DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2013.01.015

广西科学 Guangxi Sciences 2013,20(1):17～21

强混合序列下非参回归函数加权核估计的强收敛速度*
Strong Convergence Rate of Weighted Kernel Estimator of Nonparametric Regression Functions under Strong Mixing Sequences

罗中德
LUO Zhong-de

(百色学院数学与计算机信息工程系,广西百色 533000)
(Department of Mathematics and Computer Information, Baise University, Baise, Guangxi, 533000, China)

摘要:在误差项为强混合序列的条件下,利用随机变量部分和的矩不等式,讨论非参回归函数加权核估计的强相合性,给出其收敛速度.当样本矩足够大时,强相合的收敛速度约等于 $n^{-1/2}$.

关键词:强混合过程　非参回归函数　加权核估计　强收敛速度

中图法分类号:O212.7　**文献标识码**:A　**文章编号**:1005-9164(2013)01-0017-05

Abstract: The strong consistency of weighted kernel estimator of nonparametric regression functions is discussed under strong mixing errors, and its convergence rate is also given. As the moments of samples is large enough, the convergence rate equals approximately to $n^{-1/2}$ according to the theorem.

Key words: strong mixing processes, nonparametric regression functions, weighted kernel estimators, strong consistency rate

回归函数估计在金融、计量经济和控制系统理论等领域有着广泛的应用,目前已报道的非参数回归方法有很多,其中非参数加权核回归估计已经被证明是其中一种行之有效的方法.

假设 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是固定点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 对应的 n 个观测值,适合模型

$$Y_i = g(x_i)+\varepsilon_i, 1\leqslant i\leqslant n, \tag{0.1}$$

其中,$g(x)$ 是 $[0,1]$ 上的未知函数,且把 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 外的值定义为 0,$\{\varepsilon_i: i=1,2,\cdots,n\}$ 是随机误差序列,且假设

$$0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_{n-1}\leqslant x_n = 1.$$

Priestley 等[1] 对模型(0.1)中的未知函数 $g(x)$ 给出如下加权核估计:

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{x_i - x_{i-1}}{h_n} K(\frac{x-x_i}{h_n}),$$

其中,$K(\cdot)$ 是可测函数,且当 $n\to\infty$ 时,$0<h_n\to 0$.而且初步论证了该估计方法的一些基本性质.之后不断有学者对该估计进行讨论.Benedentti J. K.[2]讨论独立样本条件下该估计的强相合性.Schuster 等[3]讨论该估计的一致强相合性.秦永松[4]在 Benedentti 的基础上讨论更弱条件下该估计的强相合性,而且他还在文献[5]中将误差项推广到 ϕ 混合误差的情形.之后,杨善朝在文献[6],文献[7]和文献[8]中分别讨论误差项为 φ 混合、ρ 混合和 NA 序列条件下该估计的强相合性.李乃医等[9]研究了 $\tilde{P}$ 混合误差下该估计的矩相合性.于德明等[10,11]讨论了 $\tilde{\rho}$ 和 α-混合误差下回归函数加权核估计的强相合性.文献[12],[13]都讨论误差为鞅差序列回归函数估计的相合性.文献[14]和文献[15]在较强的条件下,分别讨论误差为鞅差序列和 NA 样本下回归函数估计的收敛速度,而且对于误差项要求三阶矩存在.

在实际应用中,强混合是一种较为普遍的混合过

收稿日期:2012-06-25
修回日期:2012-08-22
作者简介:罗中德(1985-),男,讲师,主要从事概率极限理论和金融统计的研究。
*广西教育厅科研立项项目(201106LX622,201204LX423);百色学院科研项目(2011KB08)资助。

程,文献[16]给出了许多强混合序列的例子. 易知,AMAR 序列就是一强混合序列,本文对如下强混合序列下非参数回归函数加权核估计的强收敛速度进行研究。

设 $\{X_i : i=1,2,\cdots\}$ 是一随机变量序列. 记 $F_a^b := \sigma\{\{X_i : a \leqslant i \leqslant b\}\}$ 为 $\{X_i : a \leqslant i \leqslant b\}$ 生成的 σ - 代数,

$\alpha(n) = \sup_{k\in N}\{|P(AB)-P(A)P(B)| : A \in F_{-\infty}^k, B \in F_{k+n}^{\infty}\}$,

称 $\{X_i : i=1,2,\cdots\}$ 为强混合序列,若当 $n\to\infty$ 时,$\alpha(n)\to 0$.

1 假设及引理

记 $\delta_n = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - x_{i-1})$,给出如下基本假设:

(a) $g(\cdot)$ 在 $[0,1]$ 上满足 $\alpha(\alpha>0)$ 阶 Lipschitz 条件;

(b) $K(\cdot)$ 在 R^1 上满足 $\beta(\beta>0)$ 阶 Lipschitz 条件且有界,且 $\int_{-\infty}^{+\infty}K(u)\mathrm{d}u = 1$,$\int_{-\infty}^{+\infty}|u^\alpha K(u)|\mathrm{d}u<\infty$;

(c) 当 $n\to\infty$ 时,$h_n\to 0$,$\delta_n\to 0$;

(d) 当 $n\to\infty$ 时,$h_n^{-1}\{(\delta_n/h_n)^\beta+(\delta_n)^\alpha\}\to 0$.

引理 1 若基本假设(a)~(d)成立,则 $Eg_n(x)-g(x)=o(n^{-\gamma})$.

证明 因为当 $x>1$ 或 $x<0$ 时,$g(x)=0$,

$$Eg_n(x)-g(x) = \{\sum_{i=1}^n \frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}K(\frac{x-x_i}{h_n})\cdot g(x_i) - h_n^{-1}\int_0^1 K(\frac{x-u}{h_n})g(u)\mathrm{d}u\} + \{h_n^{-1}\int_0^1 K(\frac{x-u}{h_n})g(u)\mathrm{d}u - g(x)\} =: J_{n1}(x)+J_{n2}(x).$$

记 $\hat{\delta}_i =: x_i - x_{i-1}$,由积分中值定理知,存在 $0<\theta_i<1$,$i=1,2,\cdots,n$,使得

$$|J_{n1}(x)| = |\sum_{i=1}^n \frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}K(\frac{x-x_i}{h_n})g(x_i) - h_n^{-1}\int_0^1 K(\frac{x-u}{h_n})g(u)\mathrm{d}u| =$$

$$|\sum_{i=1}^n \frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}K(\frac{x-x_i}{h_n})g(x_i) - h_n^{-1}\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}K(\frac{x-u}{h_n})g(u)\mathrm{d}u =$$

$$|h_n^{-1}\sum_{i=1}^n\hat{\delta}_i\{K(\frac{x-x_i}{h_n})g(x_i) - K(\frac{x-x_i+\theta_i\hat{\delta}_i}{h_n})g(x_i-\theta_i\hat{\delta}_i)\}| \leqslant$$

$$h_n^{-1}\sum_{i=1}^n\hat{\delta}_i\{|K(\frac{x-x_i}{h_n})-K(\frac{x-x_i+\theta_i\hat{\delta}_i}{h_n})|\cdot|g(x_i)|\} + h_n^{-1}\sum_{i=1}^n\hat{\delta}_i\{|K(\frac{x-x_i+\theta_i\hat{\delta}_i}{h_n})|\cdot|g(x_i)-g(x_i-\theta_i\hat{\delta}_i)|\} \leqslant Ch_n^{-1}\sum_{i=1}^n\hat{\delta}_i\{(\theta_i\hat{\delta}_i/h_n)^\beta + (\theta_i\hat{\delta}_i)^\alpha\} \leqslant Ch_n^{-1}\{(\delta_n/h_n)^\beta+(\delta_n)^\alpha\}. \quad (1.1)$$

又由 $1/r<\lambda/2-\gamma<1$ 易得 $-\lambda/2+1/r+\gamma<0$,从而

$$n^\gamma|J_{n1}(x)| \leqslant Cn^\gamma h_n^{-1}\{(\delta_n/h_n)^\beta+(\delta_n)^\alpha\} \leqslant Cn^\gamma n^{-\lambda/2+1/r} = Cn^{-\lambda/2+1/r+\gamma}\to 0, n\to\infty. \quad (1.2)$$

对 $J_{n2}(x)$,令 $y=\frac{x-u}{h_n}$,则

$$|J_{n2}(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}|g(x-h_ny)-g(x)||K(y)|\mathrm{d}y.$$

由基本假设(a),(b)和当 $x>1$ 或 $x<0$ 时 $g(x)=0$ 知,对任意 $x\in[0,1]$,有

$$n^\gamma|J_{n2}(x)| \leqslant n^\gamma\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x-h_ny)-g(x)||K(y)|\mathrm{d}y \leqslant n^\gamma\int_{-\infty}^{+\infty}|(h_ny)^\alpha K(y)|\mathrm{d}y \leqslant n^\gamma h_n^\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}|y^\alpha K(y)|\mathrm{d}y \leqslant Cn^\gamma h_n^\alpha = Cn^{-\lambda/2+1/r+\gamma}\to 0, n\to\infty. \quad (1.3)$$

因此,由(1.2)式和(1.3)式,得

$Eg_n(x)-g(x)=o(n^{-\gamma})$.

引理 2[8] 若基本假设(b),(c)和(d)成立,则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}|K(\frac{x-x_i}{h_n})| = \int_{-\infty}^{+\infty}|K(u)|\mathrm{d}u, x\in[0,1].$$

引理 3[17] 令 $q>2$,$\delta>0$ 且 $\{X_i : i\geqslant 1\}$ 为强混合序列,$EX_i=0$,$E|X_i|^{q+\delta}<\infty$. 假设存在 $\theta>q(q+\delta)/(2\delta)$ 使得 $\alpha(n)=O(n^{-\theta})$. 则对于任意 $\varepsilon>0$,都存在一个正常数 $K<\infty$ 使得

$$E\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\sum_{j=1}^n X_j|^q \leqslant K\{n^\varepsilon\sum_{i=1}^n E|X_i|^q + \{\sum_{i=1}^n\|X_i\|_{q+\delta}^2\}^{q/2}\},$$

其中 $\|X\|_r = (E|X|^r)^{1/r}$.

2 主要结果

为书写方便,记常见的"O"为"$\ll$".

定理 若基本假设(a)~(c)成立. 又设

(1) $\{\varepsilon_i\}$ 是强混合随机变量序列,且 $E\varepsilon_i=0$,$\sup_i E|\varepsilon_i|^r<\infty$,其中 $r>1$;

(2) 存在 λ 和 γ,且 $\gamma\geqslant(\lambda-1-1/r)/2$,$2\geqslant\lambda>2/r$,使得 $1/r<\frac{\lambda}{2}-\gamma<1$,且当 $n\to\infty$ 时,有 $\delta_n/h_n=O(n^{-\lambda})$,$h_n^\alpha=O(n^{-\lambda/2+1/r})$,$h_n^{-1}\{(\delta_n/h_n)^\beta+(\delta_n)^\alpha\}=O(n^{-\lambda/2+1/r})$.

(3) 对强混合序列 $\{\varepsilon_i\}$,存在一个实数 $\theta>0$,且

$$\theta > \frac{r-1}{2[r(\lambda/2-\gamma)-1]}, \tag{2.1}$$

使得 $\alpha(n)=O(n^{-\theta})$，则

$$g_n(x)-g(x)=o(n^{-\gamma}).\ \mathrm{a.s.}. \tag{2.2}$$

对于条件(2)，由于$(\lambda-1-1/r)/2\leqslant\gamma<\lambda/2-1/r$. 从而当 $r>1$ 时始终有$(\lambda-1-1/r)/2<\lambda/2-1/r$.

证明 记 $a_{ni}=:\frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}K(\frac{x-x_i}{h_n})$，则

$$g_n(x)-g(x)=\sum_{i=1}^n a_{ni}\varepsilon_i+Eg_n(x)-g(x).$$

由引理1，只需证明

$$\sum_{i=1}^n a_{ni}\varepsilon_i=o(n^{-\gamma}).$$

因为 $\theta>\frac{r-1}{2[r(\lambda/2-\gamma)-1]}$，从而存在 $w>0$，且 $w<r(\frac{\lambda}{2}-\gamma)-1$，使得$\theta>\frac{r-1}{2[r(\lambda/2-\gamma)-1-w]}$. 由 $1/r<\frac{\lambda}{2}-\gamma<1$ 和 $r>1$，得 $(1-\frac{\lambda}{2}+\gamma)/(r-1)<\frac{\lambda}{2}-\gamma$，从而，存在 $\tau>0$ 和 $s>0$，且 $w>2s$，使得

$$\frac{2s+1-\frac{\lambda}{2}+\gamma}{r-1}\leqslant\tau<\frac{\lambda}{2}-\gamma<1. \tag{2.3}$$

令 $\varepsilon_{ni}(1)=\varepsilon_i I_{(|\varepsilon_i|\leqslant n^{\tau})}$，$\varepsilon_{ni}(2)=\varepsilon_i I_{(|\varepsilon_i|>n^{\tau})}$，并注意到 $E\varepsilon_i=0$，从而

$$n^{\gamma}\sum_{i=1}^n a_{ni}\varepsilon_i=n^{\gamma}\sum_{i=1}^n\{a_{ni}\varepsilon_i-E(a_{ni}\varepsilon_i)\}=$$

$$n^{\gamma}\sum_{i=1}^n\{a_{ni}\varepsilon_{ni}(1)-E(a_{ni}\varepsilon_{ni}(1))\}+n^{\gamma}\sum_{i=1}^n\{a_{ni}\varepsilon_{ni}(2)-E(a_{ni}\varepsilon_{ni}(2))\}=:S_{n1}+S_{n2}.$$

因此，只需分别证明 $S_{n1}\to0$, a.s. 和 $S_{n2}\to0$, a.s..

(i) 证明 $S_{n1}\to0$, a.s..

令 $q=\frac{r-1}{r(\frac{\lambda}{2}-\gamma)-1-w}$，显然，由 $\gamma\geqslant(\lambda-1-1/r)/2$，有 $2r\gamma\geqslant r(\lambda-1)-1$，即 $r-1\geqslant2r(\frac{\lambda}{2}-\gamma)-2$，从而

$$\frac{r-1}{r(\frac{\lambda}{2}-\gamma)-1}\geqslant2.$$

又 $w>0$，从而，

$$q=\frac{r-1}{r(\frac{\lambda}{2}-\gamma)-1-w}>2.$$

显然，$\frac{q(q+\delta)}{2\delta}=\frac{q(q/\delta+1)}{2}\to\frac{q}{2}=\frac{r-1}{2[r(\frac{\lambda}{2}-\gamma)-1-w]}$，$\delta\to+\infty$. 从而当 δ 充分大时，有 $\theta>\frac{q(q+\delta)}{2\delta}$. 又由引理3知，对 $\forall\epsilon>0$，$\varepsilon>0$，$\delta>0$ 且 $q=\frac{r-1}{r(\frac{\lambda}{2}-\gamma)-1-w}$，

$$P(|S_{n1}|>\epsilon)\ll n^{q\gamma}E\left|\sum_{i=1}^n[a_{ni}\varepsilon_{ni}(1)-E(a_{ni}\varepsilon_{ni}(1))]\right|^q\ll n^{q\gamma}\{n^{\varepsilon}\sum_{i=1}^n E|[a_{ni}\varepsilon_{ni}(1)-E(a_{ni}\varepsilon_{ni}(1))]|^q+\{\sum_{i=1}^n\|a_{ni}\varepsilon_{ni}(1)-E(a_{ni}\varepsilon_{ni}(1))\|_{q+\delta}^2\}^{q/2}\}=J_{n1}+J_{n2}.$$

(1) 对于 J_{n2}，只要 δ 充分大，那么对于任意 $q>2$ 和 $r>1$，总有 $q+\delta>r$，从而

$$\sum_{i=1}^n\|a_{ni}\varepsilon_{ni}(1)-E(a_{ni}\varepsilon_{ni}(1))\|_{q+\delta}^2=$$
$$\sum_{i=1}^n[E|(a_{ni}\varepsilon_{ni}(1)-Ea_{ni}\varepsilon_{ni}(1))|^{q+\delta}]^{\frac{2}{q+\delta}}\ll$$
$$\sum_{i=1}^n[E|a_{ni}\varepsilon_{ni}(1)|^{q+\delta}]^{\frac{2}{q+\delta}}=$$
$$\sum_{i=1}^n[E|a_{ni}\varepsilon_i I_{(|\varepsilon_i|\leqslant n^{\tau})}|^{q+\delta}]^{\frac{2}{q+\delta}}\ll$$
$$\sum_{i=1}^n n^{2\tau(1-\frac{r}{q+\delta})}|a_{ni}|^2E\{|\varepsilon_i|^rI_{(|\varepsilon_i|\leqslant n^{\tau})}\}\ll$$
$$\sum_{i=1}^n n^{2\tau(1-\frac{r}{q+\delta})}|a_{ni}|^2=$$
$$\sum_{i=1}^n n^{2\tau(1-\frac{r}{q+\delta})}\left|\frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}K(\frac{x-x_i}{h_n})\right|^2\ll$$
$$n^{2\tau(1-\frac{r}{q+\delta})}\sum_{i=1}^n\left|\frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}\right|\left|\frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}K(\frac{x-x_i}{h_n})\right|\ll$$
$$n^{2\tau(1-\frac{r}{q+\delta})}(\frac{\delta_n}{h_n})\sum_{i=1}^n\frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}\left|K(\frac{x-x_i}{h_n})\right|\ll$$
$$n^{2\tau(1-\frac{r}{q+\delta})}(\frac{\delta_n}{h_n})\int_{-\infty}^{+\infty}|K(u)|\mathrm{d}u\ll n^{2\tau(1-\frac{r}{q+\delta})}(\frac{\delta_n}{h_n})\ll n^{2\tau(1-\frac{r}{q+\delta})-\lambda},$$

因此

$$J_{n2}\ll n^{q\gamma}[n^{2\tau(1-\frac{r}{q+\delta})-\lambda}]^{q/2}=n^{-(\frac{\lambda}{2}-\gamma-\tau)q-\tau r\frac{q}{q+\delta}}\leqslant n^{-(\frac{\lambda}{2}-\gamma-\tau)q}.$$

令$-(\frac{\lambda}{2}-\gamma-\tau)q<-1$，从而 $q>\frac{1}{\lambda/2-\gamma-\tau}$. 再令

$$\tau=\frac{2s+1-\lambda/2+\gamma}{r-1},$$

从而当

$$q>\frac{1}{\lambda/2-\gamma-\tau}=\frac{r-1}{r(\lambda/2-\gamma)-1-2s}\text{ 时，}$$

$\sum J_{n2}<\infty$. 由 $2s<w<r(\frac{\lambda}{2}-\gamma)-1$，有

$$\frac{r-1}{r(\lambda/2-\gamma)-1-2s}<\frac{r-1}{r(\lambda/2-\gamma)-1-w}.$$

从而，若

$$q \geqslant \frac{r-1}{r(\lambda/2-\gamma)-1-w},$$

则 $\sum J_{n2} < \infty$.

(2) 对于 J_{n1}，若 $1 < r \leqslant \dfrac{r-1}{r(\lambda/2-\gamma)-1-w}$，令 $q = \dfrac{r-1}{r(\frac{\lambda}{2}-\gamma)-1-w}$. 显然 $q \geqslant r$，从而，由引理 1，引理 2，以及 $K(\cdot)$ 的有界性和定理的条件(2) 知

$$\sum_{i=1}^{n} E \mid (a_{ni}\varepsilon_{ni}(1) - Ea_{ni}\varepsilon_{ni}(1)) \mid^{q} \ll \sum_{i=1}^{n} E \mid a_{ni}\varepsilon_{ni}(1) \mid^{q} = \sum_{i=1}^{n} E \mid a_{ni}\varepsilon_{i} I_{(|\varepsilon_i| \leqslant n^{\tau})} \mid^{q} \ll \sum_{i=1}^{n} n^{\tau(q-r)} \mid a_{ni} \mid^{q} E\{\mid \varepsilon_i \mid^{r} I_{(|\varepsilon_i| \leqslant n^{\tau})}\} \ll \sum_{i=1}^{n} n^{\tau(q-r)} \mid a_{ni} \mid^{q} = \sum_{i=1}^{n} n^{\tau(q-r)} \mid \frac{x_i - x_{i-1}}{h_n} K(\frac{x-x_i}{h_n}) \mid^{q} \ll n^{\tau(q-r)} (\frac{\delta_n}{h_n})^{q-1} \ll n^{\tau(q-r)-\lambda(q-1)}.$$

注意到 $q > 2$，从而，当 ε 充分小时，有

$$J_{n1} \ll n^{\varepsilon+q\gamma} n^{\tau(q-r)-\lambda(q-1)} = n^{\varepsilon-(\lambda/2-\gamma-\tau)q-\frac{q}{2}\lambda+\lambda-\tau r} \leqslant n^{-(\frac{\lambda}{2}-\gamma-\tau)q}.$$

由 q 的取法易得 $\sum J_{n1} < \infty$.

若 $r > \dfrac{r-1}{r(\lambda/2-\gamma)-1-w}$，类似的，令 $q = \dfrac{r-1}{r(\frac{\lambda}{2}-\gamma)-1-w}$. 显然 $q < r$，从而

$$\sum_{i=1}^{n} E \mid (a_{ni}\varepsilon_{ni}(1) - Ea_{ni}\varepsilon_{ni}(1)) \mid^{q} \ll \sum_{i=1}^{n} E \mid a_{ni}\varepsilon_{ni}(1) \mid^{q} = \sum_{i=1}^{n} E \mid a_{ni}\varepsilon_{i} I_{(|\varepsilon_i| \leqslant n^{\tau})} \mid^{q} = \sum_{i=1}^{n} \mid a_{ni} \mid^{q} E \mid \varepsilon_i I_{(|\varepsilon_i| \leqslant n^{\tau})} \mid^{q} \ll \sum_{i=1}^{n} \mid a_{ni} \mid^{q} = \sum_{i=1}^{n} \mid \frac{x_i - x_{i-1}}{h_n} K(\frac{x-x_i}{h_n}) \mid^{q} \ll (\frac{\delta_n}{h_n})^{q-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \mid K(u) \mid \mathrm{d}u \ll (\frac{\delta_n}{h_n})^{q-1} \ll n^{-\lambda(q-1)}.$$

注意到 $q > 2$，从而，当 ε 充分小时，有

$$J_{n1} \ll n^{\varepsilon+q\gamma} n^{-\lambda(q-1)} = n^{\varepsilon-(\lambda/2-\gamma)q-\frac{q}{2}\lambda+\lambda} \leqslant n^{-(\frac{\lambda}{2}-\gamma-\tau)q}.$$

由 q 的取法知 $\sum J_{n1} < \infty$.

总之，当 $q = \dfrac{r-1}{r(\frac{\lambda}{2}-\gamma)-w-1}$ 时，对任意 $r > 1$，有 $\sum P(\mid S_{n1} \mid > \epsilon) < \infty$，因此 $S_{n1} \to 0$, a. s..

(ii) 证明 $S_{n2} \to 0$, a. s..

令 $S_n'(2) = n^{\gamma} \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\varepsilon_{ni}(2)$，$\xi_i = \mid \varepsilon_i \mid I_{(|\varepsilon_i| > i^{\tau})}$，从而 $S_{n2} = S_n'(2) - ES_n'(2)$. 因为 $(r-1)\tau - \gamma > 0$，从而

$$\mid ES_n'(2) \mid \leqslant n^{\gamma} \sum_{i=1}^{n} \mid a_{ni} \mid E\{\mid \varepsilon_i \mid I_{(|\varepsilon_i| > n^{\tau})}\} \ll n^{\gamma} n^{(1-r)\tau} \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \mid K(u) \mid \mathrm{d}u \ll n^{-[(r-1)\tau-\gamma]} \to 0, n \to \infty. \tag{2.4}$$

$$\mid S_n'(2) \mid \leqslant n^{\gamma} \sum_{i=1}^{n} \mid a_{ni} \mid \{\mid \varepsilon_i \mid I_{(|\varepsilon_i| > n^{\tau})}\} \ll n^{\gamma} \sum_{i=1}^{n} \mid a_{ni} \mid \{\mid \varepsilon_i \mid I_{(|\varepsilon_i| > i^{\tau})}\} \ll n^{-\lambda+\gamma} \sum_{i=1}^{n} \xi_i. \tag{2.5}$$

所有，由 Kronecker 引理，要证 $n^{-\lambda+\gamma} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \to 0$, a. s. 只需证 $\sum_{i=1}^{\infty} i^{-\lambda+\gamma}\xi_i < \infty$, a. s.. 为此，令 $T_n = \sum_{i=1}^{n} i^{-\lambda+\gamma}\xi_i$. 用子序列法证明 $\{T_n\}$ 几乎处处收敛.

由(2.3) 式得 $(1-r)\tau - \lambda + \gamma \leqslant -(1+2s)$，从而对任意 $m \geqslant n \geqslant 1$，当 $n \to \infty$ 时，

$$E \mid T_m - T_n \mid = \sum_{i=n+1}^{m} i^{-\lambda+\gamma} E\xi_i \ll \sum_{i=n+1}^{m} i^{\tau(1-r)-\lambda+\gamma} \ll \sum_{i=n+1}^{\infty} i^{-(1+2s)} \ll n^{-s} \to 0.$$

所以，$\{T_n\}$ 是 L_1 上的 Chauchy 列，即存在随机变量 T，使得 $E \mid T \mid < \infty$ 且 $E \mid T_n - T \mid \to 0$. 另外，对任意 $\epsilon > 0$，

$$P(\mid T_{2^k} - T \mid > \epsilon) \ll \limsup_{n} E \mid T_{2^k} - T_n \mid \ll \sum_{i=2^k+1}^{\infty} i^{-(1+2s)} \ll 2^{-ks},$$

从而 $\sum_{k=1}^{\infty} P(\mid T_{2^k} - T \mid > \epsilon) < \infty$，即 $T_{2^k} \to T$, a. s.. 且

$$P(\max_{2^{k-1} < n \leqslant 2^k} \mid T_n - T_{2^{k-1}} \mid > \epsilon) \ll P(\mid T_{2^k} - T_{2^{k-1}} \mid > \epsilon) \ll \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} i^{-(1+2s)} \ll 2^{-ks},$$

从而 $\sum_{k=1}^{\infty} P(\max_{2^{k-1} < n \leqslant 2^k} \mid T_n - T_{2^{k-1}} \mid > \epsilon) < \infty$，即当 $k \to \infty$ 时，$\max_{2^{k-1} < n \leqslant 2^k} \mid T_n - T_{2^{k-1}} \mid \to 0$, a. s.. 所以，$T_n$ 和 T_{2^k} 在几乎处处收敛的意义下具有相同的极限，从而 $T_n \to T$, a. s.. 因此，由 Kronecher 引理得 $n^{-\lambda+\gamma} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \to 0$, a. s..

注意，由(2.5) 式得 $S_n'(2) \to 0$, a. s.，因此结合(2.4) 式，有 $S_{n2} \to 0$, a. s..

最后，综合(i) 和(ii) 知定理成立.

推论 若基本假设(a)，(b) 和定理的条件(1)

成立，且 $\alpha \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\beta \geqslant \frac{1+\alpha}{2\alpha}$，$r > 2$. 又假设 l 满足

$$\frac{1/2-1/r}{\alpha+1/2} \leqslant l \leqslant \min\{2\alpha+\frac{2}{r}-1, \frac{\beta+1/r-1/2}{1/2+\beta}, 1-\frac{2}{r}\}, \tag{2.6}$$

$$\delta_n = O(n^{-1}), h_n = n^{-l}.$$

若对任意 $0 < \gamma < 1/2 - l/2 - 1/r$，存在实数 θ，满足

$$\theta > \frac{r-1}{2[r(1/2-l/2-\gamma)-1]},$$

且 $\alpha(n) = O(n^{-\theta})$，则(2.2) 式成立.

证明 首先证明满足(2.6) 式的 l 是存在，那么只需证明

$$\frac{1/2-1/r}{\alpha+1/2} < \min\{2\alpha+\frac{2}{r}-1, \frac{\beta+1/r-1/2}{1/2+\beta}, 1-\frac{2}{r}\}. \tag{2.7}$$

事实上，因为 $\alpha \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $1-2\alpha^2 \leqslant 0$，则 $1-2\alpha^2 < \frac{1}{r}(2+2\alpha)$，整理得

$$\frac{1/2-1/r}{\alpha+1/2} < 2\alpha + \frac{2}{r} - 1.$$

又因为 $r > 2$，从而 $\frac{1}{r}(2\alpha+1) - \frac{1}{r} < \alpha$，整理可得

$$\frac{1/2-1/r}{\alpha+1/2} < 1 - \frac{2}{r}.$$

又 $\beta \geqslant \frac{1+\alpha}{2\alpha}$，从而 $1+\alpha-2\alpha\beta \leqslant 0$，即有 $(1+\alpha-2\alpha\beta)/2 < \frac{1}{r}(1+\alpha+\beta)$，则

$$\frac{1/2-1/r}{\alpha+1/2} < \frac{\beta+1/r-1/2}{1/2+\beta}.$$

因此(2.7) 式成立，所以满则(2.6) 式的 l 是存在的.

其次，在定理中取 $\lambda = 1-l$. 因为 $l \geqslant \frac{1/2-1/r}{\alpha+1/2}$，从而有 $\alpha l \geqslant (1-l)/2 - 1/r = \lambda/2 - 1/r$，即 $h_n^{\alpha} = O(n^{-(\lambda/2-1/r)})$. 又因为 $l \leqslant 1-\frac{2}{r}$，从而 $1-l > \frac{2}{r}$，及 $\lambda > \frac{2}{r}$. 再因为 $l \leqslant \frac{\beta+1/r-1/2}{1/2+\beta}$，从而 $\beta - l\beta - l \geqslant 1/2 - l/2 - 1/r = \lambda/2 - 1/r$. 又 $h_n^{-1}(\delta_n/h_n)^{\beta} = O(n^{-(\beta-l\beta-l)})$，所以 $h_n^{-1}(\delta_n/h_n)^{\beta} = O(n^{-(\lambda/2-1/r)})$. 同样的，由 $l \leqslant 2\alpha - 1 + 2/r$，得 $\alpha - l \geqslant 1/2 - l/2 - 1/r = \lambda/2 - 1/r$，而 $h_n^{-1}\delta_n^{\alpha} = O(n^{-(\alpha-l)})$. 从而 $h_n^{-1}\delta_n^{\alpha} = O(n^{-(\lambda/2-1/r)})$. 因此定理的条件(2) 成立，所以推论成立.

注 1 定理的条件是比较弱的，对于条件(2)，只要选择适当的 δ_n 和 h_n 就可以满足.

注 2 当误差为鞅序列和 NA 序列时，文献[14]和[15] 要求 $r > 3$. 但是本文定理和推论给出了当 $r > 1$ 时的收敛速度. 由推论可知，当 $\alpha = \beta = 1$，$r = 3$ 时，l 的取值范围为 $[\frac{1}{9}, \frac{1}{3}]$，若此时取 $l = 1/9$，则收敛速度为 $\gamma < 1/9$；由推论 1 还知道，α 比较大时，l 可以取得较小的值，此时，若 r 充分大，则该估计的收敛速度接近于 $n^{-1/2}$.

参考文献：

[1] Priestley M B, Chao M T. Nonparametric function fitting [J]. J R Statist Soc: Series B, 1972, 34: 385-392.

[2] Benedentti J K. On the nonparametric estimation of regression functions[J]. J R Statist Soc: SeriesB, 1977, 39: 248-253.

[3] Schuster E, Yakowitz S. Contributions to the theory of nonparametric regression with application to system identification[J]. Ann Statist, 1979, 7(1): 139-139.

[4] 秦永松. 非参数回归函数估计的一个结果[J]. 工程数学学报, 1989, 6(3): 120-123.

[5] 秦永松. 相依误差下非参数回归函数估计的强相合性[J]. 广西师范大学学报: 自然科学版, 1992, 10(2): 24-27.

[6] 杨善朝. φ-混合误差下非参数回归函数加权核估计的相合性[J]. 高校应用数学学报, 1995, 10(2): 173-179.

[7] 杨善朝. 混合序列矩不等式和非参数估计[J]. 数学学报, 1997, 40(2): 271-279.

[8] 杨善朝, 王岳宝. NA 样本回归函数估计的强相合性[J]. 应用数学学报, 1999, 22(4): 522-530.

[9] 李乃医, 黄娟. $\tilde{\rho}$ 混合误差下非参数回归函数加权核估计的相合性[J]. 江西科学, 2006, 24(4): 147-148.

[10] 于德明. $\tilde{\rho}$-混合误差下回归函数加权核估计的强相合性[J]. 高校应用数学学报: A 辑, 2006, 21(4): 439-444.

[11] 于德明. α-混合误差下回归函数加权核估计的强相合性[J]. 浙江工业大学学报, 2006, 34(4): 470-472.

[12] Lai T L, Wei C Z. Least squares estimates in stochastic regression models with applications to identification and control of dynamic systems[J]. Ann, Statis, 1982, 10(1): 154-166.

[13] 杨善朝. 基于鞅序列非参数回归权函数的估计[J]. 系统科学与数学, 1999, 19(1): 79-85.

[14] 李国亮, 刘禄勤. 误差为鞅差序列的回归函数估计的收敛速度[J]. 系统科学与数学, 2007, 27(1): 152-160.

[15] 朱春浩. NA 样本下回归函数估计的收敛速度[J]. 大学数学, 2008, 24(4): 69-74.

[16] Doukhan P. Mixing: properties and examples. Lecture Notes in Statistics[M]. Berlin: Springer, 1994, 85: 125-139.

[17] Yang S C. Moment bounds for strong-mixing sequences and their application[J]. Journal of Mathematical Research Exposition, 2000, 20(3): 349-359.

(责任编辑：尹　闯)