DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2013.03.012

关于无平方因子优美指数的新结论*

New Conclusions about the Beauty Index of No-square Divisor

谢　燕
XIE Yan

(阿坝师范高等专科学校预科部,四川汶川　623002)
(Department of Preparatory,Aba Normal College,Wenchuan,Sichuan,623002,China)

摘要:对形如 $M_n=\prod_{i=1}^{n}p_i$(p_i 为相异的素数)的无平方因子的正整数是否为优美指数进行探讨,给出 M_n 是完全优美指数集合的充分条件和 $n\prod_{i=1}^{n-1}p_i$($p_i\neq 2,3$)是优美指数集合的充分条件,并找到一个几乎非优美指数集合.

关键词:优美指数　非优美指数　无平方因子
中图法分类号:O156.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2013)03-0267-02

Abstract:This paper discussed whether a no-square divisor form as $M_n=\prod_{i=1}^{n}p_i$ was a beauty index or not. Two sufficient conditions of the beauty index set were given, and an almost non-beauty index set was found.

Key words:beauty index,non-beauty index,no-square divisor

2001 年,A. Murthy 在文献[1]中定义了优美指数,即

定义 1　对于一个正整数 m,如果存在另一个正整数 n,可使 $m=\frac{n}{d(n)}$,则称 m 为优美指数,否则称为非优美指数.

定义 1 中的 N 是全体正整数的集合,对于 $n\in N$,记 $n=\prod_{i=1}^{s}p_i^{b_i}$,$d(n)=\prod_{i=1}^{s}(b_i+1)$.

文献[1]还曾提出如下猜想:

猜想 1[1]　对任意正整数 m,m 都是优美指数.但之后,乐茂华[2]证明 64 不是优美指数,从而否定了猜想 1.2008 年吴文权在文献[3]中定义 $M_n=\left\{m\,\middle|\,m=\prod_{i=1}^{n}p_i,n\geqslant 1\right\}$,$p_i(i=1,\cdots,n)$ 为相异的素数,并得出结论:(1) 当对充分大的 $p_i(i=1,\cdots,n)$,m 都是(非)优美指数,则称 M_n 为无平方因子的几乎(非)优美指数集合;(2) 当对任意相异的素数 $p_i(i=1,\cdots,n)$,m 都是(非)优美指数,则称 M_n 为无平方因子的完全(非)优美指数集合.而且他找出了当 $n=1,2,4,11$ 时,M_n 为完全优美指数的集合和当 $n=3$ 时,M_n 是几乎优美指数的集合,但是未能找到几乎非优美集合.本文给出 M_n 为完全优美指数集合的一个充分条件和 nM_n($p_i\neq 2,3$)为优美指数集合的充分条件,并找到一个几乎非优美指数集合.

定理 1　若存在正整数 $r\geqslant 1$,使得方程 $2^x(r+1)=2^r$ 有正整数解 n,则 M_n 是完全优美指数集合.

证明　(1) 当 $p_i(i=1,\cdots,n)$ 中不包含 2 时,

$$\prod_{i=1}^{n}p_i=\frac{\prod_{i=1}^{n}p_i\times 2^r}{2^n(r+1)}.$$

(2) 当 $p_i(i=1,\cdots,n)$ 中包含 2 时,不妨令 $p_1=2$,则有

$$2\prod_{i=2}^{n-1}p_i=\frac{\prod_{i=2}^{n-1}p_i\times 2^r}{2^{n-1}(r+1)}.$$

定理 1 得证.

因为 $2^x(r+1)=2^r$ 的正整数解有无穷多个,从而验证文献[3]中的猜想 B——"存在无穷多个 $n\geqslant$

收稿日期:2013-04-18
修回日期:2013-05-10
作者简介:谢　燕(1982-),女,讲师,硕士研究生,主要从事数论研究。
*四川省应用基础研究项目(2011JYZ032)资助。

1,使得 M_n 为完全优美指数集合”是正确的.

定理 2 $\prod_{i=1}^{n} p_i$ ($p_i > 2^{n+1}$ 且是相异的素数)是非优美指数的充要条件是 2^n 为非优美指数.

证明 充分性.当 2^n 是非优美指数时,假设 $\prod_{i=1}^{n} p_i$ ($p_i > 2^{n+1}$ 相异的素数)是优美指数.则一定存在正整数 $m=\prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i+1}\prod_{j=1}^{k} q_j^{b_j}$ ($\beta_i \geqslant 0, b_j \geqslant 1$ 且 $p_i \neq q_j$)使得

$$\prod_{i=1}^{n} p_i=\frac{\prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i+1}\prod_{j=1}^{k} q_j^{b_j}}{\prod_{i=1}^{n}(\beta_i+2)\prod_{j=1}^{k}(b_j+1)}. \tag{1}$$

由(1)式得

$$\prod_{i=1}^{n}(\beta_i+2)\prod_{j=1}^{k}(b_j+1)=\prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i}\prod_{j=1}^{k} q_j^{b_j}. \tag{2}$$

而等式

$$\prod_{i=1}^{n}(\beta_i+2)=\prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i} \tag{3}$$

不可能成立.因为当 $\beta_i(i=1,\cdots,n)$ 中有一个为 0 时,等式左边为偶数,右边为奇数.又因为

$$p_i^{\beta_i} > \beta_i+2, p_i > 2^{n+1}, \beta_i \geqslant 1, \tag{4}$$

因此 $\beta_i \geqslant 1(i=1,\cdots,n)$ 时,等式也不可能成立,所以(2)式中 $j \geqslant 1$.又因为 $q_j^{b_j} \geqslant b_j+1(j=1,\cdots,k)$,所以

$$\prod_{i=1}^{n}(\beta_i+2) \geqslant \prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i}. \tag{5}$$

由(4)式知,当 $\beta_i \geqslant 1(i=1,\cdots,n)$ 时(5)式不成立.则 $\beta_i(i=1,\cdots,n)$ 中必含有 0,假设 $\beta_i(i=1,\cdots,n)$ 中有 a 个 1,不妨令当 $\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_a=1$,其余全为 0,代入(5)式得

$$3^a \times 2^{n-a} \geqslant \prod_{i=1}^{a} p_i. \tag{6}$$

因为 $p_i > 2^{n+1}$,由(6)式可得 $3^a \times 2^{n-a} \geqslant \prod_{i=1}^{a} p_i \geqslant 2^{a(n+1)}$,而此不等式不成立.同理可以证明,当 $\beta_i(i=1,\cdots,n)$ 含有其他非 0 正整数时(5)式不成立,所以只有当 $\beta_i=0(i=1,\cdots,n)$ 时(5)式才成立.将 $\beta_i=0(i=1,\cdots,n)$ 代入(2)式可得

$$2^n\prod_{j=1}^{k}(b_j+1)=\prod_{j=1}^{k} q_j^{b_j}. \tag{7}$$

又因为 2^n 是非优美指数,那么(7)不可能成立,所以 $\prod_{i=1}^{n} p_i$,($p_i > 2^{n+1}$ 相异的素数)是非优美指数.

必要性.当 $\prod_{i=1}^{n} p_i$ ($p_i > 2^{n+1}$ 相异的素数)是非优美指数时,假设 2^n 是优美指数,则一定存在 $m=\prod_{j=1}^{k} q_j^{b_j}$ ($b_j \geqslant 1$),使得

$$2^n=\frac{\prod_{j=1}^{k} q_j^{b_j}}{\prod_{j=1}^{k}(b_j+1)}. \tag{8}$$

因为 $p_i > 2^{n+1}(i=1,\cdots,n)$,根据文献[3]可得,(8)式中 $q_j \neq p_i(j=1,\cdots,k,i=1,\cdots,n)$,所以(8)可变为 $\prod_{i=1}^{n} p_i=\dfrac{\prod_{i=1}^{n} p_i\prod_{j=1}^{k} q_j^{b_j}}{2^n\prod_{j=1}^{k}(b_j+1)}$.又因为 $\prod_{i=1}^{n} p_i$ ($p_i > 2^{n+1}$ 相异的素数)是非优美指数,所以此式不可能成立,那么 2^n 是非优美指数.

定理 2 得证.

吴文权在文献[4]中给出形如 $m=\prod_{i=1}^{n} p_i^{a_{i-1}}$,($a_i \geqslant i$ 整数)为非优美指数的充要条件,本文定理 2 是在此基础上扩大了 p_i 的取值范围,做了一个当 $a_i=2$,($i=1,\cdots,n$)的特例,进一步验证文献[4]的报道。

定理 3 当 n 为大于等于 5 的素数时,$n\prod_{i=1}^{n-1} p_i$ ($p_i \neq 2$ 且 $p_i \neq 3$)为优美指数.

证明 因为 n 为大于等于 5 的素数,则有

$$n\prod_{i=1}^{n-1} p_i=\frac{n^2\prod_{i=1}^{n-1} p_i \times 3^2 \times 2^{n-1}}{3^2 \times 2^{n-1} \times n}.$$

定理 3 得证.

蒲永锋等[5]已证明 2^{13} 为非优美指数,而由定理 2 可知,当 $p_i > 2^{14}(i=1,\cdots,13)$ 时,$\prod_{i-1}^{13} p_i$ 为非优美指数.又由定理 3 可得 $13\prod_{i=1}^{12} p_i$ 为优美指数(当 $p_i \neq 2$ 且 $p_i \neq 3$ 时),所以 M_{13} 为几乎非优美指数集合.

参考文献:

[1] Murthy A. Some more conjecturees on primes and divisors[J]. Smarandache Notions J,2011(12):311-312.

[2] 乐茂华.关于优美指数的一个猜想[J].韶关学院学报:自然科学版,2004,25(3):7-8.

[3] 吴文权.无平方因子的优美指数问题[J].西南民族大学学报:自然科学版,2008,34(3):426-429.

[4] 吴文权.关于非优美指数的一些结论[J].广西科学,2009,16(3):238-239.

[5] 蒲永锋.关于优美指数的 A. Murthy 猜想[J].云南师范大学学报,2006,26(2):5-7.

(责任编辑:尹　闯)