DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2013.02.017

广西科学 Guangxi Sciences 2013,20(2):99～100

素数幂最大公因数序列和的性质*

Properties on the Sum of Sequence for the Greatest Common Divisor of Prime Power

谢 燕

XIE Yan

(阿坝师范高等专科学校预科部,四川汶川 623002)

(Aba Teachers College,Wenchuan,Sichuan,623002,China)

摘要:给出素数幂的最大公因数序列和 $S(n)=\sum_{k=1}^{n}d(k)$,$S_\alpha(n)=\sum_{k=1}^{n}d^\alpha(k)$ 的具体公式,其中,p 为素数,k 为正整数,$d(k)=\gcd(p^k+1,p^{p^{k-1}}+1)$,并证明 $S_\alpha(n)(n\to\infty)$ 是发散的.

关键词:素数 最大公因数序列 发散

中图法分类号:O156.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2013)02-0099-02

Abstract:Let p be a prime number, let k be a positive integer, and $d(k)=\gcd(p^k+1,p^{p^{k-1}}+1)$. The particular formula of the sum of sequence of the greatest common divisor of prime power was given to be as $S(n)=\sum_{k=1}^{n}d(k)$, $S_\alpha(n)=\sum_{k=1}^{n}d^\alpha(k)$, and the scatter of $S_\alpha(n)(n\to\infty)$ was proved.

Key words:prime,greatest common factor sequence, divergence

若 p 是素数,而且对于正整数 k,设

$$d(k)=\gcd(p^k+1,p^{p^{k-1}}+1),\tag{1}$$

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n}d(k),\tag{2}$$

$$S_\alpha(n)=\sum_{k=1}^{n}d^\alpha(k),\tag{3}$$

$$S(\alpha)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{d^\alpha(k)}.\tag{4}$$

文献[1]已证明命题"当 $p\neq 2$ 时,$S(n)=n(p+1)+\sum_{r=1}^{\infty}[n/p^r](p^{p^r}-p^{p^{r-1}})$,其中$[n/p^r]$是 n/p^r 的整数部分"不成立,那么肯定不能由此命题来证明$S(\alpha)$是发散的.本文在此基础上,给出 $S(n)$ 的具体公式,并证明 $S(\alpha)$ 是发散的.

引理 设 p 是不等于 2 的素数,$n\in N$,则不超过 n 且能表示成$k=p^rt(r\geqslant 0$,整数 t 是与 p 互素的正整数)的正奇数 k 的个数为

$$\Phi(k)=\begin{cases}\dfrac{[n/p^r]-[n/p^{r+1}]}{2}, & [n/p^r]\text{ 与 }[n/p^{r+1}]\text{ 同奇偶},\\ \dfrac{[n/p^r]-[n/p^{r+1}]-1}{2}, & [n/p^r]\text{ 为偶数且}[n/p^{r+1}]\text{ 为奇数},\\ \dfrac{[n/p^r]-[n/p^{r+1}]+1}{2}, & [n/p^r]\text{ 为奇数且}[n/p^{r+1}]\text{ 为偶数}.\end{cases}\tag{5}$$

$[x]$ 表示 x 的整数部分.

证明 由文献[2]定理 1.11.1 的证明过程可知,不超过 n 且能表示成$k=p^rt(r\geqslant 0$,整数 t 是与 p 互素的正整数)的正整数 k 的个数恰有$\lfloor n/p^r\rfloor-\lfloor n/p^{r+1}\rfloor$ 个.

当 $k=p^rt$ 时,k 与 t 同奇偶,且对于任意 r,t 的取值可以排列成下列形式:

$1,2,3,\cdots,p-1,(p)$,

$p+1,p+2,p+3,\cdots,2p-1,(2p)$,

$2p+1,2p+2,2p+3,\cdots,3p-1,(3p)$,

收稿日期:2013-03-26

修回日期:2013-04-15

作者简介:谢 燕(1982-),女,讲师,硕士研究生,主要从事数论研究。

*四川省教育自然科学基金项目[10ZC060]资助。

$3p+1, 3p+2, 3p+3, \cdots, 4p-1, (4p),$
$\cdots, [n/p^r].$

其中"()"不是 t 的取值. 由此可以看出：当$\lfloor n/p^r \rfloor$与$\lfloor n/p^{r+1} \rfloor$同奇偶时，$t$ 的奇偶个数各占一半；当$\lfloor n/p^r \rfloor$为奇数且$\lfloor n/p^{r+1} \rfloor$为偶数时，$t$ 为奇数的个数比偶数个数多一个；当$\lfloor n/p^r \rfloor$为偶数且$\lfloor n/p^{r+1} \rfloor$为奇数时，$t$ 为偶数的个数比奇数个数多一个. 因此，引理得证.

以下 $\Phi(k)$ 都表示不超过 n 且能表成 $k=p^r t$（$r \geqslant 0$，整数 t 是与 p 互素的正整数）的正奇数 k 的个数.

定理1 当 $p=2$ 时，$S(n)=n+6$；当 $p \neq 2$ 时，

$$S(n)=\begin{cases} n+\sum_{r=0}^{\infty}\Phi(k)(p^{p^r}+1), n \text{ 为偶数}, \\ n-1+\sum_{r=0}^{\infty}\Phi(k)(p^{p^r}+1), n \text{ 为奇数}. \end{cases} \tag{6}$$

证明 由文献[1]知，当 $p=2$ 时，$S(n)=n+6$；

以下讨论当 $p \neq 2$ 时的情况.

（Ⅰ）当 k 为偶数时，设 q（q 为素数）为 p^k+1 和 $p^{p^{k-1}}+1$ 的一个公因数. 由于 $2 \mid p^k+1, 2 \mid p^{p^{k-1}}+1$，因此 p^k+1 和 $p^{p^{k-1}}+1$ 的素公因数存在，且 $q \neq p$. 又因为

$$p^k \equiv -1(\bmod q), \tag{7}$$
$$p^{p^{k-1}} \equiv -1(\bmod q), \tag{8}$$

那么一定存在正整数 m，使得

$$p^m \equiv -1(\bmod q). \tag{9}$$

设 d 为满足(9)式最小的正整数 m，因此有

$$p^d \equiv -1(\bmod q). \tag{10}$$

根据文献[3]，由(8)式和(10)式可知，$p^{k-1} \equiv 0(\bmod d)$. 那么 d 必为奇数，且由(7)式和(10)式可知，

$$k \equiv 0(\bmod d), \tag{11}$$

即 $k=de$ 且 e 必为偶数. 再由(10)式可知 $p^{de} \equiv 1(\bmod q)$，即

$$p^k \equiv 1(\bmod q). \tag{12}$$

又由(7)式和(12)式可得 $2 \equiv 0(\bmod q)$. 再因为 $p^k+1, p^{p^{k-1}}+1$ 都是偶数，因此当 k 为偶数时，

$$d(k)=2. \tag{13}$$

（Ⅱ）当 k 为奇数时，由(8)式和(10)式知

$$p^{k-1} \equiv 0(\bmod d), \tag{14}$$

那么存在整数 r，使得

$$d=p^r, 0 \leqslant r \leqslant k-1. \tag{15}$$

所以，当 $k=p^r t$（t 是与 p 互素的正奇数）时，又因为 $r<p^r t-1$，得

$$(p^r t, p^{p^r t-1})=p^r. \tag{16}$$

由(7)式知，

$$d(k)=\gcd(p^k+1, p^{p^{k-1}}+1)=p^{p^r}+1. \tag{17}$$

因此由(17)式和(13)式知，(6)式成立.

定理2 当 $p=2$ 时，$S_\alpha(n)=3^\alpha+5^\alpha+n-2$；当 $p \neq 2$ 时，

$$S_\alpha(n)=$$
$$\begin{cases} 2^{\alpha-1}n+\sum_{r=0}^{\infty}\Phi(k)(p^{p^r}+1)^\alpha, n \text{ 为偶数}, \\ 2^{\alpha-1}(n-1)+\sum_{r=0}^{\infty}\Phi(k)(p^{p^r}+1)^\alpha, n \text{ 为奇数}, \end{cases} \tag{18}$$

其中 α 为任意实数，且 $S_\alpha(n)$ 在 $n \to \infty$ 是发散的.

证明 由文献[1]中定理1知，当 $p=2$ 时，

$$d(k)=\begin{cases} 3, k=1, \\ 5, k=2, \\ 1, k \geqslant 3. \end{cases} \tag{19}$$

所以 $S_\alpha(n)=3^\alpha+5^\alpha+n-2$. 又因为 α 是已知的，所以当 $n \to \infty$，$S_\alpha(n)$ 是发散的. 当 $p \neq 2$ 时，由(17)式和(13)式知，(18)式成立. 又因为 $S_\alpha(n)>2^\alpha(n-1)$，所以 $n \to \infty$ 时，$S_\alpha(n)$ 是发散的.

定理3 对于任意实数 α，$S(\alpha)$ 都是发散的.

证明 当 $p=2$ 时，由(19)式知 $S(\alpha)$ 发散；当 $p \neq 2$ 时，由(13)式知，当 k 为偶数时 $d(k)=2$. 又因为 $S(\alpha)>\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{d^\alpha(2k)}=\frac{1}{2^\alpha} * \infty$，所以 $S(\alpha)$ 是发散的.

参考文献：

[1] 乐茂华. 最大公因式序列的和[J]. 天中学刊，2006(4)：15-16.

[2] Bencze M. Proposed problems 7566, 7567 and 7570[J]. Octogon Math Mag, 2005, 13(B): 686.

[3] Möller K. Unters Schrankd für die Anzahl der Primzahlen aus denen, x, y, z der Fermatschen Geichung $x^n+y^n=z^n$ bestehen muss[J]. Math Nachr, 1955, 14: 25-28.

（责任编辑：尹　闯）