DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2013.03.011



# 四阶两点边值问题三解的存在性*

# Three Solutions for Four-order Second-point Boundary Value Problems

倪 黎[1,2],茹 凯[1,2],韦煜明[1]

NI Li[1,2],RU Kai[1,2],WEI Yu-ming[1]

(1.广西师范大学数学科学学院,广西桂林 541004;2.铜仁学院数学与计算机科学系,贵州铜仁 554300)

(1. School of Mathematical Science, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China; 2. Department of Mathematics and Computer Science, Tongren University, Tongren, Guizhou, 554300, China)

**摘要**:利用上下解方法和 Leray-Schauder 度理论讨论一类四阶两点边值问题的三解性问题,给出该问题存在三个解的一个充分条件.

**关键词**:边值问题 上下解方法 Leray-Schauder 度理论

**中图法分类号**:O175.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2013)03-0264-03

**Abstract**: The lower and upper solutions and Leray-Schauder degree theory were used to study a kind of four-order second-point boundary value problems, and a sufficient condition for the existence of three solutions was given.

**Key words**: boundary value problems, lower and upper solutions, Leray-Schauder degree theory

对于四阶两点边值问题:

$$u^{(4)}(t)-f(t,u(t),u'(t),u''(t),u'''(t))=0,0<t<1, \quad (1)$$

$$u(0)=u'(1)=0,au''(0)-bu'''(0)=0,cu''(1)+du'''(1)=0, \quad (2)$$

其中 $a,c>0,b,d\geqslant 0,\rho:=ad+bc+ac,f:[0,1]\times R^4\to R$ 连续,文献[1]利用上下解方法和Schauder不动点定理得到其解的存在唯一性;文献[2～5]对该问题的多解性进行过研究.本文将利用上下解方法和 Leray-Schauder 度理论,研究一定条件下,边值问题(1),(2)三解的存在性,给出该问题存在三解的一个充分条件.

## 1 预备知识

**定义 1**[1] 称 $\alpha,\beta\in C^4[0,1]$ 为边值问题(1),(2)的下解和上解,若条件

$$\alpha^{(4)}(t)-f(t,\alpha(t),\alpha'(t),\alpha''(t),\alpha'''(t))\leqslant 0,0<t<1, \quad (3)$$

$$\alpha(0)=\alpha'(1)=0,a\alpha''(0)-b\alpha'''(0)\geqslant 0,c\alpha''(1)+d\alpha'''(1)\geqslant 0, \quad (4)$$

和

$$\beta^{(4)}(t)-f(t,\beta(t),u'(t),\beta''(t),\beta'''(t))\geqslant 0,0<t<1, \quad (5)$$

$$\beta(0)=\beta'(1)=0,a\beta''(0)-b\beta'''(0)\leqslant 0,c\beta''(1)+d\beta'''(1)\leqslant 0 \quad (6)$$

成立.

**注 1**[2] 若不等式(3)和(5)严格成立,则称 $\alpha$,$\beta$ 分别为边值问题(1),(2)的严格下、上解.

**注 2**[2] 设 $u$ 是边值问题(1),(2)的一个解,若 $\alpha$ 是边值问题(1),(2)的严格下解且满足 $\alpha\leqslant u$,则在(0,1)上有 $\alpha<u$.对严格上解也有类似的结论成立.

**定义 2**[1] 设 $f\in C([0,1]\times R^4,R),\alpha,\beta\in C([0,1],R)$,且 $\alpha(t)\leqslant\beta(t)$.称 $f(t,u,v,x,y)$ 满足关于 $\alpha,\beta$ 的 Nagumo 条件,如果存在$[0,\infty)$上的连续函数 $h(s)>0$,使得

$$|f(t,u,v,x,y)|\leqslant h(|y|), \quad (7)$$

**收稿日期**:2013-02-12

**修回日期**:2013-04-18

**作者简介**:倪 黎(1989-),女,硕士研究生,主要从事微分方程研究。

*广西教育厅科研项目(201012MS025);广西壮族自治区研究生教育创新计划项目(2011106020701M37)资助。

$$\int_0^{\infty} \frac{s}{h(s)} \mathrm{d}s = \infty. \tag{8}$$

为表述方便，给出几个假设：

($H_1$) 边值问题(1)，(2) 有两个严格下解 $\alpha_1, \alpha_2$ 和两个严格上解 $\beta_1, \beta_2$，且满足 $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \beta_2, \alpha_1 \leqslant \beta_1 \leqslant \beta_2, \beta_1 \leqslant \alpha_2$；

($H_2$) 设 $(t,u,v,x,y) \in [0,1] \times [\alpha_1(t), \beta_2(t)] \times [\alpha'_1(t), \beta'_2(t)] \times [\alpha''_1(t), \beta''_2(t)] \times R$, $f(t,u,v,x,y): [0,1] \times R^4 \to R$ 是一个连续函数，且关于 $u, v, x, y$ 是单调非减的；

($H_3$) $f$ 关于 $\alpha_1(t), \beta_2(t)$ 满足 Nagumo 条件.

## 2 主要结果

假设($H_3$) 成立，可取 $C > 0, \lambda = \max\limits_{t\in[0,1]} \beta''_2(t) - \min\limits_{t\in[0,1]} \alpha''_1(t)$ 满足

$$\int_{\lambda}^{C} \frac{s}{h(s)} \mathrm{d}s > \lambda. \tag{9}$$

对 $\forall u \in C[0,1]$，定义 $\| u \|_{\infty} = \max\{|u(t)|: t \in [0,1]\}$，再取 $L = \max\{\|\alpha'''_1\|_{\infty}, \|\beta'''_2\|_{\infty}, C, 2\lambda\}$. 定义函数

$$F_3(t,u,v,x,y) = \begin{cases} F_2(t,u,v,x,L), y > -L, \\ F_2(t,u,v,x,y), |y| \leqslant L, \\ F_2(t,u,v,x,-L), y < -L. \end{cases}$$

$$F_2(t,u,v,x,y) = \begin{cases} F_1(t,u,v,\beta''_2,y), x < \beta''_2, \\ F_1(t,u,v,x,y), \beta''_2 \leqslant x \leqslant \alpha''_1, \\ F_1(t,u,v,\alpha''_1,y), x > \alpha''_1. \end{cases}$$

$$F_1(t,u,v,x,y) = \begin{cases} F(t,u,\beta'_2,x,y), v > \beta'_2, \\ F(t,u,v,x,y), \alpha'_1 \leqslant v \leqslant \beta'_2, \\ F(t,u,\alpha'_1,x,y), v < \alpha'_1. \end{cases}$$

$$F(t,u,v,x,y) = \begin{cases} f(t,\beta_2,v,x,y), u > \beta_2, \\ f(t,u,v,x,y), \alpha_1 \leqslant u \leqslant \beta_2, \\ f(t,\alpha_1,v,x,y), u < \alpha_1. \end{cases}$$

则 $F_3: [0,1] \times R^4 \to R$ 连续. 若取 $M > \max\{\|\alpha_1\|_{\infty}, \|\beta_2\|_{\infty}\}$，则对 $\forall (t,u,v,x,y) \in [0,1] \times R^4$，有 $|F_3(t,u,v,x,y)| \leqslant M$.

现考虑方程

$$u^{(4)}(t) - F_3(t,u(t),u'(t),u''(t),u'''(t)) = 0, \quad 0 < t < 1. \tag{10}$$

**引理 1** 若 $u(t)$ 是边值问题(10)，(2) 的解，且条件($H_1$) ～ ($H_3$) 成立，则 $u(t)$ 是边值问题(1)，(2) 的解.

**证明** 由 $F$ 的定义可知，要证引理 1 只需证明，对边值问题(10)，(2)，下列不等式成立：

$$\alpha_1(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta_2(t), \alpha'_1(t) \leqslant u'(t) \leqslant \beta'_2(t), \beta''_2(t) \leqslant u''(t) \leqslant \alpha''_1(t), \tag{11}$$

$$|u'''(t)| \leqslant L. \tag{12}$$

先证明(11) 式成立. 利用反证法，假设 $\beta''_2(t) \leqslant u''(t), t \in [0,1]$ 不成立，则存在 $t_0 \in [0,1]$，使得 $\beta''_2(t_0) - u''(t_0) = \max\limits_{t\in[0,1]}\{\beta''_2(t) - u''(t)\} > 0$.

**情形 1** 当 $t_0 \in (0,1)$ 时，有 $\beta''_2(t_0) > u''(t_0)$，$\beta'''_2(t_0) \equiv u'''(t_0)$，$\beta_2^{(4)}(t_0) \leqslant u^{(4)}(t_0)$，再结合($H_1$) 有

$\beta_2^{(4)}(t_0) \leqslant u^{(4)}(t_0) = F_3(t_0,u(t_0),u'(t_0),u''(t_0),u'''(t_0)) = F_2(t_0,u(t_0),u'(t_0),u''(t_0),\beta'''_2(t_0)) =$
$F_1(t_0,u(t_0),u'(t_0),\beta''_2(t_0),\beta'''_2(t_0))$.

若 $u'(t_0) < \beta'_2(t_0), u(t_0) < \beta_2(t_0)$，由 $f$ 的单调性及 $\beta_2$ 的定义，上式可化简为

$\beta_2^{(4)}(t_0) \leqslant F(t_0,u(t_0),\beta'_2(t_0),\beta''_2(t_0),\beta'''_2(t_0)) \leqslant f(t_0,\beta_2(t_0),\beta'_2(t_0),\beta''_2(t_0),\beta'''_2(t_0)) < \beta_2^{(4)}(t_0)$.

对于另外三种情况：$u'(t_0) < \beta'_2(t_0), u(t_0) \geqslant \beta_2(t_0)$；$u'(t_0) \geqslant \beta'_2(t_0), u(t_0) \geqslant \beta_2(t_0)$ 和 $u'(t_0) \geqslant \beta'_2(t_0), u(t_0) < \beta_2(t_0)$，同理可得 $\beta_2^{(4)}(t_0) < \beta_2^{(4)}(t_0)$，产生矛盾.

**情形 2** 当 $t_0 = 0$ 时，有 $\beta''_2(0) > u''(0)$，$\beta'''_2(0) \leqslant u'''(0)$. 再由(2) 式和(6) 式有

$$a\beta''_2(0) - b\beta'''_2(0) \leqslant 0 = au''(0) - bu'''(0),$$

从而 $a(\beta''_2(0) - u''(0)) \leqslant b(\beta'''_2(0) - u'''(0))$ 与 $a > 0, b \geqslant 0$，产生矛盾.

**情形 3** 当 $t_0 = 1$ 时，有 $\beta''_2(1) > u''(1)$，$\beta'''_2(1) \geqslant u'''(1)$. 再由(2) 式和(6) 式有

$$c\beta''_2(1) + d\beta'''_2(1) \leqslant 0 = cu''(1) + du'''(1),$$

从而 $c(\beta''_2(1) - u''(1)) \leqslant d(u'''(1) - \beta'''_2(1))$ 与 $c > 0, d \geqslant 0$，产生矛盾. 于是有 $\beta''_2(t) \leqslant u''(t), t \in [0,1]$. 同理可证 $u''(t) \leqslant \alpha''_1(t), t \in [0,1]$，即

$$\beta''_2(t) \leqslant u''(t) \leqslant \alpha''_1(t).$$

对上式两端从 $t$ 到 1 积分，得

$$\beta'_2(1) - \beta'_2(t) \leqslant u'(1) - u'(t) \leqslant \alpha'_1(1) - \alpha'_1(t).$$

结合上下解的条件：$u(0) = u'(1) = 0, \alpha(0) = \alpha'(1) = 0, \beta(0) = \beta'(1) = 0$，可得

$$\alpha'_1(t) \leqslant u'(t) \leqslant \beta'_2(t).$$

再对上式两端从 0 到 $t$ 积分并化简，可得

$$\alpha_1(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta_2(t).$$

从而证明(11) 式成立.

再证明(12)式成立.假设存在 $t \in [0,1]$,使得 $|u'''(t)| > L$.不失一般性,设 $u'''(t) > L$.由中值定理及 $\beta''_2(t) \leqslant u''(t) \leqslant \alpha''_1(t)$, $t \in [0,1]$ 知,存在 $\theta \in (0,1)$ 使得 $u'''(\theta) = u''(1) - u''(0) \leqslant \lambda < L$.因为 $u'''(t) \in C[0,1]$,则存在区间 $[t_1,t_2] \subseteq [0,1]$(或 $[t_2,t_1] \subseteq [0,1]$),使得

$$u'''(t_1)=\lambda, u'''(t_2)=L, \lambda < u'''(t) < L, t \in (t_1, t_2). \tag{13}$$

由(7)式有

$$|u^{(4)}(t)| = |F_3(t,u,u',u'',u''')| = |f(t,u,u',u'',u''')| \leqslant h(|u'''|), t \in (t_1,t_2),$$

则

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{u'''(t)u^{(4)}(t)}{h(u'''(t))} \mathrm{d}t \right| \leqslant \left| \int_{t_1}^{t_2} u'''(t) \mathrm{d}t \right| \leqslant \lambda. \tag{14}$$

而由(13)式和(9)式有

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{u'''(t)u^{(4)}(t)}{h(u'''(t))} \mathrm{d}t \right| = \left| \int_{\lambda}^{L} \frac{s}{h(s)} \mathrm{d}s \right| > \lambda. \tag{15}$$

于是(14)式与(15)式产生矛盾,所以 $|u'''(t)| \leqslant L$, $t \in [0,1]$.从而 $u(t)$ 就是边值问题(1),(2)的解.

**定理1** 若条件$(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_3)$成立,则边值问题(1),(2)有三个解 $u_1,u_2,u_3$,且在$[0,1]$上满足

$$\alpha_i \leqslant u_i \leqslant \beta_i, \alpha'_i \leqslant u'_i \leqslant \beta'_i, \beta''_i \leqslant u''_i \leqslant \alpha''_i, i=1,2, \tag{16}$$

$$u_3 \geqslant \beta_1, u''_3 \leqslant \beta''_1, u_3 \leqslant \alpha_2, u''_3 \geqslant \alpha''_2. \tag{17}$$

**证明** 定义算子 $T: C[0,1] \to C^1[0,1]$ 为

$$(Tu)(t) = \int_0^1 G(t,s) F_3(t,u,u',u'',u''') \mathrm{d}s,$$

那么边值问题(10),(2)有解,当且仅当$(I-T)(u)=0$.其中

$$G(t,s) = \frac{1}{\rho}\begin{cases}(c+d-ct)(b+as), 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1,\\(b+at)(c+d-cs), 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1.\end{cases}$$

令 $\Omega = \{u \in C^3[0,1] : \|u\| < PM+L\}$,其中 $P > \max\{\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 |G(t,s)| \mathrm{d}s, 1\}$.

对 $u \in \overline{\Omega}$, $Tu = \int_0^1 G(t,s)F_3(t,u,u',u'',u''')\mathrm{d}s \leqslant M\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s < PM < PM+L$.故 $T(\overline{\Omega}) \subset \Omega$ 且是全连续的,从而

$$\deg(I-T,\Omega,0) = \deg(I,\Omega,0) = 1.$$

令 $\Omega_1 = \{u \in \Omega : u'' > \beta''_1\}$, $\Omega_2 = \{u \in \Omega : u'' < \alpha''_1\}$.由条件$(\mathrm{H}_1)$, $\alpha_2 \geqslant \beta_1$, $\alpha''_2 \geqslant \alpha''_1 > L$, $\beta''_1 \leqslant \beta''_2 < L$,有

$$\Omega_1 \neq \varnothing \neq \Omega_2, \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2} = \varnothing, \Omega_3 = \Omega \setminus \overline{\{\Omega_1 \cup \Omega_2\}} \neq \varnothing.$$

又由$(\mathrm{H}_1)$和注2知,该问题在 $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ 上无解,即 $\deg(I-T, \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2, 0) = 0$.由度的区域可加性,有

$$\deg(I-T,\Omega,0) = \deg(I-T,\Omega_3,0) + \deg(I-T,\Omega_1,0) + \deg(I-T,\Omega_2,0).$$

类似可证 $\deg(I-T,\Omega_1,0) = \deg(I-T,\Omega_2,0) = 1$.从而 $\deg(I-T,\Omega_3,0) = -1$.

由 Leray-Schauder 度理论知边值问题(10),(2)有三个解,分别在 $\Omega_1$, $\Omega_2$ 和 $\Omega_3$ 内.结合引理1知,边值问题(1),(2)有三个解且满足(16)式和(17)式.定理1得证.

**参考文献:**


[1] 封汉颖.若干微分方程边值问题的可解性研究[D].北京:北京理工大学,2008.

[2] 杜增吉,葛渭高.二阶两点边值问题的多解存在性[J].数学研究与评论,2006,26(2):406-412.

[3] Khan R A,J R L Webb. Existence of at least three solutions of a second-order three-point boundary value problem[J]. Nonlinear Analysis,2006(64):1356-1366.

[4] Pang C,Dong W,Wei Z. Mulitiple solutions for fourth-order boundary value problem[J]. J Math Anal Appl,2006,314:464-476.

[5] 薛春艳,蔡晓静,杜增吉.四阶三点边值问题的多解[J].辽宁师范大学学报,2007,30(3):284-287.

[6] 郭大钧,孙经先,刘兆理.非线性常微分方程泛函方法[M].济南:山东科学技术出版社,1995.


(责任编辑:尹 闯)