DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2012.04.016

随机利率模型下 Black-Scholes 方程的 Dirichlet 问题解的存在性

The Existence of the Solution for the Dirichlet Problem of Black-Scholes Equation in Stochastic Interest Rate Modeling

贾丽君
JIA Li-jun

(广西建设职业技术学院,广西南宁 530003)
(Guangxi Polytechnic of Construction,Nanning,Guangxi,530003,China)

摘要:在传统 Black-Scholes 期权定价模型的基础上,进一步考虑随机利率模型. 根据一个自治常微分方程的解的存在性结果,利用上下解方法得到随机利率模型下 Black-Scholes 方程的 Dirichlet 问题的解存在的一个条件.

关键词:期权定价 Black-Scholes 方程 Dirichlet 问题 上下解

中图法分类号:O175.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2012)04-0306-03

Abstract:Based on the classical Black-Scholes option pricing model,this paper further considers the stochastic interest rate case. According to the result about the existence of the solution of an autonomy ordinary differential equation,we obtain an existence condition for the solution of the Black-Scholes Dirichlet problem with stochastic interest rate using sub-supsolution method.

Key words:option pricing,Black-Scholes equation,Dirichlet problem,sub-supsolution

期权是一种建立在标的资产上的衍生资产,这些资产可以是货币、股票等原生金融工具,也可以是其他实物资产,甚至可以是金融衍生工具本身. 期权按购入和销售原生资产可以分为看跌期权和看涨期权;按有关实施条款可以分为美式期权和欧式期权等. 随着现代金融市场的发展日新月异,期权定价作为数理金融的组成已都备受关注. 在 Black-Scholes 期权定价模型[1~6]提出以后,期权定价在金融资产定价研究中的运用就越来越广泛. 期权定价问题已经成为金融数学研究的核心问题之一,它涉及现代金融学的资产定价理论、投资组合理论、风险管理理论以及现代数学中的随机分析、优化理论等学科. 本文在传统 Black-Scholes 期权定价模型的基础上,进一步考虑随机利率模型,根据一个自治常微分方程解的存在性结果,利用上下解方法得到了随机利率模型下 Black-Scholes 方程的 Dirichlet 问题解存在的一个充分条件.

收稿日期:2012-05-07

作者简介:贾丽君(1983-),女,助教,主要从事计算数学研究。

1 Dirichlet 问题

根据文献[5]中的利率模型, 考虑随机过程

$$dS_t = S_t r_t dt + S_t \sigma_1 dW_t,$$

$$dr_t = a(\theta - r_t)dt + \sigma_2 dZ_t,$$

其中 W_t 和 Z_t 都是标准 Brown 运动,且 $\mathrm{Cov}(dW_t, dZ_t) = \rho dt$.

令 $u = u(S,r,t)$ 表示期权价格,则由 Δ-对冲原理可知 $u(S,r,t)$ 满足偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + \sigma_1\sigma_2\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + rS\frac{\partial u}{\partial S} + a(\theta - r)\frac{\partial u}{\partial r} - ru = 0,$$

其中 $r \in \mathbb{R}, S \in \mathbb{R}^+, t \in [0,T)$.

对于更一般的情形,设 Ω 是一个有界开区域,使得 $\bar{\Omega} \subset (]0,+\infty[)^2$,同时边界 $\partial\Omega$ 是 $C^{2,\lambda}(0<\lambda<1)$ 类的. 我们考虑 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} Lu = rf(u), \text{in } \Omega, \\ u(S,r) = \varphi(S,r), \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中

$$L=\frac{1}{2}\sigma_1^2S^2\frac{\partial^2}{\partial S^2}+\sigma_1\sigma_2\rho S\frac{\partial^2}{\partial S\partial r}+\frac{1}{2}\sigma_2^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}+$$

$$rS\frac{\partial}{\partial S}+a(\theta-r)\frac{\partial}{\partial r}.$$

作简单的变换即可知，当 $|\rho|<1$ 时，算子 L 是一致椭圆的.

2 Dirichlet 问题解的存在性

为解决 Dirichlet 问题，首先考虑自治常微分方程

$$\begin{cases}Au''+Bu'=rf(u),x\in[a,b],\\ u(a)=d,\\ u'(a)=0,\end{cases}\quad(2.1)$$

其中 $u=u(x),x\in[a,b]$，且 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 是 Hölder 连续函数，同时令 $F(s)=\int_0^s f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$. 事实上(2.1)式可以转化成等价形式

$$\begin{cases}(pu')'=qrf(u),\\ u(a)=d,\\ u'(a)=0,\end{cases}\quad(2.2)$$

其中 $p=e^{\frac{B}{A}x},q=\frac{1}{A}e^{\frac{B}{A}x}$. 易知，若 $A>0$，则 p、q 均为关于 x 的非负实函数. 若令

$p_{\min}=\min\limits_{x\in[a,b]}e^{\frac{B}{A}x},p_{\max}=\max\limits_{x\in[a,b]}e^{\frac{B}{A}x}$，相应的可以设 $q_{\min},q_{\max}$.

定理 1 令 $K\in\mathbb{R}^+$，若

$$\min_{s\in[0,K]}2\frac{F(K)-F(s)}{(K-s)^2}<\frac{A}{r(b-a)^2}e^{\frac{2B}{A}(a-b)},\quad(2.3)$$

则存在 $d\in(0,K)$，使得问题(2.1)有一个解 u，满足 $d\leqslant u(x)\leqslant K$ 且 $u'(x)\geqslant 0$.

证明 根据假设可以适当选取 $d\in\mathbb{R}$，使得 $0<d<K$ 时(2.3)式成立. 因为 $u(a)=d<K$，由连续性可知，存在 $\varepsilon>0$ 使得在 $[a,a+\varepsilon]$ 上，$u<K$.

令 $\delta=\sup\{x>a\mid u$ 在 $[a,x]$ 上满足 $u<K\}$，再考虑等价问题(2.2)，在 $[a,x]$ 上积分可得

$$u'(x)=\frac{r}{p(x)}\int_a^x q(\zeta)f(u(\zeta))\mathrm{d}\zeta.$$

则由前面的分析可知，对于任意的 $x\in[a,\delta]$，$u'(x)\geqslant 0$. 又由于 $u(a)=d>0$，则可知 $u(x)\geqslant d$.

当 $\delta\geqslant b$ 时，易证定理 1 成立.

假设 $\delta<b$，根据上面的结论可知，u 在 $[a,\delta]$ 上单调，那么由连续性可知

$$\lim_{x\to\delta^-}u(x)=K=:u(\delta).$$

又因为

$$\frac{1}{2}(pu')^2=\int_a^x pqrf(u)u'\mathrm{d}\zeta\leqslant$$

$$rp_{\max}q_{\max}\int_a^x f(u)u'\mathrm{d}\zeta=rp_{\max}q_{\max}(F(u(x))-F(d)),$$

且

$$\frac{1}{2}(pu')^2\geqslant\frac{1}{2}p_{\min}^2|u'(x)|^2,$$

所以

$$|u'(x)|^2\leqslant 2r\frac{p_{\max}q_{\max}}{p_{\min}^2}(F(u(x))-F(d)).$$

再由中值定理可知，存在 $\xi\in[a,\delta]$，使得 $u'(\xi)=\frac{k-d}{\delta-a}$，所以有

$$\left(\frac{k-d}{\delta-a}\right)^2\leqslant 2r\frac{p_{\max}q_{\max}}{p_{\min}^2}(F(K)-F(d)).$$

事实上，由于 $p_{\min}=e^{\frac{B}{A}a},p_{\max}=e^{\frac{B}{A}b},q_{\max}=\frac{1}{A}e^{\frac{B}{A}b}$，上式化简可得

$$2\frac{F(K)-F(d)}{(k-d)^2}\geqslant\frac{A}{r(b-a)^2}e^{\frac{2B}{A}(a-b)}.$$

这与假设矛盾，定理 1 成立.

假设原问题系数的置信区间为 $\sigma_1,\sigma_2\in I_\sigma=]\underline{\sigma},\bar{\sigma}[\subset\mathbb{R}^+$，且 $\rho\in I_\rho=]\rho_0,\rho_1[\subset[-1,1]$，同时设区域 Ω 在 S 轴上的映射为 $]S_0,S_1[\subset\mathbb{R}^+$，在 r 轴上的映射为 $]r_0,r_1[\subset\mathbb{R}^+$，即 $\Omega=]S_0,S_1[\times]r_0,r_1[\subset(\mathbb{R}^+)^2$. 如果 $\alpha\in C^{2,\lambda}(\bar{\Omega})$ 满足

$$\begin{cases}L\alpha\geqslant rf(\alpha)\quad\text{in }\Omega,\\ \alpha(S,r)\leqslant\varphi(S,r)\quad\text{on }\partial\Omega,\end{cases}$$

则称 α 是原问题的一个下解. 同样，β 称为原问题的一个上解，只需改变不等号的方向即可. 若能证明原问题的上下解存在且 $\alpha\leqslant\beta$，则可以证明原问题存在一个解 u，且满足 $\alpha\leqslant u\leqslant\beta$.

令 $\varphi_0=\min\limits_{\partial\Omega}\varphi(S,r),\varphi_\infty=\max\limits_{\partial\Omega}\varphi(S,r)$，则关于(2.1)式解的存在性有下面的结论.

定理 2 令 $K>\varphi_\infty$，

(1)若

$$\min_{s\in[0,\varphi_0]}2\frac{F(\varphi_0)-F(s)}{(\varphi_0-s)^2}<\upsilon_1=$$

$$\frac{1}{r}\max\left\{\frac{\sigma^2S_0^2}{2(S_1-S_0)^2},\frac{\sigma^2}{2(r_1-r_0)^2}e^{\frac{4a(\theta-r_1)}{\sigma^2}(r_1-r_0)}\right\},$$

则下解存在；

(2)若

$$\min_{s\in[\varphi_\infty,K]}2\frac{F(K)-F(s)}{(K-s)^2}<\upsilon_2=$$

$$\frac{1}{r}\max\{\frac{\bar{\sigma}^2S_1^2}{2(S_1-S_0)^2}e^{\frac{4ar_1}{\bar{\sigma}^2S_1}(S_1-S_0)},$$

$$\frac{\bar{\sigma}^2}{2(r_1-r_0)^2}e^{\frac{4a(\theta-r_0)}{\bar{\sigma}^2}(r_1-r_0)}\},$$

则上解存在.

(3)若(1),(2)同时成立,则原问题(1.1)存在一个解 u 满足 $0 \leqslant u \leqslant K$.

证明 首先证明下解的存在性.对 υ_1 进行分析:

(i)当 $\upsilon_1 = \frac{1}{r}\frac{\sigma^2 S_0^2}{2(S_1-S_0)^2}$ 时,令 $[a,b]=[S_1,S_0]$,此时解具有形式 $u(S)$;

(ii)当 $\upsilon_1 = \frac{1}{r}\frac{\bar{\sigma}^2}{2(r_1-r_0)^2}e^{\frac{4a(\theta-r_0)}{\bar{\sigma}^2}(r_1-r_0)}$ 时,令 $[a,b]=[r_1,r_0]$,此时解具有形式 $u(r)$.

两种情形的证明方法类似.对于(i),有

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2 S^2\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}+\sigma_1\sigma_2\rho S\frac{\partial^2 u}{\partial S\partial r}+\frac{1}{2}\sigma_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+rS\frac{\partial u}{\partial S}+a(\theta-r)\frac{\partial u}{\partial r}\geqslant\frac{1}{2}\sigma^2 S_0^2 u''(S).$$

令 $A=\frac{1}{2}\sigma^2 S_0^2$,$B=0$,当 $\min\limits_{s\in[0,\varphi_0]} 2\frac{F(\varphi_0)-F(s)}{(\varphi_0-s)^2} < \upsilon_1$ 时,存在 $d\in(0,\varphi_0)$,使得(1.1)式存在一个解 $u(S)=\alpha(S,r)$,且

$$\begin{cases}L\alpha(S,r)\geqslant rf(\alpha(S,r)),\text{in }\Omega,\\ \alpha(S,r)=d<\varphi_0\leqslant\varphi(S,r),\text{on }\partial\Omega.\end{cases}$$

事实上,此时 $\alpha(S,r)$ 是(1.1)式的一个下解.同理,对于(ii),有

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2 S^2\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}+\sigma_1\sigma_2\rho S\frac{\partial^2 u}{\partial S\partial r}+\frac{1}{2}\sigma_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+rS\frac{\partial u}{\partial S}+a(\theta-r)\frac{\partial u}{\partial r}\geqslant\frac{1}{2}\sigma^2 u''(r)+a(\theta-r_1)u''(r).$$

同样可证明,(1.1)式存在一个下解.

对于(2)用类似的方法可以证明,存在 $d'\in(\varphi_\infty,K)$,使得原问题存在一个上解,满足

$$\begin{cases}L\beta(S,r)\leqslant rf(\beta(S,r)),\text{in }\Omega,\\ \beta(S,r)=d'>\varphi_\infty\geqslant\varphi(S,r),\text{on }\Omega.\end{cases}$$

再由 $\alpha(S,r)\leqslant\beta(S,r)$ 可得,原问题(1.1)存在一个解 u 满足 $0\leqslant u\leqslant K$.

参考文献:

[1] Harrison J M,Kreps D M. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets[J]. Journal of Economic Theory,1979,20(3):318-408.

[2] Harrision J M,Pliska R. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading[J]. Stochastic Progresses and Their Applications,1981,11:215-260.

[3] Merton R C. Theory of rational option pricing[J]. Bell Journal of Economics and Management Science,1973,4(1):141-183.

[4] 姜礼尚.期权定价的数学模型和方法[M].第2版.北京:高等教育出版社,2008.

[5] 姜礼尚.金融衍生产品定价的数学模型与案例分析[M].北京:高等教育出版社,2008.

[6] 彭卫,党耀国. Black-Scholes 期权定价模型的优化[C].南京:江苏省系统工程学会第十一届学术年会,2010.

(责任编辑:尹 闯)

研究建立二噁英毒性强度毒代动力学模型

二噁英(Dioxin)又称二氧杂芑,是目前人类认识到的非有意合成,毒性最强的持久性有机污染物(POPs)。二噁英具有极强的亲脂性和生物难降解性,可以在环境中长时间稳定存在。通过生物聚集,二噁英会沿食物链富集到很高水平。人体摄入二噁英类污染物约90%以上是来自受环境污染的食物,其中主要是肉制品、乳制品、鱼类等动物源食品。二噁英类化合物污染食品事件屡有发生,往往带来巨大的社会不安和经济损失。最近,中国科学院城市环境研究所的研究人员,采用猪作为模型动物,研究二噁英类污染物在猪生长过程中消除的动力学规律。这项研究结果发现,猪随着自身的生长,体内脂肪中二噁英类污染物的绝对含量和相对含量均呈现明显下降趋势,据此,他们建立了基于二噁英毒性强度(TEF)的毒代动力学模型。基于二噁英毒性强度(TEF)的毒代动力学模型能够预测生猪屠宰期体内二噁英毒性(TEQ)的残留量,能够为食品安全预警机制提供很好的参考。

(据科学网)