DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2012.03.017

广西科学 Guangxi Sciences 2012,19(3):213～217

# 一类具强制位势常 p-Laplace 系统的同宿解*

# Homoclinic Solutions for a Ordinary p-Laplacian Systems with Coercive Potential

陈 凯[1],刘永建[2]

CHEN Kai[1],LIU Yong-jian[2]

(1.桂林航天工业学院,广西桂林 541004;2.玉林师范学院数学与信息科学学院,广西玉林 537000)

(1. Department of Information Engineering,Guilin University of Aerospace Technology,Guilin,Guangxi,541004,China;2. College of Mathematics and Computer Science,Yulin Normal University,Yulin,Guangxi,537000,China)

**摘要**:利用逼近法和一些分析技巧,获得一类具强制位势常 p-Laplace 系统存在同宿解的一组充分条件.

**关键词**:常 p-Laplace 系统 同宿解 强制位势

**中图法分类号**:O175 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2012)03-0213-05

**Abstract**:Homoclinic solutions for a class of ordinary p-Laplacian systems with a coercive potential were analyzed using approximation method with some analytical techniques. A new criterion of the existence of homoclinic solutions for the system was obtained.

**Key words**:ordinary p-Laplacian systems,homoclinic solutions,coercive potential

对于非自治 p-Laplace 系统

$$\frac{d}{dt}(|\dot{u}(t)|^{p-2}\dot{u}(t)) = \nabla F(t,u(t)) + f(t), \tag{0.1}$$

其中 $p>1, t\in R, u\in R^n, F: R\times R^n \to R, f: R\to R^n$,当 $p=2$ 时,系统(0.1)退化为二阶 Hamilton 系统

$$\ddot{u}(t) = \nabla F(t,u(t)) + f(t). \tag{0.2}$$

通常,若 $u\neq 0$,且 $u(t)\to 0, \dot{u}(t)\to 0, t\to\pm\infty$,则称系统(0.1)的解 $u$ 是非平凡的且同宿于 0.

Hamilton 系统同宿轨的存在性是一个经典的问题,对研究动力系统的动力学行为起着非常重要的作用[1].该问题直到 1990 年还只取得很少的一部分结果,而且用以解决这个问题的唯一方法是 Melnikov 的小扰动法.最近,很多学者利用临界点理论研究 Hamilton 系统同宿解的存在性与多重性[2~20].

收稿日期:2011-11-07

修回日期:2012-03-11

作者简介:陈 凯(1979-),男,硕士,讲师,主要从事微分动力系统的研究。

*国家自然科学基金项目(11161051),桂林航天工业学院校级项目(X12Z003)资助。

Izydorek[9] 得出如下结论。设 $F$ 和 $f$ 满足条件:

(A1) $F\in C^1(R\times R^n, R)$ 关于 $t$ 是 $T$-周期的,$T>0$;

(A2) 存在常数 $b>0$ 使得 $F(t,x)\geqslant F(t,0)+b|x|^2, \forall (t,x)\in R\times R^n$;

(A3) $\int_0^T F(t,0)dt = 0$;

(A4) $f\neq 0$ 是连续有界函数且 $\int_R |f(t)|^2 dt < \infty$.

则系统(0.2)具有一个同宿解 $u_0\in W^{1,2}(R,R^n)$.

受到文献[9]的启发后,文献[12]和[19]进一步考虑了系统(0.2)的同宿解.文献[12]得到如下结果.

设条件(A1)成立,且 $F$ 和 $f$ 还满足条件:

(B2) 存在常数 $b>0, \upsilon>1$ 和 $\mu>\upsilon$ 使得 $F(t,x)\geqslant b|x|^\mu - a(t)|x|^\upsilon, \forall (t,x)\in R\times R^n$,其中 $a(t): R\to R^+$ 是非负连续函数且 $a\in L^{\frac{\mu}{\mu-\upsilon}}(R,R^+)$;

(B3) $F(t,0)=0$;

(B4) $f\neq 0$ 是连续函数且 $\int_R |f(t)|^{\frac{\mu}{\mu-1}} dt < \infty$.

则系统(0.2)具有一个同宿解 $u_0\in W^{1,2}(R,R^n)$.后

来，Tang X H等[20]又将自己在文献[19]中得到的结果推广到p-Laplace系统(0.1).我们注意，条件(B2)和(B3)在文献[12]的证明中起着非常重要的作用.然而，条件(B3)比(A3)强，而且条件(B2)还可以放宽.本文的目标就是把文献[12]中的结论推广到p-Laplace系统，且把条件(B3)去掉并用如下更一般的条件(B2)′来取代条件(B2).

(B2)′存在常数 $b>0$，$\upsilon>0$ 和 $\mu>\max\{1,\upsilon\}$ 使得 $F(t,x)\geqslant F(t,0)+b\mid x\mid^{\mu}-a(t)\mid x\mid^{\upsilon}$，$\forall(t,x)\in R\times R^{n}$，其中 $a(t):R\to R^{+}$ 是非负连续函数且 $a\in L^{\frac{\mu}{\mu-\upsilon}}(R,R^{+})$.

**注** 容易看出条件(B2)′比(B2)更一般.事实上，当 $F(t,0)=0$ 且 $\upsilon>1$ 时，条件(B2)′就退化为(B2).

文中，$(\cdot,\cdot):R^{n}\times R^{n}\to R$ 表示通常内积且 $|\cdot|$ 是 $R^{n}$ 中诱导的范数.

## 1 基本定义及引理

对每个 $k\in N$，设 $E_{k}=W_{2kT}^{1,p}(R,R^{n})$ 表示由定义在 $R$ 中且值域在 $R^{n}$ 中的 $2kT$-周期函数所构成的Hilbert空间，$E_{k}$ 上的范数定义为

$$\| u\|_{E_{k}}:=[\int_{R}(|\dot{u}(t)|^{p}+|u(t)|^{p})\mathrm{d}t]^{1/p}.$$

$L_{2kT}^{p}(R,R^{n})$ 是由定义在 $R$ 上且函数值在 $R^{n}$ 中的函数构成的Banach空间，其范数定义为

$$\| u\|_{L_{2kT}^{p}}:=(\int_{R}|u(t)|^{p}\mathrm{d}t)^{1/p}.$$

$L_{2kT}^{\infty}(R,R^{n})$ 是由定义在 $R$ 上且函数值在 $R^{n}$ 中的本质有界函数构成的Banach空间，其范数定义为

$$\| u\|_{L_{2kT}^{\infty}}:=\mathrm{ess\ sup}\{|u(t)|:t\in R\}.$$

定义 $I_{k}:E_{k}\to R$ 为

$$I_{k}(u)=\int_{-kT}^{kT}[\frac{1}{p}|\dot{u}(t)|^{p}+F(t,u(t))+(f_{k}(t),u(t))]\mathrm{d}t. \quad (1.1)$$

易知 $I\in C^{1}(E,R)$ 是弱下半连续的且

$$\langle I_{k}'(u),v\rangle=\int_{-kT}^{kT}[(|\dot{u}(t)|^{p-2}\dot{u}(t),\dot{v}(t))+(\nabla F(t,u(t)),v(t))+(f_{k}(t),v(t))]\mathrm{d}t,\ \forall u,v\in E_{k},$$

**引理1.1**[20] 设 $a>0$，$u\in W^{1,p}(R,R^{n})$.则对任意的 $t\in R$，有

$$|u(t)|\leqslant(2a)^{-1/\mu}(\int_{t-a}^{t+a}|u(s)|^{\mu}\mathrm{d}s)^{1/\mu}+a\cdot(2a)^{-1/p}(\int_{t-a}^{t+a}|\dot{u}(s)|^{p}\mathrm{d}s)^{1/p}. \quad (1.2)$$

**引理1.2**[20] 设 $u\in E_{k}$.则

$$\| u\|_{L_{2kT}^{\infty}}\leqslant T^{-1/\mu}(\int_{-kT}^{kT}|u(s)|^{\mu}\mathrm{d}s)^{1/\mu}+T^{(p-1)/p}(\int_{-kT}^{kT}|\dot{u}(s)|^{p}\mathrm{d}s)^{1/p}.$$

## 2 主要结果

**定理** 设条件(A1)，(B2)′和(B4)成立.则系统(0.1)具有一个同宿解 $u_{0}\in W^{1,p}(R,R^{n})$.

考虑微分系统：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\dot{u}(t)|^{p-2}\dot{u}(t))=\nabla F(t,u(t))+f_{k}(t), \quad (2.1)$$

其中 $f_{k}:R\to R^{n}$ 是 $f$ 的 $2kT$-延拓限制在区间 $[-kT,kT]$ 上的函数，$k\in N$.

参考文献[9,12,19,20]中的方法，证明系统(0.1)的同宿解是系统(2.1)的 $2kT$-周期解的极限.

**命题2.1** 设条件(A1)，(B2)′和(B4)成立.则对每个 $k\in N$，系统(2.1)有一个 $2kT$-周期解 $u_{k}\in E_{k}$ 使得

$$\frac{1}{p}\int_{-kT}^{kT}|\dot{u}_{k}(t)|^{p}\mathrm{d}t+b\int_{-kT}^{kT}|u_{k}(t)|^{\mu}\mathrm{d}t\leqslant M(\int_{-kT}^{kT}|u_{k}(t)|^{\mu}\mathrm{d}t)^{1/\mu}+N(\int_{-kT}^{kT}|u_{k}(t)|^{\mu}\mathrm{d}t)^{\upsilon/\mu}, \quad (2.2)$$

其中 $M=(\int_{R}|f(t)|^{\mu/(\mu-1)}\mathrm{d}t)^{(\mu-1)/\mu}$，$N=(\int_{R}|a(t)|^{\mu/(\mu-\upsilon)}\mathrm{d}t)^{(\mu-\upsilon)/\mu}$.

**证明** 设 $C_{0}=\int_{0}^{T}F(t,0)\mathrm{d}t$.由条件(B2)′，(1.1)式和Hölder不等式，有

$$I_{k}(u)=\int_{-kT}^{kT}[\frac{1}{p}|\dot{u}(t)|^{p}+F(t,u(t))+(f_{k}(t),u(t))]\mathrm{d}t\geqslant\int_{-kT}^{kT}[\frac{1}{p}|\dot{u}(t)|^{p}+F(t,0)+b|u(t)|^{\mu}-a(t)|u(t)|^{\upsilon}+(f_{k}(t),u(t))]=\frac{1}{p}\int_{-kT}^{kT}|\dot{u}(t)|^{p}\mathrm{d}t+b\int_{-kT}^{kT}|u(t)|^{\mu}\mathrm{d}t-\int_{-kT}^{kT}a(t)|u(t)|^{\upsilon}\mathrm{d}t+\int_{-kT}^{kT}(f_{k}(t),u(t))\mathrm{d}t+2kC_{0}\geqslant\frac{1}{p}\int_{-kT}^{kT}|\dot{u}(t)|^{p}\mathrm{d}t+b\int_{-kT}^{kT}|u(t)|^{\mu}\mathrm{d}t-(\int_{-kT}^{kT}|f(t)|^{\mu/(\mu-1)}\mathrm{d}t)^{(\mu-1)/\mu}\cdot$$

$$(\int_{-kT}^{kT}|u(t)|^{\mu}dt)^{1/\mu}-(\int_{-kT}^{kT}|a(t)|^{\mu/(\mu-\upsilon)}dt)^{(\mu-\upsilon)/\mu}\cdot$$
$$(\int_{-kT}^{kT}|u(t)|^{\mu}dt)^{\upsilon/\mu}+2kC_0=\frac{1}{p}\int_{-kT}^{kT}|\dot{u}(t)|^{p}dt+$$
$$b\int_{-kT}^{kT}|u(t)|^{\mu}dt-M(\int_{-kT}^{kT}|u(t)|^{\mu}dt)^{1/\mu}-$$
$$N(\int_{-kT}^{kT}|u(t)|^{\mu}dt)^{\upsilon/\mu}+2kC_0. \qquad (2.3)$$

注意到

$$\frac{b}{4}x^{\mu}-Mx\geqslant-\frac{b}{4}(\mu-1)(\frac{4M}{b\mu})^{\mu/(\mu-1)}:=-D_1,$$

$\forall x\in[0,+\infty)$,

$$\frac{b}{4}x^{\mu/\upsilon}-Nx\geqslant-\frac{b}{4}(\frac{\mu}{\upsilon}-1)(\frac{4\upsilon M}{b\mu})^{\mu/(\mu-\upsilon)}:=$$

$-D_2,\forall x\in[0,+\infty)$.

由(2.3)式可得

$$I_k(u)\geqslant\frac{1}{p}\int_{-kT}^{kT}|\dot{u}(t)|^{p}dt+\frac{b}{2}\int_{-kT}^{kT}|u(t)|^{\mu}dt-$$
$$D_1-D_2+2kC_0. \qquad (2.4)$$

令 $\bar{u}=\frac{1}{2kT}\int_{-kT}^{kT}u(t)dt,\tilde{u}(t)=u(t)-\bar{u}$. 则由 Sobolev 不等式,有

$$\|\tilde{u}\|_{L^p_{2kT}}\leqslant C_1(\int_{-kT}^{kT}|\dot{u}(t)|^{p}dt)^{1/p},\|\tilde{u}\|_{L^{\infty}_{2kT}}\leqslant$$
$$C_2(\int_{-kT}^{kT}|\dot{u}(t)|^{p}dt)^{1/p}. \qquad (2.5)$$

由(2.5)式,对每个 $k\in N$,容易验证以下条件等价:

(i) $\|u\|_{E_k}\to\infty$;

(ii) $|\bar{u}|^{p}+\int_{-kT}^{kT}|\dot{u}(t)|^{p}dt\to\infty$;

(iii) $\int_{-kT}^{kT}|\dot{u}(t)|^{p}dt+\frac{b}{2}\int_{-kT}^{kT}|u(t)|^{\mu}dt\to\infty$.

因此,由(2.4)式,有 $I_k(u)\to+\infty$, $\|u\|_{E_k}\to\infty$. 由文献[14]中的定理 1.1 和推论 1.1 知,对每个 $k\in N$,存在 $u_k\in E_k$ 使得 $I_k(u_k)=\inf_{u\in E_k}I_k(u)$. 因为 $I_k(0)=\int_{-kT}^{kT}F(t,0)dt=2kC_0$,所以 $I_k(u_k)\leqslant 2kC_0$. 再由(2.3)式可知

$$\frac{1}{p}\int_{-kT}^{kT}|\dot{u}_k(t)|^{p}dt+b\int_{-kT}^{kT}|u_k(t)|^{\mu}dt\leqslant$$
$$M(\int_{-kT}^{kT}|u_k(t)|^{\mu}dt)^{1/\mu}+N(\int_{-kT}^{kT}|u_k(t)|^{\mu}dt)^{\upsilon/\mu},$$

所以(2.2)式成立.

**命题 2.2** 设 $u_k\in E_k$ 是系统(2.1)满足(2.2)式的解,$k\in N$. 则存在与 $k$ 无关的正常数 $C$ 使得

$$\|u_k\|_{L^{\infty}_{[-kT,kT]}}\leqslant C,k\in N. \qquad (2.6)$$

**证明** 由(2.2)式,有

$$b\int_{-kT}^{kT}|u_k(t)|^{\mu}dt\leqslant M(\int_{-kT}^{kT}|u_k(t)|^{\mu}dt)^{1/\mu}+$$
$$N(\int_{-kT}^{kT}|u_k(t)|^{\mu}dt)^{\upsilon/\mu},$$

说明存在常数 $M_1>0$ 使得

$$\int_{-kT}^{kT}|u_k(t)|^{\mu}dt\leqslant M_1. \qquad (2.7)$$

由(2.2)式和(2.7)式可知

$$\int_{-kT}^{kT}|u_k(t)|^{p}dt\leqslant pMM_1^{1/\mu}+pNM_1^{\upsilon/\mu}. \qquad (2.8)$$

再联合(1.3)式和(2.7)式可得

$$\|u_k\|_{L^{\infty}_{[-kT,kT]}}\leqslant T^{-1/\mu}(\int_{-kT}^{kT}|u_k(t)|^{\mu}dt)^{1/\mu}+$$
$$T^{(p-1)/p}(\int_{-kT}^{kT}|\dot{u}_k(t)|^{p}dt)^{1/p}\leqslant T^{-1/\mu}M_1{}^{1/\mu}+$$
$$T^{(p-1)/p}(pMM_1{}^{1/\mu}+pNM_1{}^{\upsilon/\mu})^{1/p}:=C,$$

所以(2.6)式成立.

**命题 2.3** 设 $u_k\in E_k$ 是系统(2.1)满足(2.2)式的解,$k\in N$. 则在 $C^1_{loc}(R,R^n)$ 中,存在 $u_k\in E_k$ 的一个子列 $u_{k_j}$ 收敛于 $u_0\in C^1(R,R^n)$.

**证明** 由命题 2.2 知道 $\{u_k\}_{k\in N}\in E_k$ 是一致有界序列. 对每个 $t\in[-kT,kT]$,因为 $u_k(t)$ 是系统(2.1)的 $2kT$-周期解,所以

$$\frac{d}{dt}(|\dot{u}_k(t)|^{p-2}\dot{u}_k(t))=\nabla F(t,u_k(t))+f_k(t). \qquad (2.9)$$

由(2.6)式,(2.9)式,条件(A1)和(B4),有

$$|\frac{d}{dt}(|\dot{u}_k(t)|^{p-2}\dot{u}_k(t))|\leqslant|\nabla F(t,u_k(t))|+$$
$$|f_k(t)|\leqslant\sup_{(t,x)\in[0,T]\times[-C,C]}|\nabla F(t,x)|+$$
$$\sup_{t\in R}|f(t)|:=M_2,t\in[-kT,kT],$$

因此,

$$\|\frac{d}{dt}(|\dot{u}(t)|^{p-2}\dot{u}(t))\|_{L^{\infty}_{[-kT,kT]}}\leqslant M_2,k\in N. \qquad (2.10)$$

对 $i=-k,-k+1,\cdots,k-1$,由 $\dot{u}_k(t)$ 的连续性,取 $t_{ki}\in[iT,(i+1)T]$ 使得

$$\dot{u}_k(t_{ki})=\frac{1}{T}\int_{iT}^{(i+1)T}\dot{u}_k(s)ds=T^{-1}[u_k((i+1)T)-$$
$$u_k(iT)],$$

由 $t\in[iT,(i+1)T]$，$i=-k,-k+1,\cdots,k-1$，可得

$$\| \dot{u}_k(t)|^{p-2}\dot{u}_k(t)| = |\int_{t_{ki}}^{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(|\dot{u}_k(s)|^{p-2}\dot{u}_k(s))\mathrm{d}s + |\dot{u}_k(t_{ki})|^{p-2}\dot{u}_k(t_{ki})| \leqslant \int_{iT}^{(i+1)T}|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(|\dot{u}_k(s)|^{p-2}\dot{u}_k(s))|\mathrm{d}s + |\dot{u}_k(t_{ki})|^{p-1} \leqslant M_2T+[T^{-1}|u_k((i+1)T)-u_k(iT)|]^{p-1}\leqslant M_2T+(2T^{-1}C)^{p-1}\equiv M_3^{p-1}.$$

因此，有

$$\|\dot{u}_k\|_{L^{\infty}_{[-kT,kT]}}\leqslant M_3, k\in N.$$

再证 $\{\dot{u}_k(t)\}_{k\in N}$ 也是等度连续的. 否则，存在 $\varepsilon_0>0$，序列 $\{t_i^1\}_{i\in N}$，$\{t_i^2\}_{i\in N}$ 以及整数序列 $\{k_i\}_{i\in N}$ 使得

$$0<t_i^2-t_i^1<\frac{1}{i}, |\dot{u}_{k_i}(t_i^2)-\dot{u}_{k_i}(t_i^1)|\geqslant\varepsilon_0, i\in N. \tag{2.11}$$

注意到 $\dot{u}_{k_i}(t_i^1)$，$\dot{u}_{k_i}(t_i^2)\in R^n$ 和 $|\dot{u}_{k_i}(t_i^1)|\leqslant M_3$，因此有 $|\dot{u}_{k_i}(t_i^2)|\leqslant M_3$. 为证必要性，设存在以下两个收敛子列

$$\dot{u}_{k_i}(t_i^1)\to w_1 \text{ 和 } \dot{u}_{k_i}(t_i^2)\to w_2, i\to\infty. \tag{2.12}$$

联合(2.11)式和(2.12)式，可得

$$|w_2-w_1|\geqslant\varepsilon_0. \tag{2.13}$$

又由(2.10)式和(2.11)式，有

$$\| \dot{u}_{k_i}(t_i^2)|^{p-2}\dot{u}_{k_i}(t_i^2)-|\dot{u}_{k_i}(t_i^1)|^{p-2}\dot{u}_{k_i}(t_i^1)| = |\int_{t_i^2}^{t_i^1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\dot{u}_{k_i}(t)|^{p-2}\dot{u}_{k_i}(t))\mathrm{d}t| \leqslant \int_{t_i^1}^{t_i^2}|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\dot{u}_{k_i}(t)|^{p-2}\dot{u}_{k_i}(t))|\mathrm{d}t\leqslant M_2(t_i^2-t_i^1)\leqslant\frac{M_2}{i}.$$

由(2.12)式可知 $\| w_2|^{p-2}w_2-|w_1|^{p-2}w_1|=0$，$i\to\infty$，因此 $w_1=w_2$，与(2.13)式矛盾. 因此，$\{\dot{u}_k(t)\}_{k\in N}$ 是等度连续的，所以，由 Arzela-Ascoli 引理可知 $\{u_k\}_{k\in N}$ 在 $C^1_{\mathrm{loc}}(R,R^n)$ 中有一个收敛子列 $\{u_{k_j}\}$.

**命题 2.4** 设 $u_0\in C^1(R,R^n)$ 如命题 2.3 中所定义的一样. 则 $u_0$ 是系统(0.1)的一个解，使得 $u_0(t)\to 0$，$\dot{u}_0(t)\to 0$，$t\to\pm\infty$.

**证明** 首先证明 $u_0(t)$ 满足系统(0.1). 由命题 2.1 和命题 2.3 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\dot{u}_{k_j}(t)|^{p-2}\dot{u}_{k_j}(t))\dot{u}_{k_j}(t)=\nabla F(t,u_{k_j}(t))+f_{k_j}(t), t\in[-k_jT,k_jT], j\in N.$$

取 $a,b\in R$ 使得 $a<b$. 存在 $j_0\in N$ 使得对所有的 $j>j_0$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\dot{u}_{k_j}(t)|^{p-2}\dot{u}_{k_j}(t))\dot{u}_{k_j}(t)=\nabla F(t,u_{k_j}(t))+f_{k_j}(t), t\in[a,b]. \tag{2.14}$$

由 $a$ 到 $t\in[a,b]$ 对(2.14)式积分，有

$$|\dot{u}_{k_j}(t)|^{p-2}\dot{u}_{k_j}(t)-|\dot{u}_{k_j}(a)|^{p-2}\dot{u}_{k_j}(a)=\int_a^t[\nabla F(t,u_{k_j}(s))+f_{k_j}(s)]\mathrm{d}s, t\in[a,b]. \tag{2.15}$$

由命题 2.3，在 $[a,b]$ 上，当 $j\to\infty$ 时，$u_{k_j}\to u_0$ 和 $\dot{u}_{k_j}\to\dot{u}_0$ 都是一致的. 在(2.15)式中，令 $j\to\infty$，有

$$|\dot{u}_0(t)|^{p-2}\dot{u}_0(t)-|\dot{u}_0(a)|^{p-2}\dot{u}_0(a)=\int_a^t[\nabla F(t,u_0(s))+f(s)]\mathrm{d}s, t\in[a,b]. \tag{2.16}$$

又因为 $a$ 和 $b$ 都是任意的，所以由(2.16)式知 $u_0(t)$ 是系统(0.1)的一个解.

再证明 $u_0(t)\to 0$，$t\to\pm\infty$. 由(2.7)式和(2.8)式，对每个 $i\in N$，存在 $j_i\in N$ 使得对所有的 $j>j_i$，有

$$\int_{-iT}^{iT}[|u_{k_j}(t)|^{\mu}+|\dot{u}_{k_j}(t)|^{p}]\mathrm{d}t\leqslant\int_{-k_jT}^{k_jT}[|u_{k_j}(t)|^{\mu}+|\dot{u}_{k_j}(t)|^{p}]\mathrm{d}t\leqslant M_1+pMM_1^{1/\mu}+pNM_1^{\nu/\mu}:=M_4.$$

令 $j\to+\infty$，有

$$\int_{-iT}^{iT}[|u_0(t)|^{\mu}+|\dot{u}_0(t)|^{p}]\mathrm{d}t\leqslant M_4,$$

因此，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[|u_0(t)|^{\mu}+|\dot{u}_0(t)|^{p}]\mathrm{d}t=\lim_{i\to\infty}\int_{-iT}^{iT}[|u_0(t)|^{\mu}+|\dot{u}_0(t)|^{p}]\mathrm{d}t=\lim_{i\to\infty}\lim_{j\to\infty}\int_{-iT}^{iT}[|u_{k_j}(t)|^{\mu}+|\dot{u}_{k_j}(t)|^{p}]\mathrm{d}t\leqslant M_4. \tag{2.17}$$

所以

$$\int_{|t|\geqslant r}[|u_0(t)|^{\mu}+|\dot{u}_0(t)|^{p}]\mathrm{d}t\to 0, r\to\infty. \tag{2.18}$$

由(1.2)式，有

$$|u_0(t)|\leqslant 2^{-1/\mu}(\int_{t-1}^{t+1}|u_0(s)|^{\mu}\mathrm{d}s)^{1/\mu}+$$

$$2^{-1/p}\left(\int_{t-1}^{t+1}|\dot{u}_0(s)|^p ds\right)^{1/p}, \quad (2.19)$$

联合(2.18)式和(2.19)式,有 $u_0(t)\to 0, t\to\pm\infty$.

最后,证明

$$\dot{u}_0(t)\to 0, t\to\pm\infty. \quad (2.20)$$

由(2.6)式和命题2.3,有 $|u_0(t)|\leqslant C, t\in R$. 再联合系统(0.1),条件(A1)和(B4),有

$$\left|\frac{d}{dt}(|\dot{u}_0(t)|^{p-2}\dot{u}_0(t))\right|\leqslant|\nabla F(t,u_0(t))|+|f(t)|\leqslant\sup_{(t,x)\in[0,T]\times[-C,C]}|\nabla F(t,x)|+\sup_{t\in R}|f(t)|\equiv M_2.$$

若 $\dot{u}_0(t)\nrightarrow 0, t\to\pm\infty$,则存在 $\varepsilon_1\in(0,1/p)$ 和序列 $\{t_k\}$ 使得

$$|t_1|<|t_2|<|t_3|,\cdots,|t_k|+1<|t_{k+1}|, k\in N,$$

$$|\dot{u}_0(t)|\geqslant(2\varepsilon_1)^{1/(p-1)}, k\in N.$$

因此,对 $t\in[t_k, t_k+\varepsilon_1/(1+M_2)]$,有

$$|\dot{u}_0(t)|^{p-1}=\||\dot{u}_0(t_k)|^{p-2}\dot{u}_0(t_k)+\int_{t_k}^{t}\frac{d}{ds}(|\dot{u}_0(s)|^{p-2}\dot{u}_0(s))ds|\geqslant|\dot{u}_0(t_k)|^{p-1}-\int_{t_k}^{t}\left|\frac{d}{ds}(|\dot{u}_0(s)|^{p-2}\dot{u}_0(s))\right|ds\geqslant\varepsilon_1.$$

这表明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\dot{u}_0(t)|^p dt\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_{t_k}^{t_k+\varepsilon_1/(1+M_2)}|\dot{u}_0(t)|^p dt=\infty,$$

与(2.17)式矛盾,因此(2.20)式成立.

**参考文献:**


[1] Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste[J]. Gauthier-Villars, Pairs, 1897-1899.

[2] Caldiroli P, Montecchiari P. Homoclinic orbits for second order Hamiltonian systems with potential changing sign [J]. J Comm Appl Nonlinear Anal, 1994, 1(2): 97-129.

[3] Coti-Zelati V, Ekeland I, Sere E. A variational approach to homoclinic orbits in Hamiltonian systems[J]. Math Ann, 1990, 288(1): 133-160.

[4] Carriāo P C, Miyagaki O H. Existence of homoclinic solutions for a class of time-dependent Hamiltonian systems[J]. J Math Anal Appl, 1999, 230: 157-172.

[5] Ding Y H, Girardi M. Periodic and homoclinic solutions to a class of Hamiltonian systems with the potentials changing sign[J]. Dynam Systems Appl, 1993, 2(1): 131-145.

[6] Ding Y H. Existence and multiplicity results for homoclinic solutions to a class of Hamiltonian systems[J]. Nonlinear Anal, 1995, 25(11): 1095-1113.

[7] Ding Y H, Lee C. Homoclinics for asymptotically quadratic and superquadratic Hamiltonian systems[J]. Nonlinear Anal, 2009, 71(5～6): 1395-1413.

[8] Izydorek M, Janczewska J. Homoclinic solutions for a class of second order Hamiltonian systems[J]. J Differential Equations, 2005, 219(2): 375-389.

[9] Izydorek M, Janczewska J. Homoclinic solutions for nonautonomous second-order Hamiltonian systems with a coercive potential[J]. J Math Anal Appl, 2007, 335(2): 1119-1127.

[10] Alves C O, Carriao P C, Miyagaki O H. Existence of homoclinic orbits for asymptotically periodic system involving Duffing-like equation[J]. Appl Math Lett, 2003, 16(5): 639-642.

[11] Lv X, Lu S P, Yan P. Existence of homoclinic solutions for a class of second-order Hamiltonian systems[J]. Nonlinear Anal, 2010, 72(1): 390-398.

[12] Lv X, Lu S P, Yan P. Homoclinic solutions for nonautonomous second-order Hamiltonian systems with a coercive potential[J]. Nonlinear Anal, 2010, 72(7～8): 3484-3490.

[13] Mawhin J, Willem M. Critical point theory and Hamiltonian systems[M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

[14] Zhang Q Y, Liu C G. Infinitely many homoclinic solutions for second order Hamiltonian systems[J]. Nonlinear Anal, 2010, 72(2): 894-903.

[15] Rabinowitz P H. Periodic and heteroclinic orbits for a periodic Hamiltonian systems[J]. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 1989, 6(5): 331-346.

[16] Rabinowitz P H. Homoclinic orbits for a class of Hamiltonian systems[J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 1990, 114 (1～2): 33-38.

[17] Rabinowitz P H, Tanaka K. Some results on connecting orbits for a class of Hamiltonian systems[J]. Math Z, 1991, 206(3): 473-499.

[18] Séré E. Existence of infinitely many homoclinic orbits in Hamiltonian systems[J]. Math Z, 1992, 209(1): 27-42.

[19] Tang X H, Xiao L. Homoclinic solutions for nonautonomous second-order Hamiltonian systems with a coercive potential[J]. J Math Anal Appl, 2009, 351(2): 586-594.

[20] Tang X H, Xiao L. Homoclinic solutions for ordinary p-Laplacian systems with a coercive potential[J]. Nonlinear Anal, 2009, 71(3～4): 1124-1132.


(责任编辑:尹　闯)