其它参数值不变，计算结果见表1.

表1　各参数变化对最优策略的影响

Table 1　Effects of parameters on the optimal policy

参数 Parameters	变化量 Change (%)	p_1^*	p_2^*	N^*	Π^*	Π^*的变化 Change of Π^* (%)
a	−40	13.34	17.73	531.30	10386	−63.11
	−20	17.59	22.56	761.37	18234	−35.23
	+20	26.08	32.23	1221.50	40141	+42.58
	+40	30.33	37.06	1451.60	54200	+92.53
b	−40	21.20	27.68	984.49	27615	−1.91
	−20	21.52	27.54	987.97	27888	−0.94
	+20	22.15	27.25	994.92	28409	+0.91
	+40	22.47	27.11	998.40	28658	+1.80
c	−40	21.77	27.42	977.32	27724	−1.52
	−20	21.80	27.41	984.38	27938	−0.76
	+20	21.86	27.38	998.51	28366	+0.76
	+40	21.89	27.37	1005.60	28580	+1.52
β	−40	37.04	43.03	1062.00	46519	+65.24
	−20	27.54	33.26	1026.70	35086	+24.63

续表 1

Continued table 1

参数 Parameters	变化量 Change (%)	p_1^*	p_2^*	N^*	Π^*	Π^* 的变化 Change of Π^* (%)
	+20	18.03	23.49	956.18	23468	-16.64
	+40	15.31	20.70	920.92	20068	-28.72
r	-40	22.50	26.09	1040.30	28501	+1.24
	-20	22.16	26.74	1015.90	28352	+0.71
	+20	21.50	28.05	967.01	27903	-0.88
	+40	21.17	28.70	942.57	27604	-1.95
w	-40	22.43	26.25	1033.90	28418	+0.94
	-20	22.13	26.82	1012.70	28305	+0.54
	+20	21.53	27.97	970.21	27959	-0.69
	+40	21.24	28.54	948.97	27726	-1.51
h	-40	21.90	27.26	996.22	28182	+0.11
	-20	21.87	27.33	993.84	28167	+0.05
	+20	21.80	27.46	988.96	28136	-0.05
	+40	21.76	27.53	986.41	28119	-0.12
T_1	-40	21.77	20.45	1372.00	33792	+20.03
	-20	21.74	23.41	1186.60	31772	+12.86
	+20	22.10	33.24	780.66	21797	-22.57
	+40	19.02	5.00	1969.00	31071	+10.37
T	-40	19.43	5.00	1064.40	19430	-30.98
	-20	21.60	35.15	614.95	16205	-42.44
	+20	22.05	23.87	1347.70	36825	+30.81
	+40	22.24	21.75	1682.10	44018	+56.36
η	-40	19.71	5.00	2480.60	29463	+4.66
	-20	19.13	5.00	2355.40	29099	+3.36
	+20	21.59	20.28	1282.30	32646	+15.91
	+40	21.32	15.55	1444.60	32827	+16.61
C	-40	20.96	28.27	970.62	27187	-3.43
	-20	21.40	27.83	981.03	27689	-1.64
	+20	22.27	26.96	1001.90	28576	+1.51
	+40	22.70	26.52	1012.30	28960	+2.87

由表 1 可知:(i) 最优利润相对于参数 a,β,T 的灵敏度较高,相对于 T_1,η 的灵敏度适中,相对于 b,c,r,w,h,C 的灵敏度较低;

(ii) 参数 c,h 的增加或减少对于最优利润的变化比例近乎相同;

(iii) 最优利润相对于参数 a,r,w,T_1,T,η 增加的灵敏度大于它们减少的灵敏度,相对于参数 b,β,C 的减少的灵敏度大于它们增加的灵敏度;

(iv) 由上述几点可以看出:低估参数 b,β,C 带来的惩罚要大于高估这些参数所带来的惩罚,高估 a,r,w,T_1,T,η 所带来的惩罚要大于低估所带来的惩罚;管理者应该准确确定参数 a,β,T,合理估计参数 T_1,η.

上述结果表明本文所建模型符合以下实际:

(1) 固定其它参数,利润随需求率和销售周期的增大(减小)而增大(减小);

(2) 固定其它参数,预订销售价格随需求率(减小)而增大(减小),随取消预订率的增大(减小)而减少(增大);

(3) 固定其它参数,产品总量随需求和取消预订率的增大(减小)而增大(减小),随成本和取消预订费率的增大(减小)而减少(增大).

数值例子验证了模型和算法是有效的. 模型对于企业的预订销售决策有一定的参考价值. 下一步可以考虑产品的成本为时间的函数和取消费价格与产品的销售价格成比例的情形.

参考文献:

[1] Bhunia A K, Maiti M. An inventory model of deteriorating items with lot-size dependent replenishment cost and a linear trend in demand [J]. Applied Mathematical Modelling, 1999, 23: 301-308.

[2] Chung K J, Tsai S F. Inventory systems for deteriorating items with shortages and a linear trend in demand-taking account of time value [J]. Computers and Operations Research, 2001, 28: 915-934.

[3] Manna S K, Chaudhuri K S. An EOQ model with ramp type demand rate, time dependent deterioration rate, unit production cost and shortages [J]. European Journal of Operational Research, 2006, 171: 557-566.

[4] Panda S, Senapati S, Basu M. Optimal replenishment policy for perishable seasonal products in a season with ramp-type time dependent demand [J]. Computers and Industrial Engineering, 2008, 54: 301-314.

[5] Khanra S, Chaudhuri K S. A note on an order-level inventory model for a deteriorating item with time-dependent quadratic demand [J]. Computers and Operations Research, 2003, 30: 1901-1916.

[6] Wee H M, Law S T. Replenishment and pricing policy for deteriorating items taking into account the time-value of money [J]. European Journal of Operational Research, 2001, 71: 213-220.

[7] You P S, Wu M T. Optimal ordering and pricing policy for an inventory system with order cancellations [J]. OR Spectrum, 2007, 29(4): 661-679.

[8] You P S. Ordering and pricing of service products in an advance sales system with price-dependent demand [J]. European Journal of Operational Research, 2006, 170: 57-71.

(责任编辑:尹　闯)