DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2012.03.022

广西科学 Guangxi Sciences 2012,19(3):234～235

一个离散型随机变量数学期望的计算*

Calculation of Mathematical Expectation for a Discrete Random Variable

邓春亮

DEND Chun-liang

(嘉应学院数学学院,广东梅州 514015)

(College of Mathematics,Jiaying University,Meigzhou,Guangdong,514015,China)

摘要:分别用定义法和随机变量和式分解法计算得到一个离散型随机变量的数学期望. 其中,定义法计算过程步骤多,公式的转化和运算灵活,而随机变量和式分解法利用变量分解技巧,降低了计算难度.

关键词:随机变量 数学期望 定义法 随机变量和式分解法

中图法分类号:O212.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2012)03-0234-02

Abstract:The mathematical expectation for a discrete random variable was calculated by means of both the defined method and the sum of random variables decomposition. During the calculation process, the defined method has many steps, and the transformation of the formula and computation are flexible, while the sum of random variables decomposition reduces the computational difficulty by using the variable decomposition technique.

Key words:andom variable,mathematical expectation,defined method,the sum of random variables decomposition

随机变量的分布列或者分布函数能够全面地反映随机变量的统计规律. 数学期望是随机变量的一个重要的数字特征,又称为期望或均值,是简单算术平均的一种推广,是随机变量按概率为权的加权平均,是反映随机变量总体取值平均水平的一个重要数字特征. 表征数学期望概率分布的中心位置,也是概率论中的一个重要的课题. 关于数学期望的计算方法很多,有定义法、利用常见分布结果法、递推法、随机变量和式分解法、对称式法和特征函数法等,其中最基本的是定义法,也是常规使用的方法. 而使用定义法,有时计算又会比较麻烦,因此有必要寻求更简便的方法. 本文对文献[1]中的一个数学期望问题进行讨论,用定义法和随机变量和式分解法给出该问题的结果. 并分析了计算过程.

1 预备知识

定义 1[1] 设离散型随机变量 ξ 的分布律为 $P(\xi = x_i) = p_i, i = 0,1,2,\cdots$. 若 $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i| p_i < +\infty$,则称随机变量 ξ 的数学期望存在,记为 $E\xi$,且 $E\xi = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$.

结论 1[1] 设负整数随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi$ 存在,则 $E\xi = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\xi \geqslant n)$.

定义 2[1] 设在一个伯努利试验中,每次试验成功的概率为 $p, p > 0$,失败的概率为 $1-p$,则试验进行到第 ξ 次才出现成功的概率分布列为 $P(\xi = k) = (1-p)^{k-1} p, k = 1,2,\cdots$,那么称 ξ 的分布为几何分布,记为 $\xi \sim \mathrm{Ge}(p)$.

若 $\xi \sim \mathrm{Ge}(p)$,由数学期望定义,并借助错位相减(初等方法)或者级数逐项求导和求和(高等方法)可得 $E\xi = \frac{1}{P}$.

问题[1] 从一个装有 m 个白球和 n 个黑球的袋中逐一摸球,直至摸到白球时为止. 求取出黑球数的数学期望.

设 ξ 为取出的黑球数. 上述问题没有说明摸球是放回还是不放回,因此需要考虑摸球放回与不放回的情形.

收稿日期:2012-04-07

作者简介:邓春亮(1984-),女,助教,硕士,从事广义线性模型理论及应用的研究。

*嘉应学院自然科学研究项目资助。

2 离散型随机变量数学期望的计算

2.1 有放回摸球

此时问题比较简单,文献[2]利用结论 1 得 $E\xi=\frac{n}{m}$,但这里 ξ 并不服从几何分布. 因为不放回情形下, ξ 的分布列为

$$P(\xi=k)=(\frac{n}{m+n})^k\frac{m}{m+n},k=0,1,2,\cdots$$

从几何分布的特点可以发现, ξ 的分布列中 $\frac{n}{m+n}$ 的次数并非几何分布中的 $1-k$ 次, k 的取值也不是从 1 开始. 因此 ξ 并非服从几何分布. 然而 $\frac{n}{m+n}$ 的次数是 k ,比几何分布中的次数多一次, k 的取值也比几何分布多一个 0. 通过分析发现 $\xi+1$ 才服从几何分布,即 $\xi+1\sim \mathrm{Ge}(\frac{m}{m+n})$. 因此由几何分布的数学期望知

$$E(\xi+1)=\frac{1}{\frac{m}{m+n}}=\frac{m+n}{m}.$$

由数学期望的性质知 $E(\xi+1)=E(\xi)+1$,于是

$$E(\xi)=E(\xi+1)-1=\frac{m+n}{m}-1=\frac{n}{m}.$$

注 1 这里通过随机变量的灵活变换,使得变换后的随机变量服从已知的常见的分布,再借助已知分布数学期望的结果来求目标变量数学期望. 该方法省去了复杂的计算过程.

2.2 不放回摸球

文献[3]对此情形给出了两种解法:一种方法是数学归纳法,另一种是利用一个多项式函数来处理. 以下是本文给出的两种解法.

2.2.1 定义法

设 ξ 为取出的黑球数,则 ξ 只能取 $0,1,\cdots,n$ 共 $n+1$ 个值. 通过分析,不难得到随机变量 ξ 的概率分布列为

$$P(\xi=k)=\frac{n}{m+n}\frac{n-1}{m+n-1}\frac{n-2}{m+n-2}\cdots\frac{n-k+1}{m+n-k+1}\frac{m}{m+n-k},k=0,1,\cdots,n.$$

由数学期望的定义知 ξ 的数学期望为

$$E(\xi)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot P(\xi=k)=\sum_{k=0}^{n}k\frac{n}{m+n}\cdot\frac{n-1}{m+n-1}\frac{n-2}{m+n-2}\cdots\frac{n-k+1}{m+n-k+1}\frac{m}{m+n-k}. \tag{1}$$

这是一个有限项和的计算,其中每一个都有多个因子相乘. 这个求和过程比较复杂,其详细的求解过程如下.

$$E(\xi)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot P(\xi=k)=\sum_{k=0}^{n}k\frac{n}{m+n}\cdot\frac{n-1}{m+n-1}\frac{n-2}{m+n-2}\cdots\frac{n-k+1}{m+n-k+1}\cdot\frac{m}{m+n-k}=\sum_{k=0}^{n}k\frac{m}{(m+n-k)}\frac{C_n^k}{C_{m+n}^k}=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{mn}{m+n}\frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_{m+n-1}^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{mn}{(m+n)}\frac{C_n^k-C_{n-1}^k}{C_{m+n-1}^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{mn}{(m+n)}(\frac{C_n^k}{C_{m+n-1}^k}-\frac{C_{n-1}^k}{C_{m+n-1}^k})=\sum_{k=0}^{n}\frac{mn}{(m+n)}\cdot(\frac{C_{m-1+(n-k)}^{n-k}}{C_{m+n-1}^n}-\frac{C_{m+n-1-k}^{n-1-k}}{C_{m+n-1}^{n-1}})=\frac{mn}{(m+n)}\cdot$$

$$(\frac{1}{C_{m+n-1}^n}\sum_{k=0}^{n}C_{m-1+(n-k)}^{n-k}-\frac{1}{C_{m+n-1}^{n-1}}\sum_{k=0}^{n}C_{m+n-1-k}^{n-1-k})=\frac{mn}{(m+n)}(\frac{1}{C_{m+n-1}^n}\sum_{i=0}^{n}C_{m-1+i}^{i}-\frac{1}{C_{m+n-1}^{n-1}}\sum_{j=0}^{n-1}C_{m+j}^{j})=$$

$$\frac{mn}{(m+n)}(\frac{C_{m+n}^n}{C_{m+n-1}^n}-\frac{C_{m+n}^{n-1}}{C_{m+n-1}^{n-1}})=\frac{mn}{(m+n)}(\frac{m+n}{m}-\frac{m+n}{m+1})=\frac{n}{m+1}.$$

其中在倒数第 3 个等号前,令 $i=n-k,j=(n-1)-k$.

注 2 定义法计算的整个过程步骤多,用到了很多组合恒等式,公式的转化和运算相当灵活.

2.2.2 随机变量和式分解法

为方便讨论,先将所有的黑球进行编号,因此有 $1,2,3,\cdots,n$ 号黑球. 令

$$\xi_i=\begin{cases}1,\text{第 } i \text{ 号黑球取出在全部 } m \text{ 个白球之前},\\0,\text{第 } i \text{ 号黑球非取出在全部 } m \text{ 个白球之前},\end{cases}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$. 值得注意的是这里 n 个随机变量 ξ_i 不是相互独立的,但是仍然有 $\xi=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$,而 $P(\xi_i=1)=\frac{1}{m+1}$,于是由期望性质有

$$E\xi=E(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)=\sum_{i=1}^{n}E\xi_i=\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i=1)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m+1}=\frac{n}{m+1}.$$

注 3 随机变量和式解法利用变量分解技巧,大大降低了问题的难度,容易得到结论. 事实上,很多的问题,如几何分布,二项分布,巴斯卡分布和匹配等,都可以借助随机变量的分解和数学期望的性质来计算数学期望或方差.

参考文献:

[1] 魏宗舒. 概率论与数理统计教程[M]. 第 2 版. 北京:高等教育出版社,2008:80-101.

[2] 刘成. 随机变量数学期望的解法新探[J]. 赤峰学院学报,2009,25(3):6-8.

[3] 张福阁,杜志涛. 一个随机变量数学期望的计算[J]. 高师理科学刊,2005,8(3):12-13.

(责任编辑:尹 闯)