DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2013.02.014

广西科学 Guangxi Sciences 2013,20(2):85～87

一类四次多项式系统原点的极限环分支*

The Bifurcation of Limit Cycles for a Quartic Polynomial System

卢景苹

LU Jing-ping

(广西民族师范学院数学与计算机科学系,广西崇左 532200)

(Department of Mathematics and Computer Science,Guangxi Normal University for Nationalities,Chongzuo,Guangxi,532200,China)

摘要:给出一类四次多项式系统原点的前 8 个奇点量,由奇点量导出焦点量,得到该系统原点成为 8 阶细焦点的条件,证明该系统从原点可以分支出 8 个极限环.

关键词:四次多项式系统 奇点量 焦点量 极限环

中图法类分号:O175.12 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2013)02-0085-03

Abstract:The bifurcation of limit cycles from a weak focal is investigated for a quartic polynomial system. The first 8 singular point values are given at the origin of system,and the focal values can be derived from the singular points, then the conditions that the origin is an 8-order weak focal is obtained. Finally, it is proved that this system has 8 limit cycles in the neighborhood of the origin.

Key words:quartic polynomial system,singular point value,focal value,limit cycle

Hilbert 1900 年在第二届国际数学家大会上提出了 23 个具有深刻影响的数学问题,其中第 16 个问题的后半部分为:右端为不高于 n 次的实平面微分自治系统

$$\frac{dx}{dt}=X_n(x,y),\frac{dy}{dt}=Y_n(x,y), \tag{1}$$

最多可以有多少个极限环.即极限环个数的一致上界 $H(n)$(称为 Hilbert 数)为多少.这个问题引起了众多数学爱好者的关注.由细焦点扰动产生极限环是目前极限环研究的热点领域,它是将具有细焦点的系统经过适当扰动,使这个细焦点的稳定性发生变化,从而产生小振幅极限环.该类问题的研究已有许多成果.Buatin[1]证明二次系统最多能从细焦点扰动出 3 个极限环.Sibirskii N. S.[2]证明不含二次项的三次系统细焦点的阶数至多为 5,即在原点的邻域可以有 5 个极限环.Lloyd 等人[3]给出三次系统可由单个细焦点产生 6 个极限环.马世龙和宁书成等[4,5]人获得了三次系统原点邻域可以有 8 个小振幅极限环的结果.而 H. żoladek[6]在 1995 年得出单个奇点外围有 11 个小振幅极限环的好结果.对四次系统来说,从高阶细焦点扰动出极限环问题的研究结果并不多见,文献[7]证明四次系统在全局范围有 16 个极限环,而在单个细焦点邻域只有 5 个极限环.文献[8]给出四次系统可从中心分支出 15 个极限环,而文献[9]计算出四次系统在原点有 5 个不全为零的焦点量,但没有讨论极限环分支问题.

本文考虑系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+\delta x+A_{20}x^2+A_{20}y^2+(2A_{20}+B_{21})x^3+A_{21}yx^2+(2A_{20}+B_{21})xy^2+A_{21}y^3+A_{13}yx^3+A_{13}xy^3-B_{13}x^2y^2-\lambda x^4+(\lambda-B_{13})y^4,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+\delta y+B_{20}x^2+B_{20}y^2+(2B_{20}-A_{21})x^3+B_{21}yx^2+(2B_{20}-A_{21})xy^2+B_{21}y^3+(B_{13}+2\lambda)yx^3+(B_{13}+2\lambda)xy^3-A_{13}x^2y^2-A_{13}x^4,\end{cases} \tag{2}$$

其中 $\delta,\lambda,A_{ij},B_{ij}(i=1,2;j=1,2,3)$ 是实数.研究

收稿日期:2012-12-22

修回日期:2013-02-27

作者简介:卢景苹(1984-),女,讲师,主要从事微分方程研究。

*国家自然科学基金项目(10961011),广西教育厅高校科研项目(201204LX482)资助。

该四次系统从单一细焦点分支出极限环问题，计算出该系统原点的前 8 个不全为零的焦点量，并给出原点成为 8 阶细焦点的条件，证明该系统从原点可以分支出 8 个极限环.

1 四次多项式系统对应复系统原点的奇点量

用研究复系统的方法来研究系统(2)$|_{\delta=0}$ 原点的性质，经过变换

$$z = x + yi, w = x - yi, T = it, i = \sqrt{-1}, \quad (3)$$

把系统(2)$|_{\delta=0}$变换成它的伴随复系统

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dT} = z + a_{11}zw + a_{21}z^2w + a_{11}zw^2 + b_{22}z^3w + \\ \qquad a_{22}z^2w^2 + i\lambda zw^3, \\ \dfrac{dw}{dT} = -(w + b_{11}zw + b_{21}w^2z + b_{11}wz^2 + \\ \qquad a_{22}w^3z + b_{22}z^2w^2 - i\lambda wz^3), \end{cases} \quad (4)$$

其中两个系统的系数之间的关系为

$$\begin{aligned} &a_{11} = (-iA_{20} + B_{20}), \\ &a_{21} = (-iA_{20} - A_{21} + B_{20} - iB_{21}), \qquad (5) \\ &a_{22} = -\frac{1}{2}(A_{13} - iB_{13}), \\ &\overline{a_{ij}} = b_{ij}, i = ,1,2; j = ,1,2. \end{aligned}$$

利用形式级数法[10]计算奇点量，可得出系统(4)奇点量的递推公式.

引理 1 系统(4)原点的奇点量 $\mu_m, m = 1,2\cdots$，可根据下列的递推公式得出

$c(1,1) = 1, c(2,0) = c(0,2) = 0.$

如果 $k = j$ 且 $j \neq 1$ 或 $k < 0$，或 $j < 0$，则 $c(k,j) = 0$，其它情形的 $c(k,j)$ 由下面公式确定

$$c(k,j) = \frac{1}{(-k+j)}(i(1+j)c(-3+k,j) + (b_{22}(1+k) - b_{22}(1+j))c(-2+k,-1+j) - b_{11}(1+j)c(-2+k,j) + (a_{22}(1+k) - a_{22}(1+j))c(-1+k,-2+j) + (a_{21}(1+k) - b_{21}(1+j))c(-1+k,-1+j) - b_{11}(1+j)c(-1+k,j) + i(1+k)\lambda c(k,-3+j) + a_{11}(1+k)c(k,-2+j) + a_{11}(1+k)c(k,-1+j),$$

$$\mu_m = i\lambda c(-3+m,m) - b_{11}c(-2+m,m) + (a_{21} - b_{12})c(-1+m,-1-m) - b_{11})c(-1+m,m) + i\lambda c(m,-3+m) + a_{11}c(m,-2+m) + a_{11}c(m,-1+m).$$

根据引理 1 的递推公式，并利用计算机代数系统 Mathematica，可以得出系统(4)原点的奇点量. 化简得到如下定理.

定理 1 系统(4)在原点的前 8 个奇点量为

$$\mu_1 = a_{21} - b_{21},$$
$$\mu_2 = a_{22}b_{11} - b_{22}a_{11}.$$

(i)当 $a_{11} = b_{11} = 0$，有

$$\mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0,$$
$$\mu_6 = -i\lambda\ (a_{22}^3 + b_{22}^3).$$

(ii)当 $a_{11}b_{11} \neq 0, a_{22} = pa_{11}, b_{22} = pb_{11}$，有

$$\mu_3 = \frac{3}{2}a_{11}b_{11}(-a_{11} + b_{11})p,$$

$$\mu_4 = -\frac{4}{3}ipr_{11}^2(-1 + 4r_{11})\lambda,$$

$$\mu_5 = -\frac{1}{12288}ip(-775 + 1472p - 1600r_{21})\lambda,$$

$$\mu_6 = -\frac{9}{20480000}ip\lambda F_0,$$

$$\mu_7 = -\frac{1}{833869578240}ip\lambda F_1,$$

$$\mu_8 = -\frac{1}{83722484388772970496000}ip\lambda F_2.$$

其中 $r_{21} = \dfrac{a_{21} + b_{21}}{2}, r_{11} = \dfrac{a_{11} + b_{11}}{2}, F_0 = -27875 + 8800\ p + 144384\ p^2, F_1 = -9289202429 + 8988402912\ p + 248278876160\ \lambda^2, F_2 = 352491235226054193210 1 - 23009368392553578692608 0\ \lambda^2 + 32308861750406352470016 00\lambda^4$.

在 μ_k 的表达式中，已经令 $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{k-1} = 0$，$k = 2,3,\cdots,8$.

2 四次多项式系统原点的极限环分支

由文献[11]可知，对系统(2)$|_{\delta=0}$ 的首个非零焦点量 $v_{2m+1}(2\pi)$ 和系统(4)首个非零奇点量 μ_m，它们的关系为

$$v_{2m+1}(2\pi) = \pi\mu_m. \quad (6)$$

在定理 1 的情形(ii)中，记多项式 F_1, F_2 关于变量 λ 的结式为 Resultant (F_1, F_2, λ). 由代数理论知 Resultant $(F_1, F_2, \lambda) = 0$ 是 $F_1 = 0, F_2 = 0$ 的必要条件. 通过结式计算得 $M = \mathrm{Resultant}(F_1, F_2, \lambda)$，$T = \mathrm{Resultant}(F_0, M, p)$，那么

$$T = 1073009953408209581263351296141936366218436851920373431622155277338714657228637739409130358187536660506216153421857750738973318361285618173842343833905589225629456340074270556160000000000000000000 \neq 0,$$

所以 F_0, F_1, F_2 不可能同时为 0.

定理 2 系统(2)$|_{\delta=0}$ 的原点最高阶细焦点的阶数是 8. 系统(2)$|_{\delta=0}$ 的原点成为 8 阶细焦点，即 $v_1(2\pi) - 1 = 0, v_2(2\pi) = v_3(2\pi) = \cdots = v_{15}(2\pi) = 0,$

$v_{17}(2\pi)\neq 0$ 的充要条件是它的伴随系统的系数满足

$a_{21}=b_{21}=r_{21},\lambda\neq 0,p\neq 0,a_{22}=pa_{11},b_{22}=pb_{11},a_{11}=b_{11}=r_{11},r_{11}=\dfrac{1}{4},r_{21}=\dfrac{-775+1472p}{1600},$

$F_0=F_1=0.$ (7)

现在给系统(4)的系数进行小扰动,即 $a_{ij}=a_{ij}(\epsilon),b_{ij}=b_{ij}(\epsilon),\epsilon=(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4,\epsilon_5,\epsilon_6,\epsilon_7,\epsilon_8)$,其中 ϵ_i,$i=1,2,\cdots,8$ 是满足 $0<\epsilon_8\ll\epsilon_7\ll\epsilon_6\ll\epsilon_5\ll\epsilon_4\ll\epsilon_3\ll\epsilon_2\ll\epsilon_1\ll 1$ 的小参数. 由于 A_{ij},B_{ij} 是 a_{ij},b_{ij} 的函数,所以系统(2)相应的也是它的扰动系统.

从定理 1 与(7)式出发,给系统(4)的系数以适当扰动,经过仔细的构造和计算,得到下面的极限环分支定理.

定理 3 如果 δ 和系统(4)的系数满足

$\delta=-\epsilon_8,a_{22}=pa_{11}+i\epsilon_6,b_{22}=pb_{11}-i\epsilon_6,a_{11}=r_{11}-i\epsilon_5,b_{11}=r_{11}+i\epsilon_5,r_{11}=\dfrac{1}{4}+\epsilon_4,$

$p=j_0-\epsilon_2,r_{21}=\dfrac{-775+1472p}{1600}+\epsilon_3,a_{21}=r_{21}-i\epsilon_7,b_{21}=r_{21}+i\epsilon_7,$

$$\lambda=\frac{\sqrt{9289202429-8988402912p}}{84224\sqrt{35}}+\epsilon_1, \quad (8)$$

其中 j_0 为方程 $F_0=-27875+8800p+144384p^2=0$ 的一个根(计算中精确到小数点后 1000 位,为叙述方便,保留其小数点后 10 位,取 $j_0=-0.4709175226$). 相应地,系统(2)的系数也被确定,系统(2)在原点的充分小邻域内可分支出 8 个极限环.

证明 根据(6)式及 $v_1(\theta,\delta)-1=e^{\delta\theta}-1$,有

$v_1(2\pi,\delta)-1=e^{2\pi\delta}-1=-2\pi\epsilon_8+o(\epsilon_8),$

$v_3(2\pi,\delta)=2\pi\epsilon_7+o(\epsilon_7),$

$v_5(2\pi,\delta)=[-1.5707963267+\omega_1(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4),\epsilon_5)]\epsilon_6+o(\epsilon_6),$

$v_7(2\pi,\delta)=[0.2773933180+\omega_1(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4),\epsilon_5)]\epsilon_5+o(\epsilon_5),$

$v_9(2\pi,\delta)=[-9.8970002940+\omega_1(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4,\epsilon_5)]\epsilon_4+o(\epsilon_4),$

$v_{11}(2\pi,\delta)=[3.8660157398+\omega_2(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4,\epsilon_5)]\epsilon_3+o(\epsilon_3),$

$v_{13}(2\pi,\delta)=[-0.0192973133+\omega_3(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4,\epsilon_5)]\epsilon_2+o(\epsilon_2),$

$v_{15}(2\pi,\delta)=[0.0479807999+\omega_4(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4),\epsilon_5]\epsilon_1+o(\epsilon_1),$

$v_{17}(2\pi,\delta)=-2.0456368628+o(1),$

其中 $\omega_1(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4,\epsilon_5)$ 在 $(0,0,0,0,0)$ 解析且满足 $\omega_i(0,0,0,0,0)=0,i=1,2,3,4$. 由于在给系统扰动时已经令 $\epsilon_i,i=1,2,\cdots,8$ 为满足 $0<\epsilon_8\ll\epsilon_7\ll\epsilon_6\ll\epsilon_5\ll\epsilon_4\ll\epsilon_3\ll\epsilon_2\ll\epsilon_1\ll 1$ 的小参数,所以 $v_{2(m-1)+1}(2\pi)v_{2m+1}(2\pi)<0$ 和 $|v_{2(m-1)+1}(2\pi)|\ll|v_{2m+1}(2\pi)|(m=1,2,\cdots,8)$ 成立. 由经典的 Buatin 理论[1]知系统(2)在原点的充分小邻域内可分支出 8 个极限环.

参考文献:

[1] Bautin N. On the number of limit cyckes which appear with the variation fo coefficients from an equilibrium position of focus or center type[J]. Amer Math Soc Trans, 1954, 100:397-413.

[2] Sibirskii K S. On the number of limit cycles in a neighborhood of singular points[J]. Dif Eq,1965(1):36-47.

[3] Lloyd N G,Blows T R,Kalenge M C. Some cubic systems with several limit cycles[J]. Nonlinearity, 1988 (1):653-669.

[4] Ning S,Ma S,Kwek K H,et al. A cubic system with eight small-amplitude limit cycles[J]. Appl Math Lett, 1994, 7:23-27.

[5] Ma S,Ning S. Derive some new conditions on existence of eight limit cycles for a cubic system[J]. Computers and Mathematics with Applications,1997, 33:59-84.

[6] Henryk Zoladek. Eleven small limit cycles in a cubic vector field[J]. Nonlinearity,1995,8:487-506.

[7] Wang Q, Liu Y, Du C. Small limit cycles bifurcating from finefocuspoints in quartic order Z_3 -equivariant vector fields[J]. J Math Anal Appl,2008,337(1):524-536.

[8] Christopher C. Estimating limit cycle bifurcations from centers[C]//Wang Dongming. Differential equations with symboliccomputation. Berlin:Birkhäuser,2005:23-35.

[9] Huang J,Wang F,Wang L,et al. A quartic system and a quintic systemwith fine focus of order 18[J]. Bull Sci math,2008, 132:205-217.

[10] 刘一戎,陈海波. 奇点量公式的机器推导与一类三次系统的前 10 个鞍点量[J]. 应用数学学报:A 辑,2002,25(2):295-302.

[11] Liu Y,Huang W. A cubic system with twelve small amplitude limit cycles[J]. Bull Sci Math,2005,129:83-98.

(责任编辑:尹 闯)