DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2013.02.002

**广西科学** Guangxi Sciences 2013,20(2):121~124

# 二层信用条件下多物品经济生产量模型*

# An Economic Production Quantity Model for Multi-item under the Condition of Two Levels of Trade Credit

潘义前[1],周优军[2]

PAN Yi-qian[1],ZHOU You-jun[2]

(1.**广西民族师范学院数学与计算机科学系,广西崇左** 532200;2.**柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系,广西柳州** 545004)

(1.Department of Mathematics and Computer Sciences,Guangxi Normal University for Nationalities,Chongzuo,Guangxi,532200,China;2.Department of Mathematics and Computer Science,Liuzhou Teachers College,Liuzhou,Guangxi,545004,China)

**摘要**:在二层信用条件下,建立零售商相关成本极小化的多物品经济生产量模型,讨论模型最优解的存在性、唯一性以及寻求方法,并用具体的数值例子验证模型的有效性.

**关键词**:经济生产量　库存模型　二层信用

**中图法分类号**:O227　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2013)02-0121-04

**Abstract**:An EPQ model is developed to minimize relevant cost of retailer for multi-item under the condition of two levels credit trade. The existence and uniqueness of the optimal solution to the present model are discussed,and numerical examples are given to illustrate the developed model.

**Key words**:EPQ,inventory model,two levels trade credit

信用支付是当代商业活动中常见的一种短期商业信贷方式,它可以刺激买方增加订购量,减少卖方的库存费用.若供应商提供给零售商信用支付期的同时零售商也提供给顾客信用支付期,则称此商业活动为二层信用支付.近几年来,有关二层信用策略的库存问题引起了许多学者的兴趣.例如,文献[1]建立二层信用期下的两货栈库存模型,并采用均值不等式证明模型存在唯一的最优解。文献[2]假设需求率是时间的线性递增函数来研究二层信用策略下的零售商的最优订购策略.文献[3]考虑零售商允许顾客货款部分延期支付的二层信用期的库存问题.文献[4]在模糊环境下讨论关于二层信用策略的库存模型的最优解.文献[5]根据物品的种类不同提供给顾客不同的信用期,研究二层信用策略下经济订货量(EOQ)模型.由于现实生活中,补货率往往是有限的,因而不少研究者都在补货有限的条件下研究二层信用支付的库存问题.具有代表性的研究成果有,文献[6]建立补货率与需求率均为常数的经济生产量(EPQ)模型,并讨论经济模型的最优解的存在性与唯一性.文献[7]进一步考虑物品有变质的情形,分析了EPQ模型的最优订货策略问题.文献[8]探讨需求与零售商提供给顾客信用期限有关的EPQ模型,而文献[9]进一步考虑销售价格对需求的影响、物品有变质的情形,对文献[8]的结论进行了扩展.

基于二层信用策略的EPQ模型中,考虑多物品情形的研究成果很少.然而由于商品需求的多样性,多物品库存模型也受到了越来越多研究者的关注,如:文献[10]研究多物品多约束条件的EOQ模型,并采用遗传算法求其最优解.文献[11]讨论需求受时间与销售措施影响的多物品库存模型的最优解.文献[12]在模糊环境下,建立需求受价格影响的多物品EPQ模型.文献[13]探讨需求受库存水平影响的易变质多物品库存模型的最优订解.

本文在上述文献的基础上,继续研究二层信用策

**收稿日期**:2012-10-26

**修回日期**:2012-12-15

**作者简介**:潘义前(1975-),男,讲师,主要从事供应链库存模型优化研究。

*国家自然科学基金项目(71261002),广西教育厅基金项目(201204LX508)资助。

略下的多物品 EPQ 模型，证明模型最优解的存在性与唯一性，并给出数值例子来验证模型的有效性.

## 1 符号说明与假设

### 1.1 符号说明

$D_i$ 表示第 $i$ 类商品的年需求率，$P$ 表示年补货率 $P \geqslant D_i$，$\rho_i = 1 - D_i/P$，$A$ 表示每一个周期的订购费，$T$ 表示补货周期，$h$ 表示单位商品单位时间的库存维持费，$c_i$ 表示第 $i$ 类商品的单位购买成本，$s_i$ 表示第 $i$ 类商品的单位销售价格，$I_e$ 表示每年每单位货币的收益利率，$I_c$ 表示每年每单位货币的支付利率.

### 1.2 模型假设

(1)不允许缺货，提前期为零.

(2)供应商提供给零售商信用期 $M$，在信用期 $[0,M]$ 之内，零售商不须向供应商支付任何费用，零售商的销售收入可以存入银行赚得利息；信用期结束时，零售商须在时点 $t = M$ 支付全部货款，而且还要为未销售及已经销售但未收到货款的商品支付利息.

(3)零售商提供给顾客的第 $i$ 类物品的信用期为 $N_i(N_1 \leqslant N_2 \leqslant \cdots \leqslant N_n \leqslant M)$，假如顾客在时刻 $t = t_0$ 时购买商品，那么需在时刻 $t = t_0 + N_i$ 时付清货款($i = 1,\cdots,n$). 其中利息计算方法参考文献[6].

## 2 模型建立

在一个订货周期 $[0,T]$ 内，零售商的各项成本费用如下.

订购费：$A$.

存储费：$\sum_{i=1}^{n} hD_iT^2\rho_i/2$.

支付利息与收益利息：根据假设，需分 $T + N_n \leqslant M$、$T + N_m \leqslant M < T + N_{m+1}(1 \leqslant m \leqslant n-1)$ 与 $M < T + N_1$ 三种情形来计算.

**情形 1** $T + N_n \leqslant M$. 在信用期内零售商已经销售完所有商品，所以支付利息 $IP_1 = 0$；在 $[0,M]$ 内可以获得利息，所以收益利息为

$$IE_1 = I_e\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{s_iD_iT^2}{2} + s_iD_iT(M - N_i - T)\right].$$

此情形下的平均成本为

$$TVC_1(T) = \frac{A}{T} + \sum_{i=1}^{n}\frac{hD_iT\rho_i}{2} - I_e\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{s_iD_iT}{2} + s_iD_i(M - N_i - T)\right]. \tag{1}$$

**情形 2** $T + N_m \leqslant M < T + N_{m+1}$，$m = 1,2,\cdots,n-1$. 因为在信用期内零售商已经销售完 $m$ 类商品，所以有 $m$ 类商品的销售收入可以获得收益利息，而 $n-m$ 类商品未能在信用期内销售完，因此在 $[0,M-N_j]$ 内可以获得第 $j$ 类商品销售收入的利息，在 $[M-N_j,T]$ 内应为第 $j(j = m+1,\cdots,n)$ 类未销售以及已销售但未收到货款的商品支付利息. 所以收益利息 $IE_{2,m}$ 与支付利息 $IP_{2,m}$ 分别是

$$IE_{2,m} = I_e\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{s_iD_iT^2}{2} + s_iD_iT(M - N_i - T)\right] + \frac{1}{2}\sum_{i=m+1}^{n}s_iI_eD_i(M - N_i)^2,$$

$$IP_{2,m} = \frac{1}{2}\sum_{i=m+1}^{n}c_iI_cD_i(T + N_i - M)^2.$$

此情形下的平均成本为

$$TVC_{2,m}(T) = \frac{A}{T} + \sum_{i=1}^{n}\frac{hD_iT\rho_i}{2} + \frac{1}{2T}\sum_{i=m+1}^{n}c_iI_cD_i(T + N_i - M)^2 - I_e\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{s_iD_iT}{2} + s_iD_i(M - N_i - T)\right] - \frac{1}{2T}\sum_{i=m+1}^{n}s_iI_eD_i(M - N_i)^2,\ m = 1,2,\cdots,n-1. \tag{2}$$

**情形 3** $M < T + N_1$. 在 $[0,M-N_i]$ 内可获得 $i$ 类商品销售收入的利息，在 $[M-N_i,T]$ 内应为第 $i$ 类没有销售以及已销售但未收到货款的商品支付利息，其中 $i = 1,\cdots,n$. 所以收益利息 $IE_3$ 与支付利息 $IP_3$ 分别为 $IE_3 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}s_iI_eD_i(M - N_i)^2$，$IP_3 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}c_iI_cD_i(T + N_i - M)^2$. 此情形下的平均成本为

$$TVC_3(T) = \frac{A}{T} + \sum_{i=1}^{n}\frac{hD_iT\rho_i}{2} + \frac{1}{2T}\sum_{i=1}^{n}c_iI_cD_i(T + N_i - M)^2 - \frac{1}{2T}\sum_{i=1}^{n}s_iI_eD_i(M - N_i)^2. \tag{3}$$

因此在一个订货周期 $[0,T]$ 内库存系统的相关成本 $TVC(T)$ 可以表示为

$$TVC(T) = \begin{cases} TVC_1(T),\ T + N_n \leqslant M; \\ TVC_{2,m}(T),\ T + N_m \leqslant M \leqslant T + N_{m+1},\ 1 \leqslant m \leqslant n-1; \\ TVC_3(T),\ M \leqslant T + N_1. \end{cases}$$

我们的目标是确定最优的订货周期 $T^*$ 使得 $TVC(T)$ 最小，所以其数学模型为

$$\min TVC(T) \quad \text{s.t. } T > 0. \tag{4}$$

## 3 模型的最优解

**引理 1** $TVC_1(T)$ 在区间$[0,M - N_n]$上存在

唯一的最小值解 $T_1^*$ .

**证明** 分别求 $TVC_1(T)$ 一阶导数与二阶导数,得

$$TVC'_1(T)=-\frac{A}{T^2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}D_i(h\rho_i+s_iI_e),$$

$TVC''_1(T)=\frac{2A}{T^3}>0$ .

令 $TVC'_1(T)=0$ ,得

$$T_1=\sqrt{2A/\sum_{i=1}^{n}D_i(h\rho_i+s_iI_e)}. \tag{5}$$

易见,在 $(0,+\infty)$ 上 $TVC_1(T)$ 是严格凸函数,因此函数 $TVC_1(T)$ 在 $(0,T_1]$ 上递减,在 $[T_1,+\infty)$ 上递增. 当 $T_1+N_n\leqslant M$ ,时 $T_1^*=T_1$ ;当 $T_1+N_n>M$ 时 $T_1^*=M-N_n$ .

**引理 2** $TVC_{2,m}(T)$ 在区间 $[M-N_{m+1},M-N_m]$ 上存在唯一的最小值点 $T_{2,m}^*,m=1,2,\cdots,n-1$.

**证明** 分别求 $TVC_{2,m}(T)$ 的一阶导数与二阶导数,得

$$TVC'_{2,m}(T)=\frac{-1}{2T^2}[2A-\sum_{i=m+1}^{n}(s_iI_e-c_iI_c)D_i\,(M-N_i)^2]+\sum_{i=1}^{n}\frac{hD_i\rho_i}{2}+\sum_{i=m+1}^{n}\frac{c_iI_cD_i}{2}+\sum_{i=1}^{m}\frac{s_iI_eD_i}{2}.$$

$$TVC''_{2,m}(T)=\frac{1}{T^3}[2A-\sum_{i=m+1}^{n}(s_iI_e-c_iI_c)D_i\,(N_i-M)^2].$$

若 $2A-\sum_{i=m+1}^{n}(s_iI_e-c_iI_c)D_i\,(M-N_i)^2>0$ ,则 $TVC''_{2,m}(T)>0$,故 $TVC_{2,m}(T)$ 是$(0,+\infty)$ 上的严格凸函数. 令 $TVC'_{2,m}(T)=0$ ,得

$$T_{2,m}=\sqrt{\frac{2A-\sum_{i=m+1}^{n}D_i\,(N_i-M)^2(s_iI_e-c_iI_c)}{\sum_{i=1}^{n}hD_i\rho_i+\sum_{i=1}^{m}s_iI_eD_i+\sum_{i=m+1}^{n}c_iI_cD_i}}. \tag{6}$$

所以 $TVC_{2,m}(T)$ 在 $(0,T_{2,m}]$ 单调递减,在 $[T_{2,m},+\infty)$ 单调递增. 因此,当 $T_{2,m}+N_m\leqslant M<T_{2,m}+N_{m+1}$ 时, $T_{2,m}^*=T_{2,m}$. 当 $T_{2,m}+N_m>M$ 时, $T_{2,m}^*=M-N_m$. 当 $M\geqslant T_{2,m}+N_{m+1}$ 时, $T_{2,m}^*=M-N_{m+1}$ .

若 $2A-\sum_{i=m+1}^{n}(s_iI_e-c_iI_c)D_i\,(N_i-M)^2\leqslant 0$ ,有 $TVC'_{2,m}(T)>0$ ,可知 $TVC_{2,m}(T)$ 是单调递增函数,其最小值在 $T_{2,m}^*=M-N_{m+1}$ 取得.

**引理 3** $TVC_3(T)$ 在区间 $[M-N_1,+\infty)$ 上存在唯一的最小值点 $T_3^*$ .

**证明** 分别求 $TVC_3(T)$ 的一阶导数与二阶导数得

$$TVC'_3(T)=\frac{-1}{2T^2}[2A-\sum_{i=1}^{n}(s_iI_e-c_iI_c)D_i\,(M-N_i)^2]+\sum_{i=1}^{n}\frac{(h\rho_i+c_iI_c)D_i}{2},$$

$$TVC''_3(T)=\frac{1}{T^3}[2A-\sum_{i=1}^{n}(s_iI_e-c_iI_c)D_i\,(M-N_i)^2].$$

若 $2A-\sum_{i=1}^{n}(s_iI_e-c_iI_c)D_i\,(M-N_i)^2>0$, $TVC''_3(T)>0$,则 $TVC_3(T)$ 是$(0,+\infty)$ 严格凸函数,令 $TVC'_3(T)=0$ ,得

$$T_3=\sqrt{\frac{2A-\sum_{i=1}^{n}D_i\,(N_i-M)^2(s_iI_e-c_iI_c)}{\sum_{i=1}^{n}D_i(h\rho_i+c_iI_c)}}. \tag{7}$$

因此函数 $TVC_3(T)$ 在 $(0,T_3]$ 上递减,在 $[T_3,+\infty)$ 上递增. 当 $M<T_3+N_1$ 时, $T_3^*=T_3$. 当 $M\geqslant T_3+N_1$ 时, $T_3^*=M-N_1$ . 若 $2A-\sum_{i=1}^{n}(s_iI_e-c_iI_c)D_i\,(M-N_i)^2\leqslant 0$ ,则 $TVC'_3(T)>0$ ,所以 $TVC_3(T)$ 是单调递增函数,其最小值在 $T_3^*=M-N_1$ 时取得.

**定理 1** 假设 $TVC(T^*)$ 是模型(4)的最优值,则

$$TVC(T^*)=\min\{TVC_1(T_1^*),TVC_{2,1}(T_{2,1}^*),TVC_{2,2}(T_{2,2}^*),\cdots,TVC_{2,n-1}(T_{2,n-1}^*),TVC_3(T_3^*)\}.$$

定理 1 表明,库存系统存在唯一的最优订购策略,且可以通过下面的方法确定最优订购策略:首先根据引理 1、引理 2 及引理 3 分别求出 $T_1^*,T_{2,m}^*$ 及 $T_3^*(m=1,2,\cdots,n-1.)$,然后由定理 1 确定库存系统最优的订货周期 $T^*$ 及最优库存系统成本 $TVC(T^*)$ .

## 4 数值例子

假设库存参数:$n=4,A=450,h=10,Ic=0.06,Ie=0.04,P=2900,s_1=70,s_2=80,s_3=90,s_4=95$; $c_1=40,c_2=45,c_3=50,c_4=55$; $D_1=2500,D_2=2700,D_3=2800,D_4=2300$; $\rho_1=D_1/P,\rho_2=D_2/P,\rho_3=D_3/P,\rho_4=D_4/P$; $N_1=30/365,N_2=35/365,N_3=40/365,N_4=45/365$. 试验结果见表 1、表 2 和表 3.

表 1 的数据结果表明:当其他参数不变时,供应商提供给零售商的信用期 $M$ 越大时,零售商的最优订货周期 $T^*$ 及最优库存系统成本 $TVC(T^*)$ 就越

**表 1　$M$ 的变化对最优值的影响**

**Table 1　Influence of the change of $M$ on the optimal value**

| $M$ | $T^*$ | $TVC(T^*)$ |
|---|---|---|
| 50/365 | $T_3=0.08345$ | $TVC(T_3)=9448.43$ |
| 55/365 | $T_{2,3}=0.08758$ | $TVC(T_{2,3})=9014.99$ |
| 60/365 | $T_{2,1}=0.08680$ | $TVC(T_{2,1})=8566.22$ |
| 65/365 | $T_{2,2}=0.08577$ | $TVC(T_{2,2})=8108.22$ |
| 67/365 | $T_1=0.08437$ | $TVC(T_1)=7898.90$ |
| 70/365 | $T_1=0.08437$ | $TVC(T_1)=7544.66$ |

**表 2　$I_e$ 的变化对最优值的影响($M=55/365$)**

**Table 2　Influence of the change of $I_e$ on the optimal value**

| $I_e$ | $T^*$ | $TVC(T^*)$ |
|---|---|---|
| 0.020 | $T_3=0.08988$ | $TVC(T_3)=9251.75$ |
| 0.030 | $T_3=0.08609$ | $TVC(T_3)=9129.85$ |
| 0.035 | $T_3=0.08434$ | $TVC(T_3)=9072.16$ |
| 0.040 | $T_{2,3}=0.08758$ | $TVC(T_{2,3})=9014.99$ |
| 0.045 | $T_{2,1}=0.08639$ | $TVC(T_{2,1})=8954.45$ |
| 0.050 | $T_{2,2}=0.08524$ | $TVC(T_{2,2})=8893.89$ |

**表 3　$N_i(i=1,\cdots,4)$ 的变化对最优值的影响($M=55/365$)**

**Table 3　Influence of the change of $N_i(i=1,\cdots,4)$ on the optimal value**

| $N_i(i=1,\cdots,4)$ | $T^*$ | $TVC(T^*)$ |
|---|---|---|
| $N_1=28/365, N_2=30/365, N_3=35/365, N_4=42/365$ | $T_2=0.08687$ | $TVC_2=8668.303$ |
| $N_1=30/365, N_2=35/365, N_3=40/365, N_4=45/365$ | $T_2=0.08758$ | $TVC_2=9014.99$ |
| $N_1=30/365, N_2=36/365, N_3=41/365, N_4=48/365$ | $T_2=0.08776$ | $TVC_2=9127.75$ |
| $N_1=35/365, N_2=40/365, N_3=45/365, N_4=50/365$ | $T_3=0.08345$ | $TVC_3=9448.43$ |
| $N_1=38/365, N_2=42/365, N_3=45/365, N_4=52/365$ | $T_3=0.08367$ | $TVC_3=9587.76$ |
| $N_1=40/365, N_2=43/365, N_3=47/365, N_4=53/365$ | $T_3=0.08383$ | $TVC_3=9714.25$ |

小.从表 2 中不难看出:当其他参数不变时,随着收益利率 $I_e$ 的增大,零售商的最优订货周期 $T^*$ 及最优库存系统成本 $TVC(T^*)$ 都减小.从表 3 可以看出:当其他参数不变时,随着零售商提供给顾客的信用期 $N_i(i=1,\cdots,4)$ 的增大,零售商的最优订货周期 $T^*$ 及最优库存系统成本 $TVC(T^*)$ 也增大.这表明,零售商要降低库存相关成本,就需要争取尽可能长的信用支付期 $M$,而尽可能降低提供给顾客的延期支付期 $N_i, i=1,\cdots,4$.

**参考文献:**


[1] Teng J T,Chen J,Goyal S K. A comprehensive note on: An inventory model under two levels of trade credit and limited storage space derived without derivatives[J]. Appl Math Modell,2009(33):4388-4396.

[2] 闵杰,周永务,刘耀玺,等.时变需求下基于两层次信用支付策略的供应链库存模型[J].系统工程理论与实践,2011,31(2):262-269.

[3] Huang Y F,Hsu K H. An EOQ model under retailer partial trade credit policy in supply chain[J]. International journal of production economics,2008,112:655-664.

[4] 张华芳,戴更新,秦君雪,等.信用支付条件下需求不确定的最优订购模型[J].青岛大学学报:自然科学版,2009,22(2):77-80.

[5] 姚云飞,郝家芹.二层信用策略下部分延期付款的库存模型[J].应用数学,2011,24(4):784-790.

[6] Teng J T,Chang C T. Optimal manufacturer's replenishment policies in the EPQ model under two levels of trade credit policy[J]. European Journal of Operational Research ,2009,195:358-363.

[7] Liao J J. An EOQ model noninstantaneous receipt and exponentially deteriorating items under two-level trade credit[J]. International journal of production economics,2008,113:852-861.

[8] Jaggi C K,Goyal S K,Goel S K. Retailer's optimal replenishment decisions with credit-linked demand under permissible delay in payments[J]. European Journal of Operational Research,2008,190(1):130-135.

[9] Thangam A Uthayakumar R. Two-echelon trade credit financing for perishable items in a supply chain when demand depends on both selling price and credit period [J]. Computers & Industrial Engineering,2009(57):773-786.

[10] Pasandideh S H R,Niaki S T A,Nia A R. A genetic algorithm for vendor managed inventory control system of multi-product multi-constraint economic order quantity model[J]. Expert Systems with Application,2011,38:2708-2716.

[11] Sana S S. Demand influenced by enterprises' initiatives-A multi-item EOQ model of deteriorating and ameliorating items[J]. Mathematical and Computer modeling,2010,52:284-302.

[12] Panda D,Maiti M. Multi-item inventory models with price dependent demand under flexibility and reliability consideration and imprecise space constraint: A geometric programming approach[J]. Mathematical and computer Modeling,2009,49:1733-1749.

[13] 莫降涛,陈桂梅,范婷,等.需求依赖即时库存水平的易变质多物品最优订购策略[J].系统工程,2011,29(5):98-101.


(责任编辑:尹　闯)