DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2013.01.017

广西科学 Guangxi Sciences 2013,20(1):27～30

一种用广义特征矩阵计算若当基的方法*

Computation of Jordan Bases by Generalized Eigenmatrices

李大林[1],黄小玉[2]
LI Da-lin[1],HUANG Xiao-yu[2]

(1.柳州职业技术学院基础部,广西柳州 545006;2.广西机电职业技术学院人文科学系,广西南宁 530007)
(1.Department of Basic Courses,Liuzhou Vocational Institute of Technology,Liuzhou,Guangxi,545006,China;2.Department of Humanities,Guangxi Technological College of Machinery and Electricity,Nanning,Guangxi,530007,China)

摘要:给出一种用广义特征矩阵计算若当基的方法.该方法在获得亏损矩阵的特征值及其代数重数的基础上,求出广义特征矩阵,利用系列广义特征矩阵构成分块矩阵,并使每一分块矩阵正好是特征向量或广义特征向量,再施以初等变换求出若当基.

关键词:亏损矩阵 相似变换矩阵 广义特征矩阵 若当标准形 若当链
中图法分类号:O121.21 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2013)01-0027-04

Abstract:A new algorithm is given to compute the transition matrix to transform the defective matrix into Jordan canonical form. The basic information that are easily obtained,such as the eigenvalues and their algebraic multiplicities,are used to generalize matrices,where their nontrivial column vectors are eigenvectors or generalized eigenvectors. They constitute a block matrix,from which all information of Jordan canonical form can be obtained by means of column elementary transformations.

Key words:defective matrix,similarity transition matrix,generalized eigenmatrix,Jordan canonical form,Jordan chain

求线性微分方程组 $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=AX+F(t)$ 满足初始条件 $x_i(t_0)=b_i,i=1,\cdots,n$ 的解过程中需要求系数矩阵 A 的若当标准型及相似变换矩阵.相似变换矩阵由 A 的若当基构成[1,2],常规方法计算较繁杂.文献[1,3,4]把 A 的若当标准型及若当基等信息,转变为广义特征矩阵,通过广义特征矩阵,找到了解这类线性微分方程组的新方法,即求广义特征矩阵只需解一个仅由 A 的特征值及代数重数就可获得的的固定线性方程组,没有用到 A 的若当标准型及若当基.那么逆向思考,用 A 的广义特征矩阵是否可以求出 A 的若当基.本文给出这样一种计算若当基的方法.

收稿日期:2012-04-07
作者简介:李大林(1968-),男,教授,主要从事矩阵论研究。
*广西教育厅科研项目(201106LX751)资助。

1 预备知识

假设复数域上 n 阶亏损矩阵 A 的特征多项式为 $\prod_{i=1}^{d}(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$,其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_d$ 互异,n_i 为 λ_i 的代数重数,$\sum_{i=1}^{d}n_i=n$.用 $A_1\oplus A_2$ 表示分块矩阵 $\begin{bmatrix}A_1 & \\ & A_2\end{bmatrix}$,那么 A 的若当标准形为

$$J=J_{n_1}(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus J_{n_d}(\lambda_d),$$

其中 $J_{n_i}(\lambda_i)=J_{n_i(1)}(\lambda_i)\oplus J_{n_i(2)}(\lambda_i)\oplus\cdots\oplus J_{n_i(t_i)}(\lambda_i)$,而且主对角线上有 t_i 个若当块,阶数满足 $n_i(1)\geqslant\cdots\geqslant n_i(j)\geqslant\cdots\geqslant n_i(t(i))$,$n_i(1)$ 为 λ_i 的几何重数,某个若当块形如

$$J_{n_i(j)}(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{bmatrix}.$$

记 N_{n_i} 表示用 0 代替 $J_{n_i}(\lambda_i)$ 的主对角元素 λ_i 后得到的幂零矩阵，$N_{n_i}^0$ 表示 n_i 阶单位矩阵. 记 n 阶矩阵

$$N_i=O\oplus\cdots\oplus N_{n_i}\oplus\cdots\oplus O,$$

其中除了 N_{n_i} 之外，都为零. 设 P 为 A 的相似变换矩阵，即 $A=PJP^{-1}$. 称 $A_i^{(k)}=PN_i^kP^{-1}$ 为对应于特征值 λ_i 的广义特征矩阵，$k=0,1,\cdots,n_i-1$. 它们具有与若当链类似的性质[1,3,4].

$$AA_i^{(k)}=\lambda_iA_i^{(k)}+A_i^{(k+1)},k\leqslant n_i-2,$$
$$AA_i^{(n_i-1)}=\lambda_iA_i^{(n_i-1)}. \qquad (1)$$

记 $g_i(m)=\min\{m,n_i-1\}$，$C_m^k=\dfrac{m!}{k!(m-k)!}$，则

$$A^m=\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=0}^{g_i(m)}C_m^k\lambda_i^{m-k}A_i^{(k)}.$$

因此，令 $m=0,1,\cdots,n-1$，可以得到有 n 个未知量 $A_i^{(k)}$，$i=1,\cdots,d$；$k=0,1,\cdots,n_i-1$ 的线性方程组

$$\sum_{i=1}^{d}A_i^{(0)}=I,\quad \sum_{i=1}^{d}(\lambda_iA_i^{(0)}+A_i^{(1)})=A,\cdots,$$
$$\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=0}^{g_i(n-1)}C_{n-1}^k\lambda_i^{n-1-k}A_i^{(k)}=A^{n-1}. \qquad (2)$$

解线性方程组 (2) 可以求出所有的广义特征矩阵[1,3,4]. 而且列出线性方程组(2)，只要求出 A 的特征值及代数重数即可.

设 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 对应于 λ_i 的一条若当链，即

$$Ax_1=\lambda_ix_1,Ax_2=\lambda_ix_2+x_2,\cdots,Ax_m=\lambda_ix_m+x_{m-1},$$

x_1 为特征向量，$x_2,\cdots,x_m$ 为广义特征向量，如果 $(A-\lambda_iI)X=x_m$ 无解，则称 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 为极大若当链，这时向量 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的深度[5] 依次定义为 $m-1$，$m-2,\cdots,0$，且用 $dp(x_k)$ 表示 x_k 的深度. 记

$$\mathrm{null}(A-\lambda_iI)^{n_i(1)}\overset{def}{=}\{x\mid(A-\lambda_iI)^{n_i(1)}x=O\},$$
$$V_i^{(k)}=\{x\in\mathrm{null}(A-\lambda_iI)^{n_i(1)}\mid dp(x)\geqslant k \text{ 或者 } x=O\}.$$

则 $V_i^{(0)}=\mathrm{null}\,(A-x_iI)^{n_i(1)}$. 令

$$W_i^{(k)}=\{x\mid Ax=\lambda_ix,dp(x)\geqslant k \text{ 或 } x=O\}.$$

显然 $V_i^{(k)}$ 是 $V_i^{(0)}$ 的子空间，$W_i^{(k)}$ 是 $V_i^{(k)}$ 的子空间，$W_i^{(0)}\supseteq W_i^{(1)}\supseteq\cdots\supseteq W_i^{(n_i(1)-1)}$.

一个若当块 $J_{n_i(j)}(\lambda_i)$ 对应一个极大若当链 $x_1(i,j),x_2(i,j),\cdots,x_{n_i(j)}(i,j)$，如果用经典方法求这条极大若当链，首先是通过解 $(A-\lambda_iI)^{n_i(j)}X=0((A-\lambda_iI)^{n_i(j)-1}X\neq0)$ 求出最后一个广义特征向量 $x_{n_i(j)}(i,j)$，然后令

$$x_{n_i(j)-1}(i,j)=(A-\lambda_iI)x_{n_i(j)}(i,j),x_{n_i(j)-2}(i,j)=(A-\lambda_iI)x_{n_i(j)-1}(i,j),\cdots,x_1(i,j)=(A-\lambda_iI)x_2(i,j).$$

2 若当基的计算方法

用广义特征矩阵计算极大若当链：(1) 式中非零的广义特征矩阵 $A_i^{(n_i(1)-1)},A_i^{(n_i(1)-2)},\cdots,A_i^{(0)}$ 构成一条链

$$AA_i^{(n_i(1)-1)}=\lambda_iA_i^{(n_i(1)-1)},AA_i^{(n_i(1)-2)}=\lambda_iA_i^{(n_i(1)-2)}+A_i^{(n_i(1)-1)},\cdots,AA_i^{(0)}=\lambda_iA_i^{(0)}+A_i^{(1)}. \qquad (3)$$

考察这些广义特征矩阵的列向量. 记 $A_i^{(n_i(1)-k)}=(y_1(k),y_2(k),\cdots,y_n(k))$，$k=1,\cdots,n_i(1)$，$y_u(k)$ 为 $A_i^{(n_i(1)-k)}$ 的第 u 列，当 k 取遍 1 至 $n_i(1)$ 时，由(3) 式有

$$Ay_u(1)=\lambda_iy_u(1),Ay_u(2)=\lambda_iy_u(2)+y_u(1),\cdots,Ay_u(n_i(1))=\lambda_iy_u(n_i(1))+y_u(n_i(1)-1),$$

因此 $y_u(1),y_u(2),\cdots,y_u(n_i(1))$ 构成一条若当链.

令

$$B_i=\begin{bmatrix}A_i^{(n_i(1)-1)}\\A_i^{(n_i(1)-2)}\\\cdots\\A_i^{(0)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1(1) & y_2(1) & \cdots & y_n(1)\\ y_1(2) & y_2(2) & \cdots & y_n(2)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1(n_i(1)) & y_2(n_i(1)) & \cdots & y_n(n_i(1))\end{bmatrix}.$$

B_i 为 $n\times n_i(1)$ 分块矩阵，其中 (u,k) 块 $y_u(k)$ 是 $A_i^{(n_i(1)-k)}$ 的第 u 列. 称 B_i 为对应于 λ_i 的若当链矩阵.

命题 1 如果 B_i 经分块矩阵的列初等变换后，某列非零，则它仍然包含有一条若当链.

证明 由第 u 列加上第 v 列的 a 倍，得

$$y_u(1)+ay_v(1),\cdots,y_u(k)+ay_v(k),\cdots,y_u(n_i(1))+ay_v(n_i(1)). \qquad (4)$$

显然(4) 式满足 $A(y_u(1)+ay_v(1))=\lambda_i(y_u(1)+ay_v(1))$，

$$A(y_u(k)+ay_v(k))=\lambda_i(y_u(k)+ay_v(k))+(y_u(k-1)+ay_v(k-1)),k=2,\cdots,n_i(1).$$

所以(4) 式的向量不全为零，即它们构成一条若当链. 其他两种情况易证.

定义 1 一个若当链矩阵称为分块阶梯矩阵，如果它满足

(1) 每一行的向量线性无关；

(2) 第 k 行的非零向量比第 $k+1$ 行的少；

(3) 每行的非零向量排在零向量的左边.

定理 经过系列的分块矩阵的列初等变换后，

若链矩阵 B_i 可以变为分块阶梯矩阵 $\widetilde{B}_i$，则 $\widetilde{B}_i$ 包含 null $(A-\lambda_i I)^{n_i(1)}$ 的一组基.

证明 用 r_k 表示 B_i 的第 k 行 $y_1(k),y_2(k),\cdots,y_n(k)$ 的秩，由于这些向量是 $A_i^{(n_i(1)-k)}$ 的所有列向量，则有

$$r_k=\operatorname{rank}A_i^{(n_i(1)-k)},k=1,\cdots,n_i(1).$$

因为 $r_1\leqslant\cdots\leqslant r_k\leqslant\cdots\leqslant r_{n_i(1)}$，那么可以用下列方法对分块矩阵的列初等变换，把 B_i 变为阶梯矩阵：

首先，B_i 的第一行变为

$$(\widetilde{y}_1(1),\widetilde{y}_2(1),\cdots,\widetilde{y}_{r_1}(1),O,\cdots,O),$$

其中前 r_1 个向量 $\widetilde{y}_1(1),\widetilde{y}_2(1),\cdots,\widetilde{y}_{r_1}(1)$ 线性无关，其余向量为零向量. B_i 的前 r_1 列被变为

$$(\widetilde{y}_u(1)^{\mathrm{T}},\widetilde{y}_u(2)^{\mathrm{T}},\cdots,\widetilde{y}_u(k)^{\mathrm{T}},\cdots,\widetilde{y}_u(n_i(1))^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},u=1,2,\cdots,r_1.$$

其次，第二行中的前 r_1+1 到 r_2 个块被变成线性无关的向量 $\widetilde{y}_{r_1+1}(2),\cdots,\widetilde{y}_{r_2}(2)$，从 r_2+1 到最后一个块被变为零向量.

继续进行类似的分块矩阵的列初等变换，B_i 最终变为

$$\widetilde{B}_i=\begin{bmatrix}\widetilde{y}_1(1) & \widetilde{y}_2(1) & \cdots & \widetilde{y}_{r_1}(1) & & & & & & & & \\ \widetilde{y}_1(2) & \widetilde{y}_2(2) & \cdots & \widetilde{y}_{r_1}(2) & \cdots & \widetilde{y}_{r_2}(2) & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & & \\ \widetilde{y}_1(k) & \widetilde{y}_2(k) & \cdots & \widetilde{y}_{r_1}(k) & \cdots & \widetilde{y}_{r_2}(k) & \cdots & \widetilde{y}_{r_k}(k) & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \\ \widetilde{y}_1(b) & \widetilde{y}_2(b) & \cdots & \widetilde{y}_{r_1}(b) & \cdots & \widetilde{y}_{r_2}(b) & \cdots & \widetilde{y}_{r_k}(b) & \cdots & \widetilde{y}_{r_b}(b) & O & \cdots\end{bmatrix},$$

其中 $b=n_i(1)$.

根据命题 1，知 $\widetilde{B}_i$ 的前 $r_{n_i(1)}$ 列的每一列包含一条若当链. 这些列中每一个非零向量为特征向量. 容易看出 $\widetilde{B}_i$ 的第一行的前 r_1 个向量是深度为 $n_i(1)-1$ 的特征向量. 它们构成 $W_i^{(n_i(1)-1)}$ 的一组基. 所以 $\widetilde{B}_i$ 的前 r_1 列是具有长度 $n_i(1)$ 的极大若当链.

由于 B_i 的第二行是 $A_i^{(n_i(1)-2)}$ 的列向量，其中的非零向量的深度至少是 $n_i(1)-2$. 显然 $\widetilde{B}_i$ 的第二行从第 r_1+1 到第 r_2 个向量

$$\widetilde{y}_{r_1+1}(2),\cdots,\widetilde{y}_{r_2}(2) \tag{5}$$

是深度至少为 $n_i(1)-2$ 的特征向量. 它们构成 $W_i^{(n_i(1)-2)}$ 的一组基. 又假设

$$\dim W_i^{(n_i(1)-2)}-\dim W_i^{(n_i(1)-1)}=d_{n_i(1)-1}\neq 0,$$

则 $W_i^{(n_i(1)-2)}\supset W_i^{(n_i(1)-1)}$. 根据命题 1，知(5)式中存在至少 $d_{n_i(1)-1}$ 个深度为 $n_i(1)-2$ 的特征向量.

通常 $\widetilde{B}_i$ 的第 k 行从第 $r_{k-1}+1$ 至 r_k 个向量构成 $W_i^{(n_i(1)-k)}$ 的一组基. 如果 $d_{n_i(1)-k+1}\neq 0$，则 $\widetilde{B}_i$ 的第 k 行存在至少 $d_{n_i(1)-k+1}$ 个具有深度 $n_i(1)-k$ 的特征向量，它们所在的列构成 $d_{n_i(1)-k+1}$ 条长度为 $n_i(1)-k+1$ 的极大若当链.

当 k 取遍 2 到 $n_i(1)$，就获得了 null$(A-\lambda_i I)^{n_i(1)}$ 的一组基.

由上述证明得如下推论. 根据此推论我们容易从 $\widetilde{B}_i$ 中选择出 $d_{n_i(1)-k}$ 条深度为 $n_i(1)-k+1$ 的极大若当链.

推论 令 $\widetilde{y}_m(k),\cdots,\widetilde{y}_m(n_i(1))$ 为 $\widetilde{B}_i$ 的第 m 列中的若当链. 则

(1) $\widetilde{y}_m(k),\cdots,\widetilde{y}_m(n_i(1))$ 为极大若当链；

(2) $\widetilde{y}_m(k)\overline{\in}W_i^{(n_i(1)-k+1)}$；

(3) 线性方程组 $(A-\lambda_i I)X=\widetilde{y}_m(n_i(1))$ 无解.

3 实例

令

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & -5 & -3 & -2\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 8 & 5 & 3\end{bmatrix}.$$

请用广义特征矩阵计算 A 的若当基.

显然 A 的特征方程为 $|\lambda I-A|=(\lambda+1)^4=0$，特征值为 $\lambda_1=-1$，其代数重数为 $n_1=4$. 根据(2)式，得

$$\begin{cases}A_1^{(0)}=I,\\ (-1)A_1^{(0)}+A_1^{(1)}=A,\\ (-1)^2A_1^{(0)}+C_2^1(-1)A_1^{(1)}+A_1^{(2)}=A^2,\\ (-1)^3A_1^{(0)}+C_3^1(-1)^2A_1^{(1)}+C_3^2(-1)A_1^{(2)}+A_1^{(3)}=A^3.\end{cases}$$

解线性方程组，求出 $A_1^{(0)},A_1^{(1)},A_1^{(2)},A_1^{(3)}$，其中 $A_1^{(3)}=O$. 所以仅用 $A_1^{(2)},A_1^{(1)},A_1^{(0)}$ 构成分块矩阵求若当基.

$$B_1=\begin{bmatrix}A_1^{(2)}\\ A_1^{(1)}\\ A_1^{(0)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0\\ \hdashline 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & -4 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 5 & 4\\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\cdots\to$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_1(1) & & & \\ \tilde{y}_1(2) & \tilde{y}_2(2) & & \\ \tilde{y}_1(3) & \tilde{y}_2(3) & \tilde{y}_3(3) & \tilde{y}_{(}3) \end{bmatrix} = \tilde{B}_1.$$

注　上述计算经过一系列分块矩阵的列初等变换:交换第 1、3 列的位置,交换第 2、4 列的位置,第 4 列加上第 2 列的 -2 倍,交换第 3、4 列的位置.

显然 $\tilde{y}_1(1)=(-1,2,0,-4)^{\mathrm{T}}$ 是 $W_1^{(2)}$ 的一组基,且 $\tilde{B}_1$ 的第一列

$\tilde{y}_1(1)=(-1,2,0,-4)^{\mathrm{T}},\tilde{y}_1(2)=(0,-3,0,5)^{\mathrm{T}},\tilde{y}_1(3)=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$

是一条长度为 3 的极大若当链;$\tilde{y}_2(2)=(-1,2,0,-4)^T$ 是 $W_1^{(1)}$ 的一组基,由于 $d_1=\dim W_1^{(1)}-\dim W_1^{(2)}=0$,没有长度为 2 的极大若当链;$\tilde{y}_3(3)=(0,1,0,-2)^T,\tilde{y}_3(4)=(1,0,0,0)^T$ 是 $W_1^{(0)}$ 的一组基. 又由于 $d_0=\dim W_1^{(0)}-\dim W_1^{(1)}=1$,且 $\tilde{y}_3(3)\overline{\in} W_1^{(1)}$,所以可以选择 $\tilde{y}_3(3)$ 为长度为 1 的极大若当链. 因此 A 的若当基有两条极大若当链:$\tilde{y}_1(1),\tilde{y}_1(2),\tilde{y}_1(3)$;$\tilde{y}_3(3)$.

参考文献:

[1] Li D L, Liu Z X, Huang X Y. Computation of matrix function and integrals by generalized eigenmatrices[J]. JP Journal of Algebra, Number Theory and Application (India), 2008, 12(2): 231-243.

[2] Horn R A, Johnson C R. Matrix analysis[M]. Beijing: People's Post & Telecommunications Publishing House, 2005: 127-139.

[3] **李大林,黄雪燕. 广义特征矩阵的唯一性**[J]. **广西科学**, 2008(3): 228-230.

[4] **李大林. 广义谱分解与亏损矩阵幂的算法**[J]. **大学数学**, 2004(2): 93-96.

[5] Bru R, Rodman L, Schneider H. Extensions of Jordan bases for invariant subspaces of a matrix[J]. Linear Algebra Appl, 1991, 150: 209-225.

[6] **刘学质.** Jordan **标准形过渡矩阵求法的补充条件**[J]. **大学数学**, 2007(4): 148-151.

[7] Johnson W P. Confluent q-extensions of some classical determinants[J]. Linear Algebra Appl, 2005, 411: 281-294.

[8] **李大林. 用固定矩阵计算亏损矩阵幂级数的方法**[J]. **广西科学**, 2003, 5: 285-261.

(责任编辑:尹　闯)

科学家揭示维持生物钟正常工作新机制

生物节律是以生命活动 24h 为周期的内在周期性节律。早在世界上第一个单细胞生物出现以前,地球已经自转了大约 20 亿年,为了适应这种昼夜环境周期性的变化,地球上的许多生物体内发育分化出一个特殊系统——生物钟,用以协调各种不同组织与器官的昼夜节律。为了了解生物钟基因的作用,科学家们进行了大量的研究工作。最近,中国南京大学医学院和美国加州大学的科研人员通过构建单突变和双突变小鼠,进行了遗传相互作用筛选分析。结果发现在 Fbxl3 缺陷型小鼠中删除 Rev-erbα 基因,就能恢复其长期生物钟周期表型。此外,Fbxl3 还能通过令 Rev-erb 组蛋白去乙酰化酶 3 阻遏子复合物失活,来调控 Rev-Erb/视黄酸受体相关孤儿受体结合元件(RRE)介导的转录。Fbxl3 也能调控 E-box 驱动基因表达的表达量。说明 Fbxl3 在哺乳动物生物节律反馈环路中扮演了两种不同的角色,从而揭示了一种周期确定和维持生物钟正常工作的新机制。

(据科学网)