DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2012.02.020

广西科学 Guangxi Sciences 2012,19(2):118～120

四个函数方程的一般解

General Solutions for Four Functional Equations

陈向阳

CHEN Xiang-yang

(广西民族大学理学院,广西南宁 530006)

(Department Physics and Mathematics of Guangxi University for Nationalities,Nanning,Guangxi,530006,China)

摘要:通过代换和赋值等分析方法,得出4个函数方程的一般解.

关键词:函数方程 代换 赋值

中图法分类号:O174 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2012)02-0118-03

Abstract:Some two-variable functional equations were studied by means of analysis methods such as replacement,valuation and so on. The general solutions of four function equations were given.

Key words:functional equation,replacement,valuation

函数方程一直受到广泛关注,已成为当今数学研究的一个十分重要的课题[1].它是一个历史悠久、内容丰富并有广泛应用的数学分支,数学的许多领域包括微分方程、动力系统、泛函分析、代数学、几何学、拓扑学、概率论等都涉及函数方程问题;计算机科学中的迭代理论和方法也涉及函数方程问题;航空技术、遥感技术、经济学理论、心理学理论等诸多方面也提出了许多函数方程模型.有关函数方程问题的研究,已取得了一些的成果[2~5].最近吴伟朝在文献[6]和文献[7]中分别提出了11个和4个相关的函数方程问题.本文就其中的4个函数方程进行了研究,得到了这几个函数方程的一般解.函数方程的基本思想、基本方法和基本问题本文不再详细介绍,具体可以参考文献[1,8].

1 定义及引理

定义1(导数) 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义,若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在,则称函数 f 在点 x_0 处可导,并称该极限为 f 在点 x_0 处的导数,记作 $f'(x_0)$.

$R\to R$ 可微函数的全体常记为 $C'(R,R)$.

引理1[2] 对于函数 $f:R\to R$,若任意 $x,y\in R$ 的都有

$f(x+f(y)+yf(x))=y+f(x)+xf(y)$,则唯一的函数解是 $f(x)=x,x\in R$.

引理2[7] 对于函数 $f:R\to R$,若任意 $x,y\in R$ 的都有 $f(x^2+y+f(y))=2y+(f(x))^2$,则唯一的函数解是 $f(x)=x,x\in R$.

2 主要结果

定理1 对于 $C'(R,R)$ 函数 $f(x)$,若对任何的 $x,y\in R$ 都有

$$f(x+xf(y))=f(x)+xf(y).\tag{1}$$

则函数方程(1)的一般解为 $f(x)=0$ 或 $f(x)=x+c$、c 为任意常数.

证明 由(1)式有

$$f(x+xf(y))=f(x)+xf(y)+x-x.\tag{2}$$

令 $t=x+xf(y)$,则有

$$f(t)=t+f(x)-x.\tag{3}$$

若 $t=x$,由(3)式易推出 $xf(y)=0$.由 x 的任意性,有 $f(x)=0$.

再讨论 $t\neq x$ 的情况.由(2)式可得

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=1,t\neq x.\tag{4}$$

收稿日期:2012-02-14

修回日期:2012-04-14

作者简介:陈向阳(1965-),女,讲师,主要从事函数方程与微分方程问题的研究。

等式两边取极限，则有$\lim\limits_{t\to x}\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}=1$，即$f'(x)=1$. 由此可知$f(x)=x+c$，$c$为任意常数.

因此，函数方程(1)的一般解为$f(x)=0$及$f(x)=x+c$，c为任意常数.

定理2 对于$C'(R,R)$函数$f(x)$，若对任何的$x,y\in R$都有

$$f(x+f(x)+xf(y))=2f(x)+xf(y). \tag{5}$$

则函数方程(5)的一般解为$f(x)=0$或$f(x)=x+c$，c为任意常数.

证明 由(5)式知

$$f(x+f(x)+xf(y))=2f(x)+xf(y)=x+f(x)+xf(y)+f(x)-x. \tag{6}$$

在(6)式中，令$v=x+f(x)+xf(y)$，得

$$f(v)=v+f(x)-x. \tag{7}$$

若$v=x$，由(7)式可推出$f(x)+xf(y)=0$. 再令$x=y$，则有$(1+x)f(x)=0$，由x的任意性，故有$f(x)=0$.

再讨论$v\neq x$的情况. 由(7)式可知

$$\frac{f(v)-f(x)}{v-x}=1,v\neq x. \tag{8}$$

对(8)式两边取极限，有

$$\lim_{v\to x}\frac{f(v)-f(x)}{v-x}=1,$$

即$f'(x)=1$. 由此可知

$$f(x)=x+c,c\text{为任意常数}.$$

所以，函数方程(5)的一般解为$f(x)=0$及$f(x)=x+c$，c为任意常数.

定理3 对于$C'(R,R)$函数$f(x)$，若对任何的$x,y\in R$都有

$$f(2x+xf(y))=x+f(x)+xf(y). \tag{9}$$

则函数方程(9)的一般解为$f(x)=-1$或$f(x)=x+c$，c为任意常数.

证明 由(9)式可知

$$f(2x+xf(y))=x+f(x)+xf(y)=x+x+xf(y)+f(x)-x. \tag{10}$$

在(10)式中，令$s=2x+xf(y)$，则有

$$f(s)=s+f(x)-x. \tag{11}$$

若$s=x$，则(11)式为恒等式，且有$x(f(y)+1)=0$. 令$x=y$，则有$x(f(x)+1)=0$，由于x为任意实数，所以有$f(x)=-1$.

再讨论$s\neq x$的情况. 由(11)式可知

$$\frac{f(s)-f(x)}{s-x}=1,s\neq x. \tag{12}$$

等式两边取极限，则有$\lim\limits_{s\to x}\dfrac{f(s)-f(x)}{s-x}=1$，即$f'(x)=1$. 由此可知$f(x)=x+c$，$c$为任意常数. 所以，函数方程(9)的解为$f(x)=-1$及$f(x)=x+c$，$c$为任意常数.

定理4 对于$C'(R,R)$函数$f(x)$，若对任何的$x,y\in R$都有

$$f(x+f(x)+xf(y))=2x+xf(y). \tag{13}$$

则函数方程(13)的一般解为$f(x)=x$.

证法一：

在(13)式中，令$x=0$则有

$$f(f(0))=0. \tag{14}$$

由(13)式和(14)式，令$x=y=f(0)$，则有

$$f(f(0)+f(f(0))+f(0)f(f(0)))=2f(0)+f(0)f(f(0)), \tag{15}$$

即$2f(0)=f(f(0))=0$，所以有

$$f(0)=0. \tag{16}$$

由(16)式，并在(13)式中令$y=0$，则有

$$f(x+f(x))=2x. \tag{17}$$

在(13)式中，令$x=y=-1$，则有$f(-1+f(-1)+(-1)f(-1))=2\times(-1)+(-1)f(-1)$，所以$f(-1)=-2-f(-1)$，因此有

$$f(-1)=-1. \tag{18}$$

从而，在(13)式中令$y=-1$，有

$$f(f(x))=x. \tag{19}$$

由(19)式可知，$f(x)$为单射. 这是因为$\forall x_1,x_2\in R$且$x_1\neq x_2$，若$f(x_1)=f(x_2)$，由(19)式可知，$x_1=f(f(x_1))=f(f(x_2))=x_2$，这与已知的$x_1\neq x_2$相矛盾，所以$f(x_1)\neq f(x_2)$，故$f(x)$为单射.

由(17)式和(19)式可知

$$x+f(x)=f(2x). \tag{20}$$

而且(20)式可以写成

$$f(2x)=x+f(x)=x+f(x)+x-x=2x+f(x)-x. \tag{21}$$

在(21)式中令$v=2x$，则有

$$f(v)=v+f(x)-x. \tag{22}$$

由(22)式可知

$$\frac{f(v)-f(x)}{v-x}=1,v\neq x. \tag{23}$$

等式两边取极限，有$\lim\limits_{v\to x}\dfrac{f(v)-f(x)}{v-x}=1$，即$f'(x)=1$.

由此可知

$$f(x)=x+c, \tag{24}$$

其中c为任意常数. 由(16)式和(24)式知$f(0)=0+c=0$，所以$c=0$. 故

$$f(x)=x. \tag{25}$$

所以，函数方程(13)的一般解为$f(x)=x$.

证法二:

类似证法一可知 $f(x)$ 为单射,且 $f(f(x)) = x$, $f(0) = 0$. 令 $y = f(-\frac{f(x)}{x})$, $x \neq 0$,则有 $f(x + f(x) + xf(f(-\frac{f(x)}{x}))) = 2x + xf(f(-\frac{f(x)}{x}))$. 所以有 $f(x) = x$.

因此,函数方程的解为 $f(x) = x$.

参考文献:

[1] 张伟年,杨地莲,邓圣福. 函数方程[M]. 成都: 四川教育出版社,2002.

[2] 杨路,张景中. 第二类 Feigenbaum 函数方程[J]. 中国科学: A 辑,1985,12: 1061-1069.

[3] 方卫东,钟钜康. 一些含指数函数的函数方程(I)[J]. 华南理工大学学报: 自然科学版,1998,26(7): 11-15.

[4] 胡蔚勇. 函数方程 $f(x + y) = f(x) + f(y)$ 的非连续解[J]. 高等数学研究,2006,9(5): 43.

[5] 余宏旺. 一类由方程 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 确定的函数[J]. 高等函授学报: 自然科学版,2010,23(6): 5-6.

[6] 吴伟朝. 对一个共轭型函数方程的研究(1)[J]. 广州大学学报: 综合版,2001,15(11): 15-21.

[7] 吴伟朝. 对函数方程 $f(x^m + y + f^{(n)}(y)) = 2y + (f(x))^m$ 的研究(1)[J]. 广州大学学报: 自然科学版,2002,1(4): 8-12.

[8] 王向东,戎海武,李文荣. 函数方程及其应用[M]. 上海: 上海科学技术文献出版社,2003.

(责任编辑: 尹 闯)

(上接第 117 页 Continue from page 117)

formula(2.3), it is not difficulty to find $B_2(\delta_0) = \frac{80}{9}\pi\sqrt{3}a_0$, $c_0(\delta_0) = \frac{40}{729}\pi a_0$.

Note that

$$\text{rank}\frac{\partial(B_0, B_1)}{\partial(a_0, a_1, a_2, a_4)} = 2,$$

by the lemma 1.3, there are 2 limit cycles near the center C_1, and considering the system is Z_3-equivariant, we have got 6 limit cycyles, bifurcated from the centers.

References:

[1] Li J. Chaos and Melnikov method[M]. Chongqin: Chongqin University Press, 1989.

[2] Yu P, Han M. Small limit cycles bifurcating from finepoints in cubic order Z_2-equivariant vector fields[J]. Chaos Solitons Fractals, 2005, 24: 329-348.

[3] Yu P, Han M, Yuan Y. Analysis on limit cycles of Z_q-equivariant polynomial vectorfields with degree 3 or 4[J]. J Math Anal Appl, 2006, 322: 51-65.

[4] Zhang T H, Han M, Zang H. Bifurcations of limit cycles for a cubic Hamiltonian system under quartic perturbations[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 22: 1127-1138.

[5] Han M, Yang J, Tarta A, et al. Limit cycles near homoclinic and heteroclinicloops[J]. J Dyn Diff Equat, 2008, 20: 923-944.

[6] Hou Y, Han M. Melnikov functions for planar near-Hamiltonian systems and Hopf bifurcations[J]. J Shanghai Normal University: Natural Sciences, 2006, 35: 1-10.

[7] Han M, Wang Z, Zang H. Limit cycles by Hopf and homoclinic bifurcations for near-Hamiltonian systems[J]. Chinese Ann Math Ser A, 2007, 28: 679-690.

(责任编辑: 尹 闯)