DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2012.02.017

广西科学 Guangxi Sciences 2012,19(2):108～111

5p 阶亚循环群的小度数 Cayley 有向图
Cayley Digraphs of Small Valencies of Metecyclic Group of Order 5p

覃建军,余功雄
QIN Jian-jun,YU Gong-xiong

(南宁市第十五中学数学组,广西南宁 530003)
(Mathematics Section of 15th Middle School of Nanning,Nanning,Guangxi,530003,China)

摘要:利用群论与图论的方法,证明 $5p$(p 是大于 5 的素数)阶亚循环群的连通 3 度和 4 度 Cayley 有向图都是正规的.

关键词:亚循环群 Cayley 有向图 正规性
中图法分类号:O157 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2012)02-0108-04

Abstract: The normality of Cayley digraphs of metacyclic group of order $5p$ (p is a prime greater than 5) of connected valency 3 and valency 4 is studied by the theories of groups and graphs, and it is proved that they are normal.

Key words: metecyclic group, Cayley digraph, normality

对一个图 X,其顶点集记作 $V(X)$,边集记作 $E(X)$. $V(X)$ 到自身并保持边不变的双射(即置换)全体关于映射的乘法构成一个群,称为图 X 的全自同构群,记作 $\mathrm{Aut}(X)$. 如果 $\mathrm{Aut}(X)$ 作用在 $V(X)$(或 $E(X)$)上传递,则称 X 是点(或边)传递图. 通过群我们容易构造具有一定对称性的图. 例如,

设 G 是一个有限群,取 $S\subseteq G\backslash\{1\}$,则群 G 关于其子集 S 的 Cayley 有向图 $X:=\mathrm{Cay}(G,S)$ 定义为

$$\begin{cases}V(X)=G,\\E(X)=\{(g,sg)\mid g\in G,s\in S\}.\end{cases}$$

由 Cayley 有向图定义易知:(1) G 的单位元 1 的邻域 $N(1)=S$;(2) X 连通当且仅当 $G=\langle S\rangle$;(3) 由于 G 的右正则表示 $R(G)\leqslant\mathrm{Aut}(X)$,所以 Cayley 图都是点传递图;(4) X 是无向图当且仅当 $S^{-1}=S$.

关于 Cayley 图的研究主要有正规性、CI-性、s-弧传递以及群的 GRR 和 DRR 等方面。其中正规性是最基本的问题,它不仅可以决定 Cayley 图的全自同构群,在小度数情况下甚至还可以决定 Cayley 图的 CI-性和 s-弧传递性. 关于 Cayley 无向图正规性的结果已比较丰富. 而决定 Cayley 有向图何时是正规的,何时不是正规的,在绝大多数情况下很困难. 对 Cayley 有向图正规性的研究主要参考文献[1]. 基于奇数阶的 Cayley 有向图正规性的结果还比较少,所以本文在文献[1]的基础上,采用群与图的方法对 $5p$(p 是大于 5 的素数)阶亚循环群的连通 3 度和 4 度 Ceyley 有向图的正规性进行研究,并证明它们都是正规的.

$5p$ 阶亚循环群 G 的构造如下:

$$G=\langle a,b\mid a^5=b^p=1,a^{-1}ba=b^r,0<r<p,r^5\equiv1(\mathrm{mod}p)\rangle. \quad (0.1)$$

若无特殊说明,本文所指的 $5p$ 阶亚循环群 G 均形如(0.1)式,凡是未定义而引用的群论及代数图论的概念可参阅文献[2],而且下文涉及的图都是有限、连通、简单、有向图.

1 相关定义及引理

定义 1.1[2] Cayley 有向图 $X:=\mathrm{Cay}(G,S)$ 称为正规的,如果 $R(G)\trianglelefteq A=\mathrm{Aut}(X)$.

命题 1.1[2] (1) $N_A(R(G))=R(G)\mathrm{Aut}(G,S)$,其中 $\mathrm{Aut}(G,S)=\{\alpha\in\mathrm{Aut}(G)\mid S^\alpha=S\}$.

(2) $A=R(G)\mathrm{Aut}(G,S)$ 等价于 $R(G)\trianglelefteq A$.

收稿日期:2011-09-27
修回日期:2011-12-20
作者简介:覃建军(1963-),男,中学高级教师,硕士,主要从事代数图论和数学教学的研究。

命题1.2[2] Cayley有向图X正规当且仅当$A_1 = \mathrm{Aut}(G,S)$，其中A_1表示单位元1在A中的稳定子群.

引理1.1[1] 设G为$5p$阶亚循环群，则有

(1) $b^y a^x = a^x b^{yr^x}$;

(2) $(a^{x_1}b^{y_1})(a^x b^y) = a^{x_1+x} b^{r^x y_1+y}$;

(3) $(a^x b^y)^k = a^{xk} b^{y\frac{r^{xk}-1}{r-1}}$;

(4) G中所有5阶元组成的集合为$\{a^i b^j \mid i=1,2,3,4;j=0,1,\cdots,p-1\}$.

引理1.2 设G为$5p$阶亚循环群，则G的每个自同构α都唯一地被$u(0\leqslant u<p)$和$v(1\leqslant v<p)$决定，即

$$\alpha:\begin{cases} a\longmapsto ab^u,\\ b\longmapsto b^v.\end{cases}$$

反之，由上式诱导的映射是群G的一个自同构.

证明 设$\alpha\in\mathrm{Aut}(G)$，则$o(a^\alpha)=5$，$o(b^\alpha)=p$. 由引理1.1知，存在唯一的$u(0\leqslant u<p)$和$v(1\leqslant v<p)$使$a^\alpha=a^i b^u(i=1,2,3,4)$，$b^\alpha=b^v$. 其实$i\neq 2,3,4$. 否则，若$i=2$，则由$ba=ab^r$有$(ba)^\alpha=(ab^r)^\alpha$，即$b^\alpha a^\alpha=a^\alpha(b^r)^\alpha\Rightarrow b^v a^2 b^u=a^2 b^u b^{rv}\Rightarrow b^{r^2 v}=b^{rv}\Rightarrow(b^{r-1})^{rv}=1$，即$rv\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$，而$(r,p)=(v,p)=1\Rightarrow(rv,p)=1$，矛盾. 同理可证$i\neq 3,4$.

反之，记$x=ab^u$，$y=b^v$. 显然$a,b\in\langle x,y\rangle$，由$x^{-1}yx=(ab^u)^{-1}b^v ab^u=b^{-u}a^{-1}b^v ab^u=b^{-u}a^{-1}ab^{rv}b^u=b^{rv}=(b^v)^r=y^r$知，$x,y$仍满足生成关系，所以$\sigma$是群$G$的自同构.

引理1.3[3] 设$X:=\mathrm{Cay}(G,S)$满足条件：$\forall\varphi\in\mathrm{Aut}(X)_v$，$\varphi|_{X_1(v)}=I|_{X_1(v)}$都蕴涵$\varphi|_{X_2(v)}=I|_{X_2(v)}$，那么若$\sigma\in\mathrm{Aut}(X)_v$，$\sigma|_{X_1(v)}=I|_{X_1(v)}$，则$\sigma$是$V(X)$的恒等映射$I$，其中$v\in V(X)$.

2 主要结果

定理2.1 若$S\subseteq G\backslash\{1\}$是$G$的3元生成子集，则$S$与下述3种类型中所列的某个生成子集$S_i$共轭：

(Ⅰ) 含一个5阶元和两个p阶元；

$S_1=\{a^i b^j,b^m,b^n\}$，$i\in\{1,2,3,4\}$；$j\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}$，$(m,p)=(n,p)=1$，$b^m\neq b^n$.

(Ⅱ) 含两个5阶元和一个p阶元；

$S_2=\{a^i b^j,a^m b^n,b^k\}$，$(i,5)=(m,5)=(k,p)=1$；$j,n\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}$；$a^i b^j\neq a^m b^n$.

(Ⅲ) 含3个5阶元.

$S_3=\{a^i b^j,a^m b^n,a^s b^t\}$，$(i,5)=(m,5)=(s,5)=1$；$j,n,t\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}$，$j,n,t$不能同时为零；$a^i b^j\neq a^m b^n\neq a^s b^t$.

证明 由引理1.2知，$\mathrm{Aut}(G)$作用在G^*上有5个轨道：$\{a^i b^k\mid k=0,1,\cdots,p-1\}$和$\{b^j\mid j=1,\cdots,p-1\}$，$i=1,2,3,4$. 显然定理2.1成立.

定理2.2 若$S\subseteq G\backslash\{1\}$是$G$的4元生成子集，则$S$与下述4种类型中所列的某个生成子集$S_i$共轭：

(Ⅳ) 含一个5阶元和3个p阶元；

$S_4=\{a^i b^j,b^m,b^n,b^k\}$，$m,n,k$互不相同，$i\in\{1,2,3,4\}$；$j\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}$，$(m,p)=(n,p)=(k,p)=1$.

(Ⅴ) 含两个5阶元和两个p阶元；

$S_5=\{a^i b^j,a^m b^n,b^s,b^t\}$，$i\neq m$，$j\neq n$且$s\neq t$，$(i,5)=(m,5)=(k,p)=1$；$j,n,t\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}$；$(s,p)=(t,p)=1$.

(Ⅵ) 含3个5阶元和一个p阶元；

$S_6=\{a^i b^j,a^m b^n,a^s b^t,b^k\}$，$(i,5)=(m,5)=(s,5)=(k,p)=1$；$j,n,t\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}$，$j,n,t$不能同时为零；$a^i b^j\neq a^m b^n\neq a^s b^t$.

(Ⅶ) 含3个5阶元和一个p阶元.

$S_7=\{a^i b^j,a^m b^n,a^s b^t,a^k b^l\}$，$(i,5)=(m,5)=(s,5)=(k,5)=1$；$j,n,t,l\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}$，$j,n,t,l$不能同时为零；$a^i b^j,a^m b^n,a^s b^t,a^k b^l$两两不相等.

证明 证明过程与定理2.1的证明类似.

设X是一个有向图，若$(u,v)\in E(X)$而$(v,u)\notin E(X)$，就称u和v在X中的相邻关系是非对称的；若X的每对相邻顶点在X中的相邻关系都是非对称的，就称X是非对称的.

定理2.3 设G是$5p$阶亚循环群，即$G=\langle a,b\mid a^5=1,b^p=1,a^{-1}ba=b^r\rangle$. 其中$1<r<p$，$r^5\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$. 则$G$的连通3度和4度Cayley有向图都是正规的.

证明 设$X:=\mathrm{Cay}(G,S)$. 由X的连通性可知，S中至少有一个5阶元.

(Ⅰ) 当$S=S_1=\{a^i b^j,b^m,b^n\}$，$i\in\{1,2,3,4;j\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}$，$(m,p)=(n,p)=1$，$b^m\neq b^n$时，设$e=a^i b^j$，$f=b^m$，$t=b^n$，那么$X_1(1)=S_1=\{e,f,t\}$，$X_2(1)=\{e^2,fe,te,ef,f^2,tf,et,t^2\}$，其中$tf=ft$.

(1) 当$m+n\neq p$时，证明过点1的有向5-圈是唯一的，即只有$(1,e,e^2,e^3,e^4,1)$.

设$(1,s_1,s_2s_1,s_3s_2s_1,s_4s_3s_2s_1,s_5s_4s_3s_2s_1)$（这里$s_1=e$，$s_j=e$或$f$或$t$，$2\leqslant j\leqslant 5$）是过点1的有向5-圈，则必有$s_5s_4s_3s_2s_1=1$. 当$s_j(2\leqslant j\leqslant 5)$中有$f$或$t$出现时，类似于文献[1]中定理2.1在$o(f)=5$的情形，可以证明，存在$u,v\in Z^+$，使得$b^u=a^v$，这时$o(b)=5$，矛盾. 故$s_j=e(1\leqslant j\leqslant 5)$，即过点1有唯一的有向5-圈，即$C_o=(1,e,e^2,e^3,e^4,1)$. 设$\sigma\in A_1$，由$1^\sigma=1$

知，σ 在这个圈上必是恒等映射而不变圈中的每一点，特别地 $e^{\sigma}=e$，$(e^2)^{\sigma}=e^2$. 另外，由 $\sigma\in A_1$，有 $X_1(1)^{\sigma}=X_1(1)$，又由 $e^{\sigma}=e$，必有 $\{f,t\}^{\sigma}=\{f,t\}$. 设过点 1 的两个有向 p-圈分别为 $C_1=(1,b^m,b^{2m},\cdots,b^{im},\cdots,b^{(p-1)m},1)$，$C_2=(1,b^n,b^{2n},\cdots,b^{in},\cdots,b^{(p-1)n},1)$. 显然 $C_i^{\sigma}=C_i(i=1,2)$. 否则，若 $C_1^{\sigma}=C_2$，则存在 $1\leqslant i\leqslant p-1$，使得 σ 对换 b^{im} 与 b^{in}. 由 $b^m\neq b^n$，可设 $m<n$，又由 $m+n\neq p$ 得 $b^{in}\in C_1$ 且在 C_1 中 b^{in} 在 b^{im} 之后. 于是，存在 $j>i$，使得在 C_2 中 b^{jn} 在 b^{in} 之后并且有 $(b^{in})^{\sigma}=b^{jn}$，与 σ 对换 b^{im} 与 b^{in} 矛盾. 同理可证，$C_2^{\sigma}\neq C_1$，故 $C_i^{\sigma}=C_i(i=1,2)$. 由 $1^{\sigma}=1$ 知道，σ 在 C_1 和 C_2 上的作用是恒等映射，即 σ 不变 C_1 和 C_2 中所有的点. 因此，过点 1 有唯一的有向 5 圈和两个有向 p-圈，且 σ 在每一个圈上的作用都是恒等映射. 由 $X_1(1)=\{e,f,t\}$，$X_2(1)=\{e^2,fe,te,ef,f^2,et,t^2\}$ 知道 $\sigma|_{X_1(1)}=I|_{X_1(1)}$，$(e^2)^{\sigma}=e^2$，$(f^2)^{\sigma}=f^2$，$(t^2)^{\sigma}=t^2$. 由于过点 1 有唯一的 4-圈 $(1,f,tf,t,1)$，所以 $(1,f,tf,t,1)^{\sigma}=(1,f,tf,t,1)$. 而 $1^{\sigma}=1$，$f^{\sigma}=f$，$t^{\sigma}=t$，得到 $(tf)^{\sigma}=tf$，这样就有 $(ef)^{\sigma}=ef$，$(et)^{\sigma}=et$. 另外，由 X 的连通性，过点 e 也有唯一的有向 5-圈和两个有向 p-圈，因 $e^{\sigma}=e$ 的 σ 在每个圈上的作用是恒等映射而不变圈上的每一点，故有 $(fe)^{\sigma}=fe$，$(te)^{\sigma}=te$. 这样 $\sigma|_{X_2(1)}=I_{X_2(1)}$. 由引理 1.3 得 $\sigma=I$，因而 $A_1=1$，X 关于 G 是正规的.

(2) 当 $m+n=p$ 时，证明 X 关于 G 是正规的.

证明 A_1 忠实地作用在 S 上. 先证明：假设 $\forall\ \varphi\in A_x$，$\varphi|_{X_1(x)}=I|_{X_1(x)}$，则 $\varphi|_{X_2(x)}=I|_{X_2(x)}$. 设 x 是 $V(x)$ 中的任意一点，则 $X_1(x)=\{fx,ex,tx\}$，$X_2(x)=\{f^2x,efx,fex,e^2x,tex,etx,t^2x,\}$. 由 $m+n=p$ 得 $t=f^{-1}$. 过点 x 的两个有向 p-圈分别为 $C_1=(x,fx,f^2x,\cdots,f^nx,\cdots,f^{(p-1)}x,x)$，$C_2=(x,f^{-1}x,f^{-2}x,\cdots,f^{-n}x,\cdots,f^{-(p-1)}x,x)$. 过点 fx 有一个有向 5-圈：$C_3=(fx,efx,e^2fx,e^3fx,e^4fx,fx,)$. 由 $S=\{e,f,t\}$，$ft=tf=1$ 易知，C_1 和 C_2 对称，与 C_3 非对称. 由假设 $\varphi|_{X_1(x)}=I|_{X_1(x)}$，可设 $(fx,efx)^{\varphi}=(fx,f^2x)$. 边 (fx,f^2x) 在 X 中的相邻关系是对称的，与 $(fx,f^2x)^{\varphi^{-1}}=(fx,efx)\in V(C_3)$ 而 C_3 为非对称矛盾. 所以，只能有 $(f^2x)^{\varphi}=f^2x$，$(efx)^{\varphi}=efx$. 利用归纳法可证明 $(f^nx)^{\varphi}=f^nx$，其中 $n=2,3,\cdots,p-1$. 即 $C_1^{\varphi}=C_1$. 同理可证 $C_2^{\varphi}=C_2$. 因为 $x^{\varphi}=x$，所以 φ 在过点 x 的这两个有向 p-圈中的每个圈上为恒等映射而不变圈上的每一点，特别是 $(f^2x)^{\varphi}=f^2x$，$(t^2x)^{\varphi}=t^2x$. 由于 $m+n=p$ 而 $ft=tf=1$，故 $X_1(fx)=\{f^2x,efx\}$，$X_1(tx)=\{t^2x,etx\}$. 由上面的证明得 $(efx)^{\varphi}=efx$，$(etx)^{\varphi}=etx$. 再由 $fx\in C_1$，$tx\in C_2$，易知 $(fx)^{\varphi}=fx$，$(tx)^{\varphi}=tx$. 由 x 的任意性得 $(fex)^{\varphi}=fex$，$(tex)^{\varphi}=tex$. 显然 $(e^2x)^{\varphi}=e^2x$. 这样 φ 点型稳定 $X_2(x)$，即 $\varphi|_{X_2(x)}=I|_{X_2(x)}$. 由引理 1.3 知，若 $\varphi\in A_x$，$\varphi|_{X_1(x)}=I|_{X_1(x)}$，则 φ 是 $V(X)$ 的恒等映射 I，其中，$x\in V(X)$. 由 x 的任意性及 X 的连通性，可以归纳地证明对任意的 $\sigma\in A_1$ 且 $\sigma|_{X_1(x)}=I|_{X_1(x)}$，则 σ 稳定 $V(x)$ 中的每一点. 从而 $\sigma=I$，即 A_1 忠实地作用在 S 上.

证明 X 是正规的. 由命题 1.2，须证明 $A_1\leqslant \mathrm{Aut}(G)$. 由于 A_1 忠实地作用在 S 上，因此 A_1 同构于 S_3（三次对称群）的一个子群. 由于 $e^{\sigma}=e$，则对任意 $\sigma\in A_1$，必有 $o(\sigma)\neq 3$. 这样对任意的 $\sigma\in A_1$，我们分两种情况来证明 $\sigma\in\mathrm{Aut}(G)$.

(a) $o(\sigma)=1$，则 $\sigma\in\mathrm{Aut}(G)$.

(b) $o(\sigma)=2$，由于 $e^{\sigma}=e$，则设 $f^{\sigma}=t$，$t^{\sigma}=f$. 为了证 $\sigma\in\mathrm{Aut}(G)$，就是要证明

$$(s_1s_2\cdots s_n)^{\sigma}=s_1^{\sigma}s_2^{\sigma}\cdots s_n^{\sigma},\ \forall s_1,s_2,\cdots,s_n\in S.\quad(1)$$

对于任意给定的 $x\in G$，为证明(1)式成立，仅须证明

$$(sx)^{\sigma}=s^{\sigma}x^{\sigma},\ \forall\ s\in S\Rightarrow(uvx)^{\sigma}=u^{\sigma}v^{\sigma}x^{\sigma},\ \forall\ u,v\in S.\quad(2)$$

显然，只要(2)式成立，(1)式则可以通过对 n 进行归纳法而得到.

假设对任意的 $s\in S$，$(sx)^{\sigma}=s^{\sigma}x^{\sigma}$，即 $(fx)^{\sigma}=f^{\sigma}x^{\sigma}$，$(ex)^{\sigma}=e^{\sigma}x^{\sigma}$，$(tx)^{\sigma}=t^{\sigma}x^{\sigma}$. 那么，由 x 的任意性，得 $(fex)^{\sigma}=(f(ex))^{\sigma}=f^{\sigma}(ex)^{\sigma}=f^{\sigma}e^{\sigma}x^{\sigma}$，$(ftx)^{\sigma}=x^{\sigma}=(tf)x^{\sigma}=f^{\sigma}t^{\sigma}x^{\sigma}$，$(etx)^{\sigma}=(e(tx))^{\sigma}=e^{\sigma}(tx)^{\sigma}=e^{\sigma}t^{\sigma}x^{\sigma}$. 因此(2)式得证，那么(1)式也得证，故 $A_1\leqslant\mathrm{Aut}(G)$，因而 X 关于 G 是正规的.

(Ⅱ) 当 $S=S_2=\{a^ib^j,a^mb^n,b^k\}$，$(i,5)=(m,5)=(k,p)=1$；$j,n\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}$；$a^ib^j\neq a^mb^n$ 时，设 $e=a^ib^j$，$f=a^mb^n$，$t=b^k$，可证明过点 1 有两个有向 5-圈和一个有向 p-圈，即 $(1,e,e^2,e^3,e^4,1)$，$(1,f,f^2,f^3,f^4,1)$，$(1,t,t^2,\cdots,t^{p-1},1)$. 过点 1 有两个有向 5-圈时的证明与文献[1]中定理 2.1 的证明类似，故省略. 设 $\sigma\in A_1$，由 $1^{\sigma}=1$ 知道，σ 在这 3 个圈上必是恒等映射而不变圈中的每一点. 这样 $\sigma|_{X_1(1)}=I|_{X_1(1)}$. 由 X 的连通性，过 e,f,t 中的每一点有两个有向 5-圈和一个有向 p-圈. 由 $e^{\sigma}=e$，$f^{\sigma}=f$，$t^{\sigma}=t$ 知 σ 在这三点的每个点的有向 5-圈和有向 p-圈上都是恒等映射而不变圈中的每一点，故 σ 稳定 $X_2(1)$ 中的每一点，由引理 1.3 得 $\sigma=I$，即 $A_1(X)=1$，所以 X 关于 G 是正规的. 此时 $\mathrm{Aut}(X)=R(G)$，X 是 G 的 DRR.

(Ⅲ) 当 $S=S_3$ 时，设 $e=a^ib^j$，$f=a^mb^n$，$t=a^sb^t$. 类似(Ⅰ)中(2)的证明，过点 1 有 3 个有向 5-圈：$(1,e,e^2,e^3,e^4,1)$，$(1,f,f^2,f^3,f^4,1)$，$(1,t,t^2,t^3,t^4,1)$. 由 $1^{\sigma}=1$ 知道，σ 在这 3 个有向 5-圈上必是恒等映射而不

变圈中的每一点. 由 X 的连通性知,σ 稳定 X 的所有点,从而 $\sigma = 1$,$A_1(X) = 1$,得 X 是正规的,且是 G 的 DRR.

(Ⅳ) 设 $S = S_4$,$e = a^i b^j$,$f = b^m$,$t = b^n$,$h = b^k$,$i \in \{1,2,3,4\}$;$j \in \{0,1,2,\cdots,p-1\}$,$(m,p) = (n,p) = (k,p) = 1$ 时. 分两种情况讨论.

(1) 设在 m,n,k 中,任意两者之和不为 p,仿照(Ⅰ)中(1)的证明可知,过点 1 有一个有向 5-圈和 3 个有向 p-圈. 若 $\sigma \in A_1$,则 σ 在每一个圈上都是恒等映射而不变圈上的每一点. 显然,$\sigma|_{X_1(1)} = I|_{X_1(1)}$. 由 X 的连通性得 $\sigma|_{X_2(1)} = I|_{X_2(1)}$. 于是,由引理 1.3 知 $\sigma = I$,而 $A_1 = 1$. 这时,X 是正规的,且是 G 的 DRR.

(2) 设在 m,n,k 中,存在两者之和为 p. 不失普遍性,设 $m + n = p$.

证明 A_1 忠实地作用在 S 上. 先证明:假设 $\forall \varphi \in A_x$,$\varphi|_{X_1(x)} = I|_{X_1(x)}$,则 $\varphi|_{X_2(x)} = I|_{X_2(x)}$. 设 x 是 $V(x)$ 中的任意一点,则 $X_1(x) = \{ex,fx,tx,hx\}$,$X_2(x) = \{e^2x,fex,tex,hex,efx,f^2x,hfx,etx,t^2x,htx,ehx,fhx,thx,h^2x\}$. 对任意的 $\varphi \in A_x$ 且 φ 点型稳定 $X_1(x)$. 显然,由 $(ex)^\varphi = ex$,$(fx)^\varphi = fx$,$(tx)^\varphi = tx$,$(hx)^\varphi = hx$ 以及 x 的任意性得 φ 点型稳定 $X_2(x)$,即 $\varphi|_{X_2(x)} = I|_{X_2(x)}$. 由引理 1.3 知,若 $\varphi \in A_x$,$\varphi|_{X_1(x)} = I|_{X_1(x)}$,则 φ 是 $V(X)$ 的恒等映射 I,其中,$x \in V(X)$. 由 x 的任意性及 X 的连通性,可以归纳地证明对任意的 $\sigma \in A_1$ 且 $\sigma|_{X_1(x)} = I|_{X_1(x)}$,则 σ 稳定 $V(x)$ 中的每一点. 从而 $\sigma = I$,即 A_1 忠实地作用在 S 上.

证明 X 是正规的. 由命题 1.2,须证明 $A_1 \leqslant \mathrm{Aut}(G)$. 由于 A_1 忠实地作用在 S 上,因此 A_1 同构于 S_4(四次对称群)的一个子群. 过点 1 的有向边 $(1,e)$,$(1,f)$,$(1,t)$,$(1,h)$ 的一个有向 5-圈和 3 个有向 p-圈分别记作 C_e,C_f,C_t,C_h. 由于 $m + k \neq p$,$n + k \neq p$,仿照(Ⅰ)中(1)的证明得 $C_e^\sigma = C_e$,$C_h^\sigma = C_h$,故 $e^\sigma = e$,$h^\sigma = h$. 这样,对任意 $\sigma \in A_1$,必有 $o(\sigma) \neq 3$,$o(\sigma) \neq 4$. 因此,分两种情况来证明 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$.

(a) $o(\sigma) = 1$,则 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$.

(b) $o(\sigma) = 2$,由于 $e^\sigma = e$,$h^\sigma = h$,则设 $f^\sigma = t$,$t^\sigma = f$. 为了证 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$,就是要证明

$$(s_1 s_2 \cdots s_n)^\sigma = s_1^\sigma s_2^\sigma \cdots s_n^\sigma, \forall s_1,s_2,\cdots,s_n \in S. \quad (3)$$

对于任意给定的 $x \in G$,为证明(3)式成立,仅须证明

$$(sx)^\sigma = s^\sigma x^\sigma, \forall s \in S \Rightarrow (uvx)^\sigma = u^\sigma v^\sigma x^\sigma, \forall u,v \in S. \quad (4)$$

显然,只要(4)式成立,(3)式则可以通过对 n 进行归纳法得到.

假设对任意的 $s \in S$,$(sx)^\sigma = s^\sigma x^\sigma$,即 $(ex)^\sigma = e^\sigma x^\sigma$,$(fx)^\sigma = f^\sigma x^\sigma$,$(tx)^\sigma = t^\sigma x^\sigma$,$(hx)^\sigma = h^\sigma x^\sigma$. 那么,由 x 的任意性和类似于(Ⅰ)中(2)的证明容易得出 $(uvx)^\sigma = u^\sigma v^\sigma x^\sigma$,$\forall u,v \in S$. 因此(4)式得证,即(3)式得证,故 $A_1 \leqslant \mathrm{Aut}(G)$,因而 X 关于 G 是正规的.

(Ⅴ) 设 $S = S_5$,分 $s + t \neq p$ 和 $s + t = p$ 两种情况并分别仿照(Ⅰ)中的(1)和(2)的证明方法可证 X 关于 G 是正规的.

(Ⅵ) 设 $S = S_6$,仿照(Ⅱ)的证明方法可证 $A_1 = 1$,此时 X 关于 G 是正规的.

(Ⅶ) 设 $S = S_7$,仿照(Ⅲ)的证明方法可证 $A_1 = 1$,此时 X 关于 G 是正规的.

参考文献:

[1] 覃建军,王飞,周玲. $5p$ 阶亚循环群上的连通 2 度 Cayley 有向图的正规性[J]. 广西科学,2010,17(1):11-12,21.

[2] 徐明耀,黄建华,李慧陵,等. 有限群导引(上下册)[M]. 北京:科学出版社,1999.

[3] 王汝楫. 二面体群 D_{2p} 的出度为 3 的 Cayley 有向图的正规性[J]. 首都师范大学学报,1998,19(1):1-7.

(责任编辑:尹 闯)