DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2012.04.018

广西科学 Guangxi Sciences 2012,19(4):313～315,322

线性流形上次反对称矩阵的加权最小二乘解*

Weighted Least Square Solution of Anti-skew-symmetric Matrices on the Linear Manifold

张华珍,罗慧明,罗 恒
ZHANG Hua-zhen,LUO Hui-ming,LUO Heng

(湘西民族职业技术学院,湖南吉首 416000)
(National Vocational and Technical College in Xiangxi,Jishou,Hunan,416000,China)

摘要:利用矩阵的奇异值分解和矩阵对的广义奇异值分解,得到一类线性流形上次反对称矩阵在加权范数下的最小二乘解,导出解集合中与给定矩阵最佳逼近解的表达式.

关键词:加权最小二乘解 次反对称矩阵 奇异值分解 广义奇异值分解

中图法分类号:O241.6 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2012)04-0313-03

Abstract:The expressions of the weighted least squares solution of anti-skew-symmetric matrices on the linear manifold are derived by applying the singular value decomposition of a matrix and the generalized singular value decomposition (GSVD) of a matrix pair. In addition,the expressions of the optimal approximate is provided for the matrices.

Key words:weighted least-squares solution,anti-skew-symmetric matrices,singular value decomposition,GSVD

记 $R^{n\times m}$ 表示所有 $n\times m$ 阶实矩阵集合;$OR^{n\times n}$ 表示所有 n 阶正交矩阵集合;$ASR^{n\times n}$ 表示所有 n 阶实反对称矩阵集合;$SR_{+}^{n\times n}$ 表示所有 n 阶实对称正定矩阵集合;I_k 表示 k 阶单位矩阵;$S_n=(e_n,e_{n-1},\cdots,e_1)\in R^{n\times n}$,其中 $e_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示 I_n 的第 i 列;对于 $A=(a_{ij})_{n\times m}$ 和 $B=(b_{ij})_{n\times m}$,$A*B=(a_{ij}b_{ij})_{n\times m}$ 表示矩阵 A 与 B 的 Hadamard 积;A^{T},$\mathrm{rank}(A)$ 分别表示矩阵 A 的转置和 A 的秩;$\|\cdot\|$ 在无说明的情况下,均指 Frobenius 范数,同时对于 $W\in SR_{+}^{k\times k}$,定义矩阵 A 的加权范数为 $\|A\|_W=\|WA\|$.

设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$,若 A 的元素关于其次对角线对称,即 $a_{ij}=a_{n+1-j,n+1-i}$,$i,j=1,2,\cdots,n$,则称 A 为 n 阶次对称矩阵,并把所有 n 阶次对称矩阵的全体记为 $KSR^{n\times n}$. 若 A 的元素满足 $a_{ij}=-a_{n+1-j,n+1-i}$,$i,j=1,2,\cdots,n$,则称 A 为 n 阶次反对称矩阵,并把所有 n 阶次反对称矩阵[1] 的全体记为 $AKSR^{n\times n}$.

若设矩阵 $A_0,B_0\in R^{k\times n}$,可令

$$S=\{X\in AKSR^{n\times n}\mid f_0(X)=\|A_0X-B_0\|_W=\min\}. \tag{1}$$

对于矩阵方程在加权范数下的最小二乘解的研究到目前为止已取得了一些成果[2,3]. 本文在此基础上运用矩阵的奇异值分解和矩阵对的广义奇异值分解研究线性流形上矩阵方程 $X^{\mathrm{T}}AX=B$ 的加权最小二乘次反对称解.

1 加权最小二乘解问题

问题Ⅰ 给定矩阵 $A\in R^{n\times k}$,$B\in R^{k\times k}$,求 $X\in S$ 使得 $\|A^{\mathrm{T}}XA-B\|_W=\min$.

问题Ⅱ 给定 $\tilde{X}\in R^{n\times n}$,求 $X^*\in S_E$ 使得 $\|X^*-\tilde{X}\|=\min\limits_{X\in S_E}\|X-\tilde{X}\|$,其中 S_E 是问题Ⅰ的解集合.

2 问题Ⅰ的解

引理 1[2] 假定 $G\in R^{s\times s}$,$\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s)$,$\sigma_i>0$,$i=1,2,\cdots,s$,则存在唯一的 $M\in ASR^{s\times s}$,使得 $\|\Sigma M-G\|=\min$,且 $M=\Phi*(\Sigma G-G^{\mathrm{T}}\Sigma)$,

收稿日期:2012-03-21
修回日期:2012-05-21
作者简介:张华珍(1973-),女,讲师,硕士,主要从事基础数学矩阵论研究。
*湖南省高校科研基金项目(11C1261)资助。

其中 $\Phi = (\varphi_{ij}) \in SR^{s\times s}, \varphi_{ij} = \dfrac{1}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}, 1 \leqslant i, j \leqslant s$.

引理 2[2]　假定 $G \in R^{s\times s}, \Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_s), \sigma_i > 0, i = 1, 2, \cdots, s$,则存在唯一的 $M \in R^{s\times s}$,使得 $\| \Sigma M - G \| = \min$,且 $M = \Sigma^{-1} G$.

引理 3[4,5] 已知对角矩阵 $D_1 = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) > 0$, $D_2 = \mathrm{diag}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) > 0$,矩阵 $E = (e_{ij}) \in R^{n\times n}$,则问题 $\| D_1 G D_2 - E \|^2 = \min, G = (g_{ij}) \in ASR^{n\times n}$ 存在唯一解:$G = \dfrac{1}{2} \Psi * (D_1 E D_2 - D_2 E^{\mathrm{T}} D_1)$,其中 $\Psi = (\psi_{ij}), \psi_{ij} = \dfrac{1}{\alpha_i^2 \beta_j^2 + \alpha_j^2 \beta_i^2}, i, j = 1, 2, \cdots, n$.

设 $WA_0 S_n$ 的奇异值分解为

$$WA_0 S_n = U \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^{\mathrm{T}}, \tag{2}$$

其中 $U = (U_1, U_2) \in OR^{k\times k}, V = (V_1, V_2) \in OR^{n\times n}$, $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_t), \sigma_i > 0, i = 1, 2, \cdots, t, U_1 \in R^{k\times t}, V_1 \in R^{n\times t}, t = \mathrm{rank}(WA_0 S_n)$.

再记 $V^{\mathrm{T}} S_n X V = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ -X_{12}^{\mathrm{T}} & X_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} t \\ n-t \end{array} \\ \begin{array}{cc} t & n-t \end{array} & \end{array}, U^{\mathrm{T}} W B_0 V$

$$= \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} t \\ k-t \end{array} \\ \begin{array}{cc} t & n-t \end{array} & \end{array}. \tag{3}$$

定理 1　给定 $A_0, B_0 \in R^{k\times n}, W \in SR_+^{k\times k}$,若 $WA_0 S_n$ 的奇异值分解如(2)式所示,$V^{\mathrm{T}} S_n X V$ 和 $U^{\mathrm{T}} W B_0 V$ 的分块如(3)式所示,则(1)式中定义的 S 可以表示为

$$S = \{ X \mid X = S_n V \begin{pmatrix} \Phi * (\Sigma B_{11} - B_{11}^{\mathrm{T}} \Sigma) & \Sigma^{-1} B_{12} \\ -B_{12}^{\mathrm{T}} \Sigma^{-1} & X_{22} \end{pmatrix} V^{\mathrm{T}}, X_{22} \in ASR^{(n-t)\times(n-t)} \}. \tag{4}$$

证明　由于 $\| A_0 X - B \|_W^2 = \| WA_0 X - WB \|^2 = \| U \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^{\mathrm{T}} S_n X - WB \|^2 = \| \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^{\mathrm{T}} S_n X V - U^{\mathrm{T}} W B V \|^2 = \| \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ -X_{12}^{\mathrm{T}} & X_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \|^2 =$

$$\| \Sigma X_{11} - B_{11} \|^2 + \| \Sigma X_{12} - B_{12} \|^2 + \| -B_{21} \|^2 + \| -B_{22} \|^2, \tag{5}$$

而由(5)式可知 $f_0(X) = \| A_0 X - B_0 \|_W = \min$ 等价于

$$\| \Sigma X_{11} - B_{11} \| = \min, \| \Sigma X_{12} - B_{12} \| = \min. \tag{6}$$

再由引理 1,引理 2 和(6)式可知 $X_{11} = \Phi * (\Sigma B_{11} - B_{11}^{\mathrm{T}} \Sigma), X_{12} = \Sigma^{-1} B_{12}$,其中 $\Phi = (\varphi_{ij}) \in SR^{t\times t}, \varphi_{ij} = \dfrac{1}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}, 1 \leqslant i, j \leqslant t$. 将 X_{11}, X_{12} 代人(3)式即可得(4)式.

记 $WA^{\mathrm{T}} S_n V_2 = A_1, V_2^{\mathrm{T}} A = A_2$,矩阵对$(A_1^{\mathrm{T}}, A_2)$的广义奇异值分解为

$$A_1^{\mathrm{T}} = M \Sigma_1 P^{\mathrm{T}}, A_2 = M \Sigma_2 Q^{\mathrm{T}}, \tag{7}$$

其中 $M \in R^{(n-t)\times(n-t)}$ 为非奇异矩阵,$P, Q \in OR^{k\times k}$ 为正交矩阵,且

$$\Sigma_1 = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} I_l & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} l \\ m \\ h-l-m \\ n-t-h \end{array} \\ \begin{array}{ccc} l & m & k-l-m \end{array} & \end{array},$$

$$\Sigma_2 = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} O_2 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_{h-l-m} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} l \\ m \\ h-l-m \\ n-t-h \end{array} \\ \begin{array}{ccc} k+l-h & m & h-l-m \end{array} & \end{array},$$

$h = \mathrm{rank}(A_1^{\mathrm{T}}, A_2), l = h - \mathrm{rank}(A_2), m = \mathrm{rank}(A_1^{\mathrm{T}}) + \mathrm{rank}(A_2) - h, S_1 = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_m) > 0, S_2 = \mathrm{diag}(b_1, b_2, \cdots, b_m) > 0, O_1, O_2, O$ 均为零矩阵. 又记

$$X_0 = S_n V \begin{pmatrix} \Phi * (\Sigma B_{11} - B_{11}^{\mathrm{T}} \Sigma) & \Sigma^{-1} B_{12} \\ -B_{12}^{\mathrm{T}} \Sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix} V^{\mathrm{T}}, \tag{8}$$

$$M^{\mathrm{T}} X_{22} M = \begin{pmatrix} \bar{X}_{11} & \bar{X}_{12} & \bar{X}_{13} & \bar{X}_{14} \\ -\bar{X}_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{X}_{22} & \bar{X}_{23} & \bar{X}_{24} \\ -\bar{X}_{13}^{\mathrm{T}} & -\bar{X}_{23}^{\mathrm{T}} & \bar{X}_{33} & \bar{X}_{34} \\ -\bar{X}_{14}^{\mathrm{T}} & -\bar{X}_{24}^{\mathrm{T}} & -\bar{X}_{34}^{\mathrm{T}} & \bar{X}_{44} \end{pmatrix} \begin{array}{c} l \\ m \\ h-l-m \\ n-t-h \end{array}, \tag{9}$$

$$P^{\mathrm{T}} W (B - A^{\mathrm{T}} X_0 A) Q = \begin{pmatrix} \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & \bar{B}_{13} \\ \bar{B}_{21} & \bar{B}_{22} & \bar{B}_{23} \\ \bar{B}_{31} & \bar{B}_{32} & \bar{B}_{33} \end{pmatrix} \begin{array}{c} l \\ m \\ k-l-m \end{array}. \tag{10}$$

定理 2　给定矩阵 $A \in R^{n\times k}, B \in R^{k\times k}$,若矩阵对$(A_1^{\mathrm{T}}, A_2)$的广义奇异值分解如(7)式所示,$M^{\mathrm{T}} X_{22} M$ 和 $P^{\mathrm{T}} W (B - A^{\mathrm{T}} X_0 A) Q$ 分块分别为(9)式,(10)式所示,则问题 Ⅰ 的解集合为

$$S_E = \{ X \mid X = X_0 + S_n V_2 M^{-\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} \bar{X}_{11} & \bar{B}_{12} S_2^{-1} & \bar{B}_{13} & \bar{X}_{14} \\ -S_2^{-1} \bar{B}_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{X}_{22}^{*} & S_1^{-1} \bar{B}_{23} & \bar{X}_{24} \\ -\bar{B}_{13}^{\mathrm{T}} & -\bar{B}_{23}^{\mathrm{T}} S_1^{-1} & \bar{X}_{33} & \bar{X}_{34} \\ -\bar{B}_{14}^{\mathrm{T}} & -\bar{B}_{24}^{\mathrm{T}} & -\bar{B}_{34}^{\mathrm{T}} & \bar{X}_{44} \end{pmatrix} \cdot$$

$M^{-1}V_2^{\mathrm{T}}\}$, (11)

其中 $\bar{X}_{22}^{*} = \frac{1}{2}\Psi * (S_1\bar{B}_{22}S_2 - S_2\bar{B}_{22}^{\mathrm{T}}S_1)$，$\Psi = (\psi_{ij})$，$\psi_{ij} = \frac{1}{a_i^2b_j^2 + a_j^2b_i^2}$，$i,j = 1,2,\cdots,t$，$\bar{X}_{11},\bar{X}_{33},\bar{X}_{44}$ 为任意的反对称矩阵，$\bar{X}_{14},\bar{X}_{24},\bar{X}_{34}$ 为任意矩阵.

证明 对于 $\forall X \in S$，由定理 1 可知 $X = X_0 + S_nV_2X_{22}V_2^{\mathrm{T}}$，其中 X_0 如(8) 式所示，则有

$\| A^{\mathrm{T}}XA - B \|_W^2 = \| A^{\mathrm{T}}(X_0 + S_nV_2X_{22}V_2^{\mathrm{T}})A - B \|_W^2 = \| WA^{\mathrm{T}}S_nV_2X_{22}V_2^{\mathrm{T}}A - W(B - A^{\mathrm{T}}X_0A) \|^2 = \| \Sigma_1^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}X_{22}M\Sigma_2 - P^{\mathrm{T}}W(B - A^{\mathrm{T}}X_0A)Q \|^2 = \| -\bar{B}_{11} \|^2 + \| \bar{X}_{12}S_2 - \bar{B}_{12} \|^2 + \| \bar{X}_{13} - \bar{B}_{13} \|^2 + \| -\bar{B}_{21} \|^2 + \| S_1\bar{X}_{22}S_2 - \bar{B}_{22} \|^2 + \| S_1\bar{X}_{23} - \bar{B}_{23} \|^2 + \| -\bar{B}_{31} \|^2 + \| -\bar{B}_{32} \|^2 + \| -\bar{B}_{33} \|^2$. (12)

由(12) 式可知 $\| A^{\mathrm{T}}XA - B \|_W = \min$ 等价于 $\| \bar{X}_{12}S_2 - \bar{B}_{12} \| = \min$，$\| \bar{X}_{13} - \bar{B}_{13} \| = \min$，$\| S_1\bar{X}_{22}S_2 - \bar{B}_{22} \| = \min$，$\| S_1\bar{X}_{23} - \bar{B}_{23} \| = \min$，再由引理 2，引理 3 得出(11) 式.

3 问题 Ⅱ 的解

引理 4[1] 若 $R^{n\times n} = KSR^{n\times n} + AKSR^{n\times n}$，$\tilde{X} \in R^{n\times n}$，则存在唯一的 $\tilde{X}_1 \in KSR^{n\times n}$，$\tilde{X}_2 \in AKSR^{n\times n}$，使得 $\tilde{X} = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2$，其中 $\tilde{X}_1 = \frac{\tilde{X} + S_n\tilde{X}^{\mathrm{T}}S_n}{2}$，$\tilde{X}_2 = \frac{\tilde{X} - S_n\tilde{X}^{\mathrm{T}}S_n}{2}$，$(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2) = 0$.

引理 5[6] 设 $E = (e_{ij}) \in R^{n\times n}$，则存在唯一反对称矩阵 $G = (g_{ij}) \in ASR^{n\times n}$，使得 $g(G) = \| G - E \|^2 = \min$，$G = \frac{E - E^{\mathrm{T}}}{2}$.

定理 3 给定的符号与定理 2 相同. 由于 S_E 是一个闭凸集，因此问题 Ⅱ 存在最佳逼近解

$$X^* = X_0 + S_nV_2M^{-\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{C_{11} - C_{11}^{\mathrm{T}}}{2} & \bar{B}_{12}S_2^{-1} & \bar{B}_{13} & C_{14} \\ -S_2^{-1}\bar{B}_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{X}_{22}^{*} & S_1^{-1}\bar{B}_{23} & C_{24} \\ -\bar{B}_{13}^{\mathrm{T}} & -\bar{B}_{23}^{\mathrm{T}}S_1^{-1} & \frac{C_{33} - C_{33}^{\mathrm{T}}}{2} & C_{34} \\ -C_{14}^{\mathrm{T}} & -C_{24}^{\mathrm{T}} & -C_{34}^{\mathrm{T}} & \frac{C_{44} - C_{44}^{\mathrm{T}}}{2} \end{pmatrix} \cdot M^{-1}V_2^{\mathrm{T}}. \quad (13)$$

证明 由引理 4 可知，对 $\tilde{X} \in R^{n\times n}$，则存在唯一的 $\tilde{X}_1 \in KSR^{n\times n}$，$\tilde{X}_2 \in AKSR^{n\times n}$，使 $\tilde{X} = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2$，且 $\tilde{X}_2 = \frac{\tilde{X} - S_n\tilde{X}^{\mathrm{T}}S_n}{2}$.

由定理 2 可知，对于 $X \in S_E$，

$$X = X_0 + S_nV_2M^{-\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} \bar{X}_{11} & \bar{B}_{12}S_2^{-1} & \bar{B}_{13} & \bar{X}_{14} \\ -S_2^{-1}\bar{B}_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{X}_{22}^{*} & S_1^{-1}\bar{B}_{23} & \bar{X}_{24} \\ -\bar{B}_{13}^{\mathrm{T}} & -\bar{B}_{23}^{\mathrm{T}}S_1^{-1} & \bar{X}_{33} & \bar{X}_{34} \\ -\bar{X}_{14}^{\mathrm{T}} & -\bar{X}_{24}^{\mathrm{T}} & -X_{34}^{\mathrm{T}} & \bar{X}_{44} \end{pmatrix} \cdot M^{-1}V_2^{\mathrm{T}}. \quad (14)$$

再由正交矩阵的保范性，有

$\| X - \tilde{X} \|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \bar{X}_{11} & \bar{B}_{12}S_2^{-1} & \bar{B}_{13} & \bar{X}_{14} \\ -S_2^{-1}\bar{B}_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{X}_{22}^{*} & S_1^{-1}\bar{B}_{23} & \bar{X}_{24} \\ -\bar{B}_{13}^{\mathrm{T}} & -\bar{B}_{23}^{\mathrm{T}}S_1^{-1} & \bar{X}_{33} & \bar{X}_{34} \\ -\bar{X}_{14}^{\mathrm{T}} & -\bar{X}_{24}^{\mathrm{T}} & -\bar{X}_{34}^{\mathrm{T}} & \bar{X}_{44} \end{pmatrix} - M^{\mathrm{T}}V_2^{\mathrm{T}}S_n(\tilde{X}_2 - X_0)V_2M \right\|^2 \| M^2 \| + \| -V_1^{\mathrm{T}}S_n(\tilde{X}_2 - X_0)V_1 \|^2 + \| -V_1^{\mathrm{T}}S_n(\tilde{X}_2 - X_0)V_2 \|^2 + \| -V_2^{\mathrm{T}}S_n(\tilde{X}_2 - X_0)V_1 \|^2 + \| -\tilde{X}_1 \|^2$.

显然 $M^{\mathrm{T}}V_2^{\mathrm{T}}S_n(\tilde{X}_2 - X_0)V_2M$ 是反对称矩阵. 可令

$$M^{\mathrm{T}}V_2^{\mathrm{T}}S_n(\tilde{X}_2 - X_0)V_2M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ -C_{12}^{\mathrm{T}} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ -C_{13}^{\mathrm{T}} & -C_{23}^{\mathrm{T}} & C_{33} & C_{34} \\ -C_{14}^{\mathrm{T}} & -C_{24}^{\mathrm{T}} & -C_{34}^{\mathrm{T}} & C_{44} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} l \\ m \\ h-l-m \\ n-t-h \end{array},$$

则问题 $\| X - \tilde{X} \| = \min$ 等价于

$$\| \tilde{X}_{ii} - C_{ii} \| = \min, i = 1,3,4, \quad (15)$$

$\tilde{X}_{ii}$ 为反对称矩阵；

$$\| \tilde{X}_{i4} - C_{i4} \| = \min, i = 1,2,3. \quad (16)$$

又由引理 5 和(15) 式得

$$\tilde{X}_{ii} = \frac{C_{ii} - C_{ii}^{\mathrm{T}}}{2}, i = 1,3,4. \quad (17)$$

由(16) 式得

$$\tilde{X}_{i4} = C_{i4}, i = 1,2,3. \quad (18)$$

把(17)式，(18)式代人(14)式即可得到(13)式.

(下转第 322 页 Continue on page 322)

[4] Hestenes M R, Stiefel E. Method of conjugate gradient for solving linear equations[J]. J Res Nat Bur Stand, 1952, 49: 409-436.

[5] Polyak B T. The conjugate gradient method in extreme problems[J]. USSR Comp Math Math Phys, 1969, 9: 94-112.

[6] Hager W W, Zhang H. A new conjugate gradient method with guaranteed descent and an efficient line search[J]. SIAM Journal on Optimization, 2005, 16: 170-192.

[7] Hager W W, Zhang H. Algorithm 851: CG_DESCENT, a conjugate gradient method with guaranteed descent[J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 2006, 32: 113-137.

[8] Li G, Tang C, Wei Z. New conjugacy condition and related new conjugate gradient methods for unconstrained optimization problems[J]. Journal of Computational and Applied Mathemathics, 2007, 202: 532-539.

[9] Wei Z, Li G, Qi L. New nonlinear conjugate gradient formulas for large-scale unconstrained optimization problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 179: 407-430.

[10] Wei Z, Li G, Qi L. Global convergence of the PRP conjugate gradient methods with inexact line search for nonconvex unconstrained optimization problems[J]. Mathematics of Computation, 2008(77): 2173-2193.

[11] Wei Z, Yao S, Liu L. The convergence properties of some new conjugate gradient methods[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 183: 1341-1350.

[12] Yuan G. Modified nonlinear conjugate gradient methods withsufficient descent property for large-scale optimization problems[J]. Optimization Letters, 2009, 3: 11-21.

[13] Yuan G, Lu X. A modified PRP conjugate gradient method[J]. Annals of Operations Research, 2009, 166: 73-90.

[14] Yuan G, Lu X, Wei Z. A conjugate gradient method with descent direction for unconstrained optimization [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 233: 519-530.

[15] Zhang L, Zhou W, Li D. A descent modified Polak-Ribière-Polyak conjugate method and its global convergence[J]. IMA Journal on Numerical Analysis, 2006, 26: 629-649.

[16] Zhang J, Deng N, Chen L. New quasi-Newton equation andrelated methods for unconstrained optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Application, 1999, 102: 147-167.

（责任编辑：尹　闯）

（上接第 315 页 Continue from page 315）

参考文献：

[1] 张忠志，胡锡炎，周福照. D对称矩阵反问题的最小二乘解[J]. 湖南大学学报：自然科学版，2001，28(5)：6-10.

[2] 周立平. 几类线性矩阵方程的加权最小二乘解及其最佳逼近问题[D]. 长沙：湖南大学，2007：1-48.

[3] 王明辉，魏木生. 关于矩阵方程 $AXB=E$ 的加权最小二乘 Hermite 解[J]. 计算数学，2004，26(2)：129-136.

[4] 彭向阳，胡锡炎，张磊. 矩阵方程的正交对称与正交反对称最小二乘解[J]. 工程数学学报，2006(6)：1048-1052.

[5] 郁金祥. 一类线性流形上矩阵方程 $X^{T}AX=B$ 的反问题[J]. 数学理论与应用，2008，28(2)：38-42.

[6] 彭向阳，张磊，胡锡炎. 矩阵方程 $A^{T}XA=B$ 的反对称正交反对称最小二乘解[J]. 工程数学学报，2004，21(8)：93-97.

（责任编辑：尹　闯）