DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2012.04.021

广西科学 Guangxi Sciences 2012,19(4):323～326

一类函数迭代的性质

The Properties of a Class of Function Iteration

方建波[1],钟 卫[2]

FANG Jian-bo[1],ZHONG Wei[2]

(1.楚雄师范学院数学系,云南楚雄 675000;2.楚雄师范学院科技处,云南楚雄 675000)

(1.Department of Mathematics Chuxiong Normal University,Chuxiong,Yunnan,675000,China;2.Department of Science and Technology Chuxiong Normal University,Chuxiong,Yunnan,675000,China)

摘要:采用矩阵法求出分式线性函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的 n 次迭代表达式 $f^n(x)$,并分别对 $f^n(x)$ 的周期性、单调性、不动点进行讨论.

关键词:函数迭代 分式线性函数 矩阵法 周期性 单调性 不动点

中图法分类号:O151 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2012)04-0323-04

Abstract:We find the n th iteration expression $f^n(x)$ of fraction linear function $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ by using matrix method,and discuss its periodicity,monotonicity,fixed point,respectively.

Key words:function iteration,fraction linear function,matrix method,periodicity,monotonicity,fixed point

一般分式线性函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的 n 次迭代表达式的求法有很多,如递归法、桥函数相似法、不动点及拓扑共轭的方法.本文采用矩阵法求出 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的 n 次迭代表达式,并对所求出的 n 次迭代函数 $f^n(x)$ 的单调性、周期性、不动点进行讨论,还给出了相关的算例.

1 基本定义

定义 1.1[1] 同一个函数 $f(x)$ 的多次复合 $f(f(x)),f(f(f(x))),\cdots$,称为函数 $f(x)$ 的迭代.为方便,记 $f^1(x)=f(x),f^2(x)=f(f(x)),\cdots,f^n(x)=f(f^{n-1}(x))$,特别地,记 $f^0(x)=x$,n 称为 $f(x)$ 的迭代指数.

定义 1.2[2] 分式线性函数是形如 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的函数方程,其中 $ad-bc\neq 0,a,b,c,d\in R,x\in D$.

定义 1.3[3] 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在自然数 $T\in N$,使得 $f^{(n+T)}(x)=f^n(x)(x\in D)$ 对一切自然数 n 成立,则 T 的最小值为 $f(x)$ 的迭代周期.

定理 1.1 设 $f(x)$ 在区间 I 上可导,则 $f(x)$ 在 I 上递增(减)的充要条件是 $f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$.

定义 1.4 函数 $y=f(x)$ 的一个不动点是指在定义域内 $y=f(x)$ 和 $y=x$ 的交点.

定义 1.5 如果一个函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 与它对应的函数值 $f(x)$ 相等,则这个自变量 x 在横坐标轴上的对应点 $A(x)$ 就叫做函数的不动点.

2 主要结果

引理 2.1 若一般分式线性函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 对应于矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,其中 $ad\neq bc$,则其 n 次迭代后所得函数 $f^n(x)$ 对应于矩阵 $A^n=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n$.

证明 当 $n=2$ 时,

$$f^2(x)=f(f(x))=f(\frac{ax+b}{cx+d})=$$

收稿日期:2012-04-07

作者简介:方建波(1983-),男,讲师,主要从事微分几何的研究。

$$\frac{a(\frac{ax+b}{cx+d})+b}{c(\frac{ax+b}{cx+d})+d}=\frac{(a^2+bc)x+ab+bd}{(ac+cd)x+bc+d^2}.$$

对应于矩阵

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2=A^2.$$

假设 $n=k$ **时**，$f^k=f\circ f\circ f\circ\cdots\circ f$（$k$ **个** f）**对应矩阵**

$$A^k=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}，\text{即 } f^k(x)=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}.$$

则当 $n=k+1$ **时**，

$$f^{k+1}=f(f^k)=\frac{a\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}+b}{c\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}+d}=$$

$$\frac{(a\alpha+b\gamma)x+(a\beta+b\delta)}{(c\alpha+d\gamma)x+(c\beta+d\delta)}$$

对应矩阵

$$\begin{pmatrix} a\alpha+b\gamma & a\beta+b\delta \\ c\alpha+d\gamma & c\beta+d\delta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{k+1}=A^{k+1},$$

故 $f^n(x)$ **对应的矩阵为** $A^n=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n$.

引理 2.2[4]　n **阶方阵** A **与对角矩阵**

$$\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

相似，则存在可逆矩阵 P，**使得** $A^n=P\Lambda^nP^{-1}$，**其中** $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ **为** A **的** n **个特征值.**

定理 2.1　分式线性函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ **对应的矩阵为** $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，**那么当** $(a-d)^2+4bc>0$ **时，由矩阵法可得** $f(x)$ **的** n **次迭代表达式**

$$f^n(x)=$$

$$\frac{(a(\lambda_1^n-\lambda_2^n)-\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}))x+b(\lambda_1^n-\lambda_2^n)}{c(\lambda_1^n-\lambda_2^n)x-\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1})+d(\lambda_1^n-\lambda_2^n)},$$

其中 $\lambda_1=\dfrac{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}$，$\lambda_2=\dfrac{a+d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}$ **为矩阵** A **的特征值.**

证明　矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **的特征方程为**

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0,$$

解得两个特征值

$$\lambda_1=\frac{a+d+\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2}=$$

$$\frac{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2},$$

$$\lambda_2=\frac{a+d-\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2}=$$

$$\frac{a+d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}.$$

(i)**当** $\Delta=(a-d)^2+4bc>0$，**且** $b\neq 0$ **时，由线性代数的知识易得** λ_1,λ_2 **的特征向量分别为** $\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\lambda_1-a}{b} \end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\lambda_2-a}{b} \end{pmatrix}$，**从而存在可逆矩阵** $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\lambda_1-a}{b} & \dfrac{\lambda_2-a}{b} \end{pmatrix}$ **使得**

$$P^{-1}AP=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot$$

$$\begin{pmatrix} (a-\lambda_2)a+bc & (a-\lambda_2)b+bd \\ (\lambda_1-a)a-bc & (\lambda_1-a)b-bd \end{pmatrix}\cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\lambda_1-a}{b} & \dfrac{\lambda_2-a}{b} \end{pmatrix}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot$$

$$\begin{pmatrix} a\lambda_1+d\lambda_2+bc-ad-\lambda_1\lambda_2 & bc+a\lambda_2+d\lambda_2-ad-\lambda_2^n \\ \lambda_1^n-a\lambda_1-d\lambda_1+ad-bc & -bc+\lambda_1\lambda_2-a\lambda_2-d\lambda_2+ad \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix} \lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2 & 0 \\ 0 & -\lambda_2^2+\lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

由引理 2.2 知

$$A^n=P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^nP^{-1}=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\lambda_1-a}{b} & \dfrac{\lambda_2-a}{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}P^{-1}=$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n \\ \dfrac{(\lambda_1-a)\lambda_1^n}{b} & \dfrac{(\lambda_2-a)\lambda_2^n}{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{a-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} & \dfrac{b}{\lambda_1-\lambda_2} \\ \dfrac{\lambda_1-a}{\lambda_1-\lambda_2} & \dfrac{-b}{\lambda_1-\lambda_2} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a(\lambda_1^n-\lambda_2^n)-\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}) & b(\lambda_1^n-\lambda_2^n) \\ c(\lambda_1^n-\lambda_2^n) & -\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1})+d(\lambda_1^n-\lambda_2^n) \end{pmatrix}.$$

故 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ **经过** n **次迭代后变为**

$$f^n(x)=$$

$$\frac{(a(\lambda_1^n-\lambda_2^n)-\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}))x+b(\lambda_1^n-\lambda_2^n)}{c(\lambda_1^n-\lambda_2^n)x-\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1})+d(\lambda_1^n-\lambda_2^n)}.$$

(ii)**当** $\Delta=(a-d)^2+4bc=0$ **时**，$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\dfrac{a+d}{2}$，$\lambda$ **的两个的特征向量分别为** $\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{d-a}{2b} \end{pmatrix}$，$\xi_2$

$= \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2c} \\ 1 \end{pmatrix}$.

令 $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a-d}{2c} \\ \frac{d-a}{2b} & 1 \end{pmatrix}$，则 $|P| =$

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{a-d}{2c} \\ \frac{d-a}{2b} & 1 \end{vmatrix} = 1 + \frac{(d-a)^2}{4bc} = 1 + \frac{-4bc}{4bc} = 0.$$

故 $\Delta = (a-d)^2 + 4bc = 0$ 时，不能用矩阵法求 n 次迭代式.

推论 2.1 对于分式线性函数 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$，

若 $a=1, b=a, c=0, d=1$，则 $f^n(x) = x + na$；

若 $c=0, d=1$，则 $f^n(x) = a^n x + \frac{1-a^n}{1-a} b$；

若 $a=1, b=0, c=a, d=1$，则 $f^n(x) = \frac{x}{nax+1}$；

若 $c=b, d=a$，则 $f^n(x) =$
$$\frac{((a+b)^n + (a-b)^n)x + (a+b)^n - (a-b)^n}{((a+b)^n - (a-b)^n)x + (a+b)^n + (a-b)^n}.$$

定理 2.2 对于分式线性函数 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$，当它的判别式 $\Delta \neq 0$ 时，设其两特征根分别为 λ_1, λ_2，则函数 $f(x)$ 以 n 为最小迭代周期的充要条件是 $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n = 1$，且 $\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} \neq 0$.

证明 设 n 为迭代周期，根据迭代周期的定义知

$f^n(x) =$
$$\frac{(a(\lambda_1^n - \lambda_2^n) - \lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}))x + b(\lambda_1^n - \lambda_2^n)}{c(\lambda_1^n - \lambda_2^n)x - \lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}) + d(\lambda_1^n - \lambda_2^n)} = x.$$

从而可得

$$b(\lambda_1^n - \lambda_2^n) = c(\lambda_1^n - \lambda_2^n) = 0, \tag{2.1}$$

$$a(\lambda_1^n - \lambda_2^n) - \lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}) = -\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}) + d(\lambda_1^n - \lambda_2^n) \neq 0. \tag{2.2}$$

由(2.1)式有

①若 b 和 c 非零，则 $\lambda_1^n - \lambda_2^n = 0$；

②若 $b = c = 0$，则由 $\Delta = (a-d)^2 + 4bc > 0$ 知 $a \neq d$，再利用(2.2)式得 $\lambda_1^n - \lambda_2^n = 0$.

所以 $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n = 1$. 又 $\lambda_1\lambda_2 = ad - bc \neq 0$，由(2.2)式有 $\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} \neq 0$.

反之，若 n 是使 $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n = 1$ 成立的最小正整数，则 $\lambda_1^n - \lambda_2^n = 0$，而 $\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} \neq 0$，以此代入 $f^n(x)$ 得到 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$，即 n 为 $f(x)$ 的最小迭代周期.

定理 2.3 分式线性函数 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ 的 n 次迭代表达式 $f^n(x)$ 在定义域上的单调性为：

(1) n 为偶数，$ad \neq bc$ 时，$f^n(x)$ 在定义域上是增函数；

(2) n 为奇数，(i)当 $ad > bc$ 时有 $f^n(x)$ 在定义域上是增函数；(ii)当 $ad < bc$ 时有 $f^n(x)$ 在定义域上是减函数.

证明 将 $\lambda_1 = \frac{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}$，$\lambda_2 = \frac{a+d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}$ 代入

$f^n(x) =$
$$\frac{(a(\lambda_1^n - \lambda_2^n) - \lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}))x + b(\lambda_1^n - \lambda_2^n)}{c(\lambda_1^n - \lambda_2^n)x - \lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}) + d(\lambda_1^n - \lambda_2^n)},$$

得到

$$f^n(x) = \frac{Ax+B}{Cx+D},$$

其中 $A = (a+d+\sqrt{\Delta})^n(a-d+\sqrt{\Delta}) + (a+d-\sqrt{\Delta})^n(d-a+\sqrt{\Delta})$，$B = 2b((a+d+\sqrt{\Delta})^n - (a+d-\sqrt{\Delta})^n)$，$C = 2c((a+d+\sqrt{\Delta})^n - (a+d-\sqrt{\Delta})^n)$，$D = (a+d+\sqrt{\Delta})^n(d-a+\sqrt{\Delta}) + (a+d-\sqrt{\Delta})^n \cdot (a-d+\sqrt{\Delta})$，$\Delta = (a-d)^2 + 4bc$.

从而

$$(f^n(x))' = \frac{A(Cx+D) - (Ax+B)C}{(Cx+D)^2} = \frac{AD-BC}{(Cx+D)^2},$$

$AD - BC = (a+d+\sqrt{\Delta})^n(a+d-\sqrt{\Delta})^n \cdot (4(a-d)^2 + 8bc + 8bc) = 16(ad-bc)^n((a-d)^2 + 4bc)$.

由于 $\Delta = (a-d)^2 + 4bc > 0$，故只需讨论 $(ad-bc)^n$ 的取值. n 为偶数时，$ad \neq bc$，$ad - bc$ 可取任何值都有 $(ad-bc)^n > 0$，所以 $(f^n(x))' > 0$；n 为奇数，$ad > bc$ 时，$(ad-bc)^n > 0$，可得 $(f^n(x))' > 0$；$ad < bc$ 时，$(ad-bc)^n < 0$，可得 $(f^n(x))' < 0$.

定理 2.4 $f(x)$ 与其 n 次迭代表达式 $f^n(x)$ 有相同的不动点.

证明 (1)由不动点的定义 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = x$，解得

$$x = \frac{a-d \pm \sqrt{(d-a)^2+4bc}}{2c}, c \neq 0.$$

而 $f^n(x)$ 的不动点为：

$f^n(x) =$

$$\frac{(a(\lambda_1^n-\lambda_2^n)-\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}))x+b(\lambda_1^n-\lambda_2^n)}{c(\lambda_1^n-\lambda_2^n)x-\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1})+d(\lambda_1^n-\lambda_2^n)}=x,$$

整理得

$(a(\lambda_1^n-\lambda_2^n)-\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}))x+b(\lambda_1^n-\lambda_2^n)=x(c(\lambda_1^n-\lambda_2^n)x-\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1})+d(\lambda_1^n-\lambda_2^n))c(\lambda_1^n-\lambda_2^n)x^2-(a(\lambda_1^n-\lambda_2^n)-\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1})+\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1})-d(\lambda_1^n-\lambda_2^n))-b(\lambda_1^n-\lambda_2^n)=0$，

即 $cx^2+(d-a)x-b=0$，所以

$$x=\frac{a-d\pm\sqrt{(d-a)^2+4bc}}{2c},c\neq 0.$$

3 算例

例 1 设 $f(x)=\dfrac{2x+1}{6x+7},x\in R$，求(1) $f^n(x)$；(2)$f^n(x)$ 的迭代周期；(3) $f^n(x)$ 单调性；(4) $f^n(x)$ 与 $f(x)$ 的不动点.

解 (1)设 $A=\begin{pmatrix}2&1\\6&7\end{pmatrix}$，$|A|=14-6=8\neq 0$，故 A 可逆，且

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-6&\lambda-7\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-7)-6=\lambda^2-9\lambda+8=(\lambda-1)(\lambda-8).$$

设特征方程为 $(\lambda-1)(\lambda-8)=0$，解得有两个特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=8$. 将特征值代入 $f^n(x)$ 的表达式得

$$f^n(x)=\frac{(-6-8^n)x+1-8^n}{6(1-8^n)x-1-6\times 8^n}.$$

(2)由迭代周期的定义可知，只需求 $\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n=\left(\dfrac{1}{8}\right)^n=1$，不存在满足条件的 n，就可知此函数在定义域内没有迭代周期.

(3) 由 $f^n(x)$ 单调性的判断可知

$(ad-bc)^n=(14-6)^n=8^n>0,n\in R$，$(f^n(x))'>0$，

故 $f^n(x)$ 在定义域内是增函数.

(4)由 $f^n(x)=\dfrac{(-6-8^n)x+1-8^n}{6(1-8^n)x-1-6\times 8^n}=x$ 得

$6x^2+5x-1=0$；

解得 $x_1=\dfrac{1}{6},x_2=-1$.

再由

$$f(x)=\frac{2x+1}{6x+7}=x$$

整理得 $6x^2+5x-1=0$. 解得

$$x_1=\frac{1}{6},x_2=-1.$$

故 $f^n(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的不动点.

例 2 设 $f(x)=\dfrac{-2x+7}{-x+3},x\in R$，求 $f(x)$ 的迭代周期.

解 设 $A=\begin{pmatrix}-2&7\\-1&3\end{pmatrix}$，$|A|=-6+7=1\neq 0$，故 A 可逆，且由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2&-7\\1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-3)+7=\lambda^2-\lambda+1,$$

得到特征方程

$$\lambda^2-\lambda+1=0.$$

解得两个特征值

$$\lambda_1=\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\lambda_2=\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}.$$

而

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)^3=1,$$

故 $f(x)$ 的迭代周期为 3.

参考文献：

[1] 张荣. 关于几类迭代函数的迭代问题[J]. 重庆师范大学学报，2007(2)：1-5.

[2] 许璐，郑光辉. 线性分式函数的迭代[J]. 数学通报，2002(10)：43.

[3] 王向东，李文荣. 函数方程函数迭代与数学竞赛[M]. 北京：首都师范大学出版社，1994.

[4] 王萼芳，石生明. 高等代数[M]. 第 3 版. 北京：高等教育出版社，2003.

（责任编辑：尹　闯）