DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2013.02.019

广西科学 Guangxi Sciences 2013,20(2):103～106

Banach 空间的 ω-drop 凸性*
ω-Drop Convex of Banach Spaces

季乐文,魏文展,申守伟
JI Le-wen, WEI Wen-zhan, SHEN Shou-wei

(**广西师范学院数学科学学院,广西南宁** 530023)
(Collge of Mathematical Science, Guangxi Teachers Education University, Nanning, Guangxi, 530023, China)

摘要:利用单位球的切片定义 Banach 空间的 ω - drop 凸性,证明 ω - drop 凸空间是 ω - 强光滑的对偶空间,并给出 ω - drop 凸空间的一些性质.

关键词:ω - drop 凸　ω - 强光滑　乘积空间

中图法分类号:O177.2　**文献标识码**:A　**文章编号**:1005-9164(2013)02-0103-04

Abstract: By using the slice of unit ball, we define ω - drop convex of Banach space uniformly and concisely. We show that the ω - drop convex space is the duality of ω - strong smooth space and discuss the properties of the ω - drop convex. At last, we discuss the ω - strong convex in product space $l^p(X_i)$.

Key words: ω - drop convex, ω - strong smooth, product space

2004 年魏文展等[1]提出 k - drop 凸(kDC) 空间的概念,并证明 k - drop 凸是 k - 强光滑的对偶空间. 之后,苏雅拉图[2] 在 2007 年讨论局部完全 k - 光滑和紧局部完全 k - 光滑等性质. 随着研究的进一步深入, 2012 年乌日柴胡等[3] 又提出 ω - 强光滑的概念,并讨论 ω - 强光滑的一些性质,其中 ω - 强光滑是 ω - 强凸的对偶空间. 从上述研究可以看出,ω - 强光滑空间具有一定的研究价值. 本文在上述研究的基础上定义 Banach 空间的 ω - drop 凸,证明 ω - drop 凸空间是 ω - 强光滑的对偶空间,并给出了 ω - drop 凸的一些性质.

1　定义及引理

文中的记号 X, X_i 表示实 Banach 空间,X^*, X_i^* 表示 X, X_i 的共轭空间. $l^p(X_i) = \{x = (x_i): x_i \in X_i, \sum_{i=1}^{\infty} \| x_i \|^p < \infty, i = 1,2,\cdots\}$. $l^p(X_i)$ 中范数定义为 $\| x \| = (\sum_{i=1}^{\infty} \| x_i \|^p)^{\frac{1}{p}}$,可以证明,$l^p(X_i)$ 也是一个实 Banach 空间,其中 $l^q(X_i^*)$ 是 $l^p(X_i)$ 的共轭空间($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). 由于 $f = (f_i) \in l^q(X_i^*)$,$x = (x_i) \in l^p(X_i)$,所以 $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_i)$.

以下是本文用到的一些符号:

$S(X) = \{x \in X: \| x \| = 1\}$;$\sum(x) = \{f \in S(X^*): f(x) = \| x \|\}$;

$S(X^*) = \{f \in X^*: \| f \| = 1\}$;$\sum(f) = \{x \in S(X): f(x) = \| f \|\}$;

$F(f,\delta) = \{x \in B(X): f(x) \geqslant 1 - \delta\}$;

$$A(x_0, x_1, \cdots, x_k) = \sup\left\{ \begin{vmatrix} f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_k) \\ f_1(x_0) & f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_k) \\ f_2(x_0) & f_2(x_1) & \cdots & f_2(x_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_k(x_0) & f_k(x_1) & \cdots & f_k(x_k) \end{vmatrix} \begin{matrix} f, f_i \in S(X^*) \\ 1 \leqslant i \leqslant k \end{matrix} \right\}.$$

若把 $A(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ 的第一行换成 $(1,1,\cdots,1)$,则把它记为 $B(x_0, x_1, \cdots, x_k)$.

定义 1　称 X 为 ω - drop 凸(ωDC),若对任意的 $f \in S(X^*)$,$\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(X)$,$i = 0,1,\cdots,k$,使得 $\lim_{n\to\infty} f(x_{n_0} + x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}) = k+1$,$\forall k \in N$ 成立,则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对紧集.

收稿日期:2012-10-20
修回日期:2013-01-15
作者简介:季乐文(1989-),男,硕士研究生,主要从事泛函分析研究。
*广西自然科学基金项目(0135002)资助。
**通信作者:魏文展(1952-),男,教授,主要从事泛函分析研究。

定义 2[1] 称 X 为 k-drop 凸(kDC),若对 $\forall \varepsilon > 0, f \in S(X^*)$,$\exists \delta > 0$,当 $\{x_i\} \subset S(X), i = 0,1,\cdots,k$ 且满足 $f(\sum_{i=0}^{k} x_i) > k+1-\delta$ 时,有 $B(x_0, x_1, \cdots, x_k) < \varepsilon$.

定义 3[3] 称 X 为 ω-强光滑,若对任意的 $f_0 \in S(X^*), x \in \sum(f_0), \{f_{n_i}\} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(X^*), i = 1,\cdots,k$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}(f_0 + f_{n_1} + \cdots + f_{n_k})(x) = k+1, \forall k \in N$ 成立,则 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对紧集.

注 定义 3 与下面的描述等价:若对任意的 $x \in S(X), \{f_{n_i}\} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(X^*), i = 0,1,\cdots,k$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}(f_{n_0} + f_{n_1} + \cdots + f_{n_k})(x) = k+1, \forall k \in N$ 成立,则 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对紧集.

证明 必要性. 对 $\forall x \in S(X), \{f_{n_i}\} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(X^*), i = 0,1,\cdots,k$,由于 $f_{n_0}(x) \to 1$,又根据 Alaoglu 定理知:$\{f_{n_0}\}$ 是弱* 紧的,所以存在 $\{n\}$ 的子列 $\{n_k\}$(这里仍记为 $\{n\}$),使得 $\omega^*\text{-}\lim\limits_{n} f_{n_0}(x) = f_0(x), f_0 \in \Sigma(x)$. 故 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对紧集.

充分性是显然的.

定义 4[4] 称 X 为 ω-强凸,若对任意的 $x_0 \in S(X), f \in \sum(x_0), \{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(X), i = 1,2,\cdots,k$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_0 + x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}) = k+1, \forall k \in N$ 成立,则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对紧集.

定义 5[5] 设 X, Y 是线性赋范空间,T 是 X 到 Y 的连续线性算子,定义 $T^*: Y^* \to X^*, (T^* y^*)(x) = y^*(Tx), y^* \in Y^*$.

引理 1[5] 令映射 $\pi: X \to X/M$, M 是 X 的闭线性子空间,为 $\pi(x) = [x]$,且称 π 是商映射,则 π 为连续线性算子.

引理 2[6] 若存在紧集 $C \subset X, \{x_n\} \subset X$,使得对所有的 n 都有 $d(x_n, C) < \varepsilon$,则存在子序列 $\{x_{n_l}\} \subset \{x_n\}$,使得 $\|x_{n_l} - x_{n_k}\| < 2\varepsilon$.

引理 3[7] 设 $\pi: X \to X/M$ 是商映射,M 是 X 的闭线性子空间,则 π 是共轭算子 $\pi^*: (X/M)^* \to M^0$ 的等距同构. 其中 $M^0 = \{x^* \in X^*: x^*(x) = 0, x \in M\}$.

引理 4[8] 设 $x = (x_i) \in l^p(X_i), x_n = (x_n^i) \in l^p(X_i), 1 < p < \infty$,那么在 $l^p(X_i)$ 中 $x_n \to x$,当且仅当以下条件成立:(1) 对每个 i,在 X_i 中 $x_n^i \to x_i$. (2) $\|x_n\| \to \|x\|$,对一切 n 有

$$(\sum_{i=1}^{\infty} \| x_n^i \|)^{1/p} \to (\sum_{i=1}^{\infty} \| x_i \|)^{1/p}.$$

引理 5[9] X 是 kDC 的充分必要条件是,对 $\forall \varepsilon > 0, f \in S(X^*)$,$\exists \delta > 0$,当 $\{x_i\} \subset S(X), i = 0,1,\cdots,k$ 且满足 $f(\sum_{i=0}^{k} x_i) > k+1-\delta$ 时,有 $A(x_0, x_1, \cdots, x_k) < \varepsilon$.

2 主要结果

定理 1 若 X 是 ω-强凸,M 是 X 的自反闭子空间,则 X/M 也是 ω-强凸.

证明 若 $[x] \in S(X/M), [x_n] \in S(X/M), f \in S((X/M)^*), f([x]) = 1$. 由于 M 是 X 的自反闭子空间,所以存在 $[y]$,使得 $\|y\| = \|[x]\| = 1$, $[y] = [x]$;同样也存在 $[y_n]$,使得 $\|y_n\| = \|[x_n]\| = 1$,且 $[y_n] = [x_n]$. 即 $y \in S(X), y_n \in S(X)$. 令 $\pi: X \to X/M$ 是商映射,则 $\|\pi\| = 1$(事实上,显然 $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$,故 $\|\pi\| \leqslant 1$). 又假设 $x \overline{\in} M$,根据 Hahn-Banach 定理知:$\exists f \in S(X^*)$,使 $f(x) \neq 0, f(y) = 0, y \in M$. 任取 $z \in S(X)$,则 $f(z) = 1 - \varepsilon$. 对任意 $\varepsilon > 0$,有 $\|z - y\| \geqslant f(z-y) = 1 - \varepsilon, y \in M$,故 $\|\pi(z)\| \geqslant 1-\varepsilon$,从而 $\|\pi\| \geqslant 1-\varepsilon$,即 $\|\pi\| = 1$,由定义 5,引理 1,引理 3 知,π^* 建立了 $(X/M)^*$ 与 M^0 之间的等距同构. 然而对于 $f \in S((X/M)^*), f([x]) = 1$, 有 $\pi^* f \in S(X^*)$, $\pi^* f(y) = f([y]) = f(x) = 1$. 因此还有

$$\pi^* f(y + \sum_{i=1}^{k} y_n^i) = f([y + \sum_{i=1}^{k} y_n^i]) = f([y] + \sum_{i=1}^{k} [y_n^i]) = f([x] + \sum_{i=1}^{k} [x_n^i]) = f([x + \sum_{i=1}^{k} x_n^i]) = k+1.$$

又因为 X 是 ω-强凸,所以 $\{y_n\}$ 是相对紧集,即存在 $\{y_n\}$ 的子列 $\{y'_n\}$,使得 $y'_n \to y, y \in X$. 故对任意的 $\varepsilon > 0$,当 $n > N$ 时有 $\|y'_n - y\| < \varepsilon$. $\|[y'_n] - [y]\| = \|[y'_n - y]\| \leqslant \|y'_n - y\| < \varepsilon$, $\{[y'_n]\}$ 是相对紧集,而 $\{[y'_n]\} \subset \{[x_n]\}$,则 $\{[x_n]\}$ 是相对紧集. 所以 X/M 是 ω-强凸.

推论 1 若 X 是 ωDC,M 是 X 的自反闭子空间,则 X/M 也是 ωDC.

定理 2 (1) X 是 kDC 的充分必要条件是,对 $\forall \varepsilon > 0, f \in S(X^*)$,$\exists \delta > 0$,当 $x_0, x_1, \cdots, x_k \in S(X)$ 且 $d(x_{i+1}, \mathrm{span}(x_0, x_1, \cdots, x_i)) \geqslant \varepsilon, 0 \leqslant i < k$ 时,有 $f(\sum_{i=0}^{k} x_i) \leqslant k+1-\delta$.

(2) 若 X 是 kDC,则 X 是 ωDC.

证明 (1) 必要性. 若 $\exists \varepsilon > 0, f \in S(X^*)$,当 $\{x_i\} \subset S(X), i = 0,1,\cdots,k, d(x_{l+1}, \mathrm{span}(x_0, x_1, \cdots, x_l)) = d_{l+1} \geqslant \varepsilon, 0 \leqslant i < k$ 时,有 $f(\sum_{i=0}^{k} x_i) > k+1$

$-\frac{1}{n}$. 由文献[10]知 $B(x_0,x_1,\cdots,x_k)\geqslant d_1\cdots d_k\geqslant \varepsilon^k$. 故 X 不是 kDC. 从而和已知相矛盾.

充分性. 若 X 不是 kDC，则由引理5知，$\exists\varepsilon>0$，$f\in S(X^*)$，$\{x_i\}\subset S(X)$，$i=0,1,\cdots,k$，使得 $f(\sum_{i=0}^{k}x_i)>k+1-\frac{1}{n}$，$n\in N$，但是 $A(x_0,x_1,\cdots,x_k)\geqslant\varepsilon$. 因 $\mathrm{span}(x_0,x_1,\cdots,x_l)$ 有限维，故存在 $y_{l+1}\in\mathrm{span}(x_0,x_1,\cdots,x_l)$，使得 $d_l=d(x_l,\mathrm{span}(x_0,x_1,\cdots,x_l))=\|x_{l+1}-y_{l+1}\|$. 由行列式性质可得：

$$\varepsilon\leqslant A(x_0,x_1,\cdots,x_k)\leqslant(k+1)!\|x_1-y_1\|\cdots\|x_l-y_l\|,$$

故 $d_l\geqslant\varepsilon_0(1\leqslant l\leqslant k,n\in N,\varepsilon_0=\inf\limits_{n}\min\limits_{1\leqslant l\leqslant k}d_l)$，而 $f(\sum_{i=0}^{k}x_i)>k+1-\frac{1}{n}\to k+1$. 得出矛盾.

(2) 若 X 不是 ωDC，则存在 $f\in S(X^*)$，$\{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X)$，$i=0,1,\cdots,k$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{n_0}+x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})=k+1$，$\forall k\in N$. 但由于 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是相对紧集. 由文献[11]中的引理2知，存在 $\varepsilon>0$，使得 $d(x_{n_{l+1}},\mathrm{span}(x_{n_0},x_{n_1},\cdots,x_{n_l}))\geqslant\varepsilon$，$0\leqslant l<k$ 时，有 $f(\sum_{i=0}^{k}x_{n_i})>k+1-\frac{1}{n}$. 故 X 不是 kDC.

定理3 (1) 若 X^* 是 ωDC，则 X 是 ω-强光滑. (2) 若 X^* 是 ω-强光滑，则 X 是 ωDC.

证明 (1) 对 $\forall\{f_{n_i}\}\subset\{f_n\}\subset S(X^*)$，$x\in S(X)$，$i=0,1,\cdots,k$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}(f_{n_0}+f_{n_1}+\cdots+f_{n_k})(x)=k+1$，$\forall k\in N$. 而 $S(X)\subset S(X^{**})$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(x)(f_{n_0}+f_{n_1}+\cdots+f_{n_k})=k+1$，$\forall k\in N$. 又因为 X^* 是 ωDC，所以 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对紧集. 故 X 是 ω-强光滑. (2) 对 $\forall\{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}\subset S(X)$，$f\in S(X^*)$，$i=0,1,\cdots,k$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{n_0}+x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})=k+1$，$\forall k\in N$. 而 $S(X)\subset S(X^{**})$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n_0}+x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})(f)=k+1$，$\forall k\in N$. 又因为 X^* 是 ω-强光滑，所以 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对紧集. 故 X 是 ωDC.

推论2 若 X 是自反的，那么 X 是 ωDC 的充分必要条件是 X^* 是 ω-强光滑的.

证明 由定理4和 X 是自反的知，推论2成立.

定理4 X 是 ωDC 的充分必要条件是，$\forall\varepsilon>0$，$f\in S(X^*)$，$\exists\delta>0$ 及紧集 $C\subset X$，使得 $F(f,\delta)\subset\{y\in X;d(y,C)<\varepsilon\}$.

证明 必要性. 对 $\forall\varepsilon>0$，$f\in S(X^*)$，任意紧集 $C\subset X$，但 $F(f,\delta)\not\subseteq\{y\in X;d(y,C)<\varepsilon\}$，取 $x_{n_0}\in F(f,\frac{1}{n})$. 若令 $C_0=\{y\in\mathrm{span}(x_{n_0});\|y\|\leqslant 3\}$，则 C_0 是一维紧集. 因为 $F(f,\delta)\not\subseteq\{y\in X;d(y,C)<\varepsilon\}$，故存在 $x_{n_1}\in F(f,\frac{1}{n})$，且满足 $d(x_{n_1},\mathrm{span}(x_{n_0}))=d(x_{n_1},C_0)\geqslant\varepsilon$. 令 $C_1=\{y\in\mathrm{span}(x_{n_0},x_{n_1});\|y\|\leqslant 3\}$，而 $F(f,\delta)\not\subseteq\{y\in\mathrm{span}(x_{n_0},x_{n_1});d(y,C_1)<\varepsilon\}$，故存在 $x_{n_2}\in F(f,\frac{1}{n})$，且满足 $d(x_{n_2},C_1)\geqslant\varepsilon$. 依次推理可得：$x_{n_0},x_{n_1},\cdots,x_{n_k}\in F(f,\frac{1}{n})$. 但是 $d_i=d(x_{n_i},\mathrm{span}(x_{n_0},x_{n_1},\cdots,x_{n_{i-1}}))=d(x_{n_i},C_{i-1})\geqslant\varepsilon$，$1\leqslant i\leqslant k$. 又由于 $x_{n_0},x_{n_1},\cdots,x_{n_k}\in F(f,\frac{1}{n})$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{n_0}+x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})=k+1$，$\forall k\in N$. 这与 X 是 ωDC 矛盾.

充分性. 若 X 不是 ωDC，则存在 $f\in S(X^*)$，$\{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X)$，$i=0,1,\cdots,k$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{n_0}+x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})=k+1$，$\forall k\in N$，但 $\{x_n\}$ 不是相对紧集. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{n_0}+x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})=k+1$，$\forall k\in N$，那么存在 $\delta=\frac{1}{2n}$，使 $f(x_{n_0}+x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})>k+1-\frac{1}{2n}$，从而有 $f(x_{n_i})>1-\frac{1}{2n}$，$i=0,1,\cdots,k$.（否则 $f(x_{n_i})\leqslant 1-\frac{1}{2n}$，则 $f(x_{n_0}+\cdots+x_{n_{i-1}}+x_{n_{i+1}}+\cdots+x_{n_k})>k$，但 $|f(x_{n_0}+\cdots+x_{n_{i-1}}+x_{n_{i+1}}+\cdots+x_{n_k})|\leqslant\|f\|\|x_{n_0}+\cdots+x_{n_{i-1}}+x_{n_{i+1}}+\cdots+x_{n_k}\|\leqslant k$. 矛盾）. 由引理2知，存在子序列 $\{x'_{n_l}\}\subset\{x_{n_l}\}$（这里的子序列仍记为 $\{x_{n_l}\}$），使 $\|x_{n_k}-x_{n_l}\|<2\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}$. 由对角线法得 $\{x_{n_l}\}$ 的基本子列，则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对紧集. 这与 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是相对紧集矛盾.

定理5 设 Banach 空间 X_i 是 ω-强凸，则 $l^p(X_i)$，$1<p<\infty$ 也是 ω-强凸.

证明 设 $X\triangleq l^p(X_i)$，$1<p<\infty$，$x=(x_i)\in S(X)$，$x_n=(x_n^i)\in S(X)$，$i=1,2,\cdots$

(1) 若 $x_i=0$，则可取 $f_i=0$.

(2) 若 $x_i\neq 0$，则有 $\frac{x_i}{\|x_i\|}\in S(X_i)$. 根据 Hahn-Banach 定理知，存在 $f_i\in S(X_i^*)$，使 $f_i(\frac{x_i}{\|x_i\|})=1$. 若令 $f=(\|x_i\|^{p-1}f_i)$，则有 $\|f\|_q=1$，$f(x)=1$，因此 $f\in\sum(x)$. 由于 $f(x_{n_0})\to 1$，令 $a=(\|x_i\|)$，$b=(\|x_{n_0}^i\|)$，$c=(f_i(\|x_{n_0}^i\|))$，$g=(\|x_i\|^{p-1})$，则 $a,b,c,\in l^p$，$\|a\|=\|x\|_p=1$，$g\in l^q$ 且 $\|g\|=1$，$\|b\|\leqslant 1$，$g(c)=f(x_{n_0})\to 1=$

$g(a)$. 易证 $\|a+c\| \to 2$, $\|a+b\| = (\sum_{i=1}^{\infty}(\|x_{n_0}^i\| + \|x_i\|)^p)^{\frac{1}{p}} \geqslant (\sum_{i=1}^{\infty}(f(x_{n_0}^i)+\|x_i\|)^p)^{\frac{1}{p}} = \|a+c\|$. 故有 $\|a+b\| \to 2$. 因为 l^p 是一致凸，则有 $b \to a$, $c \to a$，即

$$f_i(x_{n_0}^i) \to \|x_i\|, \|x_{n_0}^i\| \to \|x_i\|. \quad (1)$$

1) 若 $x_i \neq 0$，则 $f_i(\frac{x_{n_0}^i}{\|x_{n_0}^i\|}) \to 1$. 类似可证 $f_i(\frac{x_{n_j}^i}{\|x_{n_j}^i\|}) \to 1, j = 0,1,\cdots,k$. 故有 $f_i(\sum_{j=0}^{k}\frac{x_{n_j}^i}{\|x_{n_j}^i\|}) \to k+1$. 而 X_i 是 ω-强凸，所以 $\{\frac{x_n^i}{\|x_n^i\|}\}$ 是相对紧集. 因此有 $\frac{x_n^i}{\|x_n^i\|} \to \frac{x_i}{\|x_i\|}$. 由(1)式得 $x_n^i \to x_i$.

2) 若 $x_i = 0$，显然 $\frac{x_n^i}{\|x_n^i\|} \to \frac{x_i}{\|x_i\|}$ 成立. 由引理 4 知 $x_n \to x$. 所以 $\{x_n\}$ 是相当紧集，即 $l^p(X_i)$ 是 ω-强凸的.

例 1 存在一个无穷维 X 是 ωDC，但 X 不是 $(k-1)DC$.

证明 设 $k \geqslant 2, k \in N^+, i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. 对每一个 $x = (a_1, a_2, \cdots) \in l^2$，令

$$\|x\|_{i_1,i_2,\cdots,i_k}^2 = (\sum_{j=1}^{k} |a_{ij}|)^2 + \sum_{i \neq i_1,i_2,\cdots,i_k} a_i^2.$$

由文献[12]知，$x_{i_1,i_2,\cdots,i_k} = (l^2, \|\cdot\|_{i_1,i_2,\cdots,i_k})$ 是 kUR，从而 X 是 kDC. 由定理 2 知，X 是 ωDC，但 X 不是 $(k-1)DC$. 令 $e_{ij} = (\underbrace{0,0,\cdots,1}_{i},0,\cdots), j = 1,2,\cdots,k$，则 $\|e_{ij}\|_{i_1,i_2,\cdots,i_k} = 1, j = 1,2,\cdots,k$，而且 $\{e_{ij}\}_{j=1}^{k}$ 是线性无关的，$\sum_{j=1}^{k}\|e_{ij}\|_{i_1,i_2,\cdots,i_k} = k$，故 $x_{i_1,i_2,\cdots,i_k}$ 不是 $(k-1)$ 严格凸，因而 $x_{i_1,i_2,\cdots,i_k}$ 不是 $(k-1)DC$.

参考文献：

[1] Wei W Z, Xu H B. Some properties of k-drop convex spaces[J]. Journal of Mathematics, 2004, 24(2): 168-172.

[2] Suyalatu W. Some geometric properties related to smoothness of Banach spaces[J]. Nonlinear Analysis, 2007, 66: 723-734.

[3] 乌日柴胡，苏雅拉图. 关于 ω-强凸的一点注记[J]. 数学杂志，2012，32(1)：167-172.

[4] 方习年. 关于 Banach 空间 k-致凸及 k-致光滑性[J]. 数学研究与评论，2000，20(4)：583-587.

[5] 刘培德. 泛函分析基础[M]. 武汉：武汉大学出版社，2002.

[6] 郑喜印. 紧-凸性与紧-光滑性[J]. 数学进展，1995，24(4)：342-347.

[7] 俞鑫泰. Banach 空间的几何理论[M]. 上海：华东师范大学出版社，1986.

[8] Leonard I E. Banach sequences spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1976(54): 245-265.

[9] 周文，巩万中. k-drop 凸空间与 k-drop 凸空间[J]. 应用泛函分析学报，2008，10(4)：373-377.

[10] Bernal J, Sullivan F. Muli-dimenional volumes, supper reflexivity and formal structure in Banach space[J]. Illinois J Math, 1983, 27: 501-515.

[11] 宋寿柏. 紧局部完全 ω 凸空间[J]. 数学杂志，1994，14(1)：28-32.

[12] Borluh L, Yu X T. On the k-uniform rotund and the fully convex Banach spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1985, 110(2): 407-410.

（责任编辑：尹　闯）

（上接第 102 页 Continue from page 102）

Y_2 的密度函数为

$$g_2(y_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y_1, y_2)\mathrm{d}y_1 = 16n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{k+1}\binom{n-2}{k}\binom{k+1}{j}\frac{2^k(k-j+2)!}{\theta^{j+1}(2n)^{k-j+3}} \cdot y_2^j e^{-\frac{2(n-1)y_2}{\theta}}, y_2 \geqslant 0.$$

由于 $g(y_1, y_2) \neq g_1(y_1)g_2(y_2)$，且 $g_1(y_1)$ 与 $g_2(y_2)$ 的密度函数不相同，所以 $X_{(1)}$ 与 $X_{(2)} - X_{(1)}$ 不独立，且不同分布.

推论 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，且都服从(1)式的艾拉姆咖分布，$X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}$ 为其次序统计量，则其次序统计量的间隔 $X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \cdots, X_{(n)} - X_{(n-1)}$ 不独立，且不同分布.

参考文献：

[1] 吕会强，高连华，陈春良. 艾拉姆咖分布及其在保障性数据分析中的应用[J]. 装甲兵工程学院学报，2002，16(3)：48-52.

[2] 潘高田，王保恒，陈春良，等. 艾拉姆咖分布小样本区间估计和假设问题研究[J]. 数理统计与管理，2009，28(3)：468-472.

[3] 顾蓓青，王蓉华，徐晓岭. 艾拉姆咖分布的统计分析[C]. 2011 年全国机械行业可靠性技术学会暨第四届可靠性工程分会第三次全体委员大会论文集，2011：65-67.

[4] 茆诗松，程依明，濮晓龙，等. 概率论与数理统计教程[M]. 第 2 版. 北京：高等教育出版社，2011：271-276.

（责任编辑：尹　闯）