DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2012.02.018

广西科学 Guangxi Sciences 2012,19(2):112～114

局部凸空间有限严格凸性和有限光滑性*

Finite Strict Convexity and Finite Smoothness in Locally Convex Spaces

马百万[1],魏文展[2],张吉超[1]

MA Bai-wan[1],WEI Wen-zhan[2],ZHANG Ji-chao[1]

(1. 广西师范学院数学科学学院,广西南宁 530023;2. 广西经贸职业技术学院,广西南宁 530021)

(1. Collge of Mathematical Science, Guangxi Teachers Education University, Nanning, Guangxi 530023,China;2. Guangxi Economic and Trade Polytechnic,Nanning,Guangxi,530021,China)

摘要: 引入局部凸空间有限严格凸和有限光滑性的概念,建立对偶关系,证明局部凸空间中 $(X\oplus Y)_1$ 的有限严格凸和有限光滑性既是 Banach 空间有限严格凸和有限光滑性概念在局部凸空间中的推广,又是局部凸空间 k-严格凸和 k-光滑性的自然推广.

关键词: 局部凸空间 k-严格凸 k-光滑性 有限严格凸性 有限光滑性

中图法分类号: O177 **文献标识码:** A **文章编号:** 1005-9164(2012)02-0112-03

Abstract: The concept of finite strict convexity and finite smoothness space is introduced into locally convex space. It is shown that there exists a duality between finite strict convexity and finite smoothness,and some geometrical properties of quotient, finite strict convexity with $(X\oplus Y)_1$ and finite smoothness with $(X\oplus Y)_1$ are investigated in this thesis.

Key words: locally convex spaces, k-strictly convexity, k-smoothness,finite strict convexity,finite smoothness

1994 年,束立生[1]给出局部凸空间 k-严格凸与 k-光滑性的定义,并建立了它们的某种对偶关系. 1996 年,方习年[2]引入有限严格凸和有限光滑性,并证明有限严格凸和有限光滑性具有对偶性. 本文进一步推广局部凸空间中 k-严格凸与 k-光滑性,即引入了局部凸空间中有限严格凸和有限光滑性概念,并建立它们之间某种对偶关系. 又受到文献[3,4]的启发,我们利用局部凸空间中有限严格凸的等价定义,讨论了局部凸空间中 $(X\oplus Y)_1$ 的有限严格凸性.

1 定义及引理

设 P 表示实线性空间 X 上的一族分离半范数,且满足 $\bigcap_{p\in P} p^{-1}(0)=0$,其中 $p^{-1}(0)=\{x\in X: p(x)=0\}$. 令 T_p 是半范数族 P 生成的 X 上的局部凸拓扑,则偶对 (X,P) 为 Hausdorff 偶对. (X,P) 表示由 P 生成的局部凸可分离空间.

对每个 $p\in P$,考虑半范空间 (X,p). 用 $(X,p)'$ 表示 (X,p) 上连续线性泛函全体作成的对偶空间,其范数 $\|\cdot\|_p'$ 由 $\|f\|_p'=\sup_{p(x)\leqslant 1}|f(x)|$,对 $\forall f\in(X,p)'$ 给出,对任意的 $p\in P$,记

$U_p(X)=\{x: x\in X, p(x)\leqslant 1\}$;

$S_p(X)=\{x: x\in X, p(x)=1\}$;

$S(X'(p))=\{f\in X'(p): \|f\|_p'=\sup_{p(x)\leqslant 1}|f(x)|=1\}$;

$U(X'(p))=\{f\in X'(p): \|f\|_p'=\sup_{p(x)\leqslant 1}|f(x)|\leqslant 1\}$;

$\Sigma_p(x)=\{f\in S(X'(p)): f(x)=1\}$; $A_p(f)=\{x\in S_p(X): f(x)=\|f\|_p'\}$.

$\dim D$ 表示 D 的线性维数,当 $D=\varnothing$ 时,$\dim D=0$.

对任意正数族 $\{C_p>0: p\in P\}$,记 $B\{C_p\}=\{x\in X: p(x)\leqslant C_p, p\in P\}$,则容易知道 $B\{C_p\}$ 是局部

收稿日期:2012-02-14

作者简介:马百万(1984-),男,硕士研究生,主要从事泛函分析研究。

* 广西自然科学基金项目(桂科自 0728050)资助。

凸空间(X,T_p)（T_p 表示半范数族 P 生成的 X 上的局部凸拓扑）中的绝对凸的有界闭集. 对上述的正数族$\{C_p>0:p\in P\}$，若存在 $p\in P$，使得 $C_p=1$，则称相应的 $B\{C_p\}$ 为一个 p –正规集. 下文中，常用一个字母 B 来表示 p –正规集. 对每个 $B\{C_p\}$，定义 X' 上的半范数为 $p'_{B\{C_p\}}(f)=\sup_{x\in B\{C_p\}}|f(x)|$（$\forall f\in X'$），并称 $p'_{B\{C_p\}}$ 是由 $B\{C_p\}$ 决定的半范数. 记 p' 是形如 $p'_{B\{C_p\}}$ 的半范数的全体，容易验证 p' 生成 X' 上的局部凸拓扑恰好是 X' 上的强拓扑$(X',T_{p'})$. 考虑任意正数族$\{C_{p'}>0:p'\in P'\}$，记 $B\{C_{p'}\}=\{f\in X':p'(f)\leqslant C_{p'},p'\in P'\}$，对每个 $B\{C_{p'}\}$，在 $X''=(X',T_{p'})'$ 上定义半范数 $P''_{B\{C_{p'}\}}(F)=\sup_{f\in B\{C'_p\}}|F(f)|$（$\forall F\in X''$），则形如 $p''_{B\{C'_p\}}$ 的半范数的全体 p'' 生成 X'' 上的强拓扑$(X'',T_{p''})$. 由文献[5]可以知道 $X''=(X',T_{p'})'$.

定义 1.1[2] 称偶对(X,P)为有限严格凸的，若对任意 $p\in P$，$f\in S(X'(p))$，都有 $\dim A_p(f)<+\infty$.

定义 1.2[2] 称偶对(X,P)为有限光滑的，若对任意 $p\in P$，$x\in S_p(X)$，都有 $\dim\Sigma_p(x)<+\infty$.

定义 1.3[1] 称偶对(X,P)为 k –光滑的，若对任意 $p\in P$，$x\in S_p(X)$，有 $\dim\Sigma_p(x)\leqslant k$.

定义 1.4[1] 称偶对(X,P)为 k –严格凸的，如果对任意 $p\in P$，$\{x_n\}\in S_p(X)$，满足 $p(\sum_{n=1}^{\infty}x_n)=k+1$，则存在一组不全为零的数 $C_1,C_2,\cdots,C_{k+1}$，使得 $p(\sum_{n=1}^{\infty}C_nx_n)=0$.

由定义 1.2，1.3 知，有限光滑性是 k –光滑性的推广. 由文献[2,6]可以知道，上述定义均是 Banach 空间相应定义的合理推广.

2 主要结果

上述偶对(X,P)中有限严格凸性和有限光滑性的定义仍保持着与 Banach 空间相同的对偶关系.

定理 2.1 如果偶对(X',P')是有限光滑的，那么偶对(X,P)是有限严格凸的.

证明 设 J 是 X 到 X'' 的自然嵌入映射，它被定义为 $J(x)f=f(x)$，$x\in X$，$f\in X'$. 已知 J 是 X 到 X'' 的子空间 $J(x)$ 上的一个等距同构，且对 $\forall p\in P$，$J(S_p(X))\subset S(X''(p'_B))$.

对 $\forall p\in P$，$f\in S(X'(p))$，由条件“(X',P')是有限光滑空间”知，

$\Sigma_{p'}(f)=\{F\in S(X''(p'))$，$F(f)=1\}$，$\dim\Sigma_{p'}(f)<+\infty$. 对于 $S_p(X)$ 的子集 $A_p(f)=\{x\in S_p(X)$，$f(x)=\|f\|'_p\}$，显然有 $J(A_p(f))\subset\Sigma_{p'}(f)$，于是 $\dim A_p(f)<+\infty$，所以(X,P)是有限严格凸空间.

定理 2.2 如果偶对(X',P')是有限严格凸的，那么偶对(X,P)是有限光滑的.

证明 假定(X,P)不是有限光滑的，由定义 1.2 知，必存在 $p\in P$，$x_0\in S_p(X)$，使得

$\dim\Sigma_{p'}(f)=+\infty$.

因为 $p\in P$，$x_0\in S(X''(p'))$，因此

$\dim A_p(x_0)=\dim\Sigma_p(x_0)=+\infty$.

由定义 1.1 知，这与(X',P')是有限严格凸的矛盾.

定理 2.3 偶对(X,P)是有限严格凸的充要条件是，对任意 $p\in P$，$\{x_n\}\subset X$，当 $\sum_{n=1}^{\infty}p(x_n)-p(\sum_{n=1}^{\infty}x_n)<\infty$ 时，必有 $\dim\{x_n\}<+\infty$.

证明 必要性. 假设存在$\{x_n\}\subset X$，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}p(x_n)-p(\sum_{n=1}^{\infty}x_n)<\infty,$$

但 $\dim\{x_n\}=+\infty$. 对任意的 $p\in P$，存在 $f\in S(X'(p))$，使得

$$f(\sum_{n=1}^{\infty}x_n)=p(\sum_{n=1}^{\infty}x_n),$$

从而有 $f(x_n)=p(x_n)$（$\forall n$）. 当 $p(x_n)\neq 0$ 时，有 $f(\frac{x_n}{p(x_n)})=1$，即$\{\frac{x_n}{p(x_n)}\}\subset A_p(f)$. 因为 $\dim\{x_n\}=+\infty$，所以 $\dim\{\frac{x_n}{p(x_n)}\}=+\infty$，从而 $\dim A_p(f)=+\infty$，即(X,P)不是有限严格凸的.

充分性. 若存在 $p\in P$，$f\in S(X'(p))$，$\dim A_p(f)=+\infty$，即(X,P)不是有限严格凸的，则必存在$\{y_n\}\subset\dim A_p(f)$，$\{y_n\}$中任意有限个元素线性无关，从而 $\dim\{y_n\}=+\infty$. 令 $x_n=\frac{y_n}{2^n}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛且

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}p(x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)=f(\sum_{n=1}^{\infty}x_n)\leqslant\|f\|'_p p(\sum_{n=1}^{\infty}x_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}p(x_n)=1.$$

故 $p(\sum_{n=1}^{\infty}x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}p(x_n)=1<+\infty$，但是 $\dim\{x_n\}=\dim\{y_n\}=+\infty$，从而产生矛盾.

根据定义 1.4 和定理 2.3 可知，有限严格凸是 k –严格凸的推广

定理 2.4 $((X\oplus Y)_1,P)$是有限严格凸的当且

仅当(X,P_1),(Y,P_2)都是有限严格凸的,其中$(X\oplus Y)_1=\{(x,y);p(x,y)=p_1(x)+p_2(y),p\in P,p_1\in P_1,p_2\in P_2,x\in X,y\in Y\}$.

证明 必要性. 设(X,P_1)不是有限严格凸的,即存在$p_1\in P_1$,$\{x_n\}\subset X$,$\sum_{n=1}^{\infty}p_1(x_n)-p_1(\sum_{n=1}^{\infty}x_n)<+\infty$,但是$\dim\{x_n\}=+\infty$. 这样就有$p_1(\sum_{n=1}^{\infty}x_n)=p(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,0))=\sum_{n=1}^{\infty}p(x_n,0)=\sum_{n=1}^{\infty}p_1(x_n)$,那么存在$F\in S((X\oplus Y)_1'(p))$,使得$F(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,0))=p(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,0))$,从而有$F(x_n,0)=p(x_n,0)(\forall n)$. 当$p(x_0,0)\neq 0$时,有$F(\frac{(x_n,0)}{p(x_n,0)})=1$,即$\{(\frac{x_n}{p_1(x_n)},0)\}\subset A_p(F)$. 因为$\dim\{x_n\}=+\infty$,有$\dim\{(\frac{x_n}{p_1(x_n)},0)\}=+\infty$,从而有$\dim A_p(F)=+\infty$. 这与$((X\oplus Y)_1,P)$是有限严格凸的矛盾.

充分性. 设$((X\oplus Y)_1,P)$不是有限严格凸的,即存在$p\in P$,$\{(x_n,y_n)\}\subset(X\oplus Y)_1$,$p(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,y_n))=\sum_{n=1}^{\infty}p(x_n,y_n)<+\infty$,但是$\dim\{(x_n,y_n)\}=+\infty$. 取$y_n=0(\forall n)$,那么$p\in P$,$\{(x_n,0)\}\subset(X\oplus Y)_1$,$p(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,0))=\sum_{n=1}^{\infty}p(x_n,0)<+\infty$且$\dim\{(x_n,0)\}=+\infty$,这样就有

$$p_1(\sum_{n=1}^{\infty}x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}p_1(x_n)<+\infty,$$

于是存在$f\in S(X'(p_1))$,使$f(\sum_{n=1}^{\infty}x_n)=p_1(\sum_{n=1}^{\infty}x_n)$,从而$f(x_n)=p_1(x_n)(\forall n)$,当$x_n\neq 0$时,有$f(\frac{x_n}{p_1(x_n)})=1$,即

$$\{\frac{x_n}{p_1(x_n)}\}\subset A_{p_1}(f).$$

又因为$\dim\{(x_n,0)\}=+\infty$,有$\dim\{\frac{x_n}{p_1(x_n)}\}=+\infty$. 从而$\dim A_{p_1}(f)=+\infty$. 这与$(X,P_1)$是有限严格凸的矛盾.

定理2.5 $((X\oplus Y)_1,P)$是有限光滑的,则(X,P_1),(Y,P_2)都是有限光滑的.

证明 设(X,P_1)不是有限光滑的,那么存在$p_1\in P_1$,$x_0\in S_{p_1}(X)$,使得$\dim\Sigma_{p_1}(x_0)=+\infty$,则又存在$\{f_n\}\subset\Sigma_{p_1}(x_0)$. 由于$\{f_n\}$中任意有限个元素线性无关,从而$\dim\{f_n\}=+\infty$,那么$(x_n,0)\in(X\oplus Y)_1$,$(f_n,0)(x_0,0)=f_n(x_0)=1(\forall n)$,$\|(f_n,0)\|_p'=\|f\|_{p_1}'=1$,即$\{(f_n,0)\}\subset\Sigma_p(x_0,0)$. 因为$\dim\{f_n\}=+\infty$,所以$\dim\{(f_n,0)\}=+\infty$,从而$\dim\Sigma_p(x_0,0)=+\infty$. 这与$((X\oplus Y)_1,P)$是有限光滑的矛盾.

参考文献:

[1] 束立生. 局部凸空间的k-严格凸性与k-光滑性[J]. 安徽师范大学学报,1994,17(2):1-6.

[2] 方习年. 有限严格凸与有限光滑空间[J]. 海南大学学报,1996,14(3):214-217.

[3] 方习年. 关于$(X\oplus Y)_1$的凸性[J]. 数学研究与评论,2000,10(4):373-377.

[4] 国起,吴从炘. 局部凸空间的严格凸性与光滑性[J]. 东北数学,1989,5(4):465-472.

[5] 徐际宏. 赋范线性空间的伪光滑性[J]. 阜阳师范学院学报,1994,22(1):151-154.

[6] 南朝勋,王建华. k-严格凸性与k-光滑性[J]. 数学年刊,1990,11A(3):321-324.

(责任编辑:尹 闯)

中国高质量论文数量持续上升

著名的英国学术期刊《自然》是世界上最重要的科研学术期刊之一,是自然出版集团的旗舰刊物。2012年5月23日《自然》以副刊的形式发布1份调查报告。这份报告统计了《自然》及其系列刊物中由中国研究人员发表或参与发表的论文比例,结果显示在2011年为6.6%,高于2010年的5.3%,维持了近些年来的持续上升势头。同时,该报告还调查了全球范围的论文数据,结果显示在那些引用次数排名最靠前的高质量科研论文中,由中国研究人员发表或参与发表的论文比例在2011年达到11.3%,该比例在2001年时为1.85%。在全球高质量科研论文中,美国所占比例在2011年为50.7%,在2001年为64.3%。中国的高质量科研论文数量近年来上升势头强劲,目前位居全球第四。据该报告作者预计,到2014年,中国的这一排名有望超过英国和德国,仅次于美国。

(据科学网)